

УДК 539.3

**Баженов В.А.**, д-р техн. наук,  
**Пискунов С.О.**, канд. техн. наук,  
**Солодей І.І.**, канд. техн. наук,  
**Андрієвський В.П.**,  
**Сизевич Б.І.**

## **МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ І ВЕКТОР ВУЗЛОВИХ РЕАКЦІЙ СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОСТІ НМСЕ**

Отримані розв'язувальні співвідношення напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) для косокутного призматичного неоднорідного скінченого елемента з урахуванням змінності компонент метричного тензора в площині його поперечного перерізу і показана ефективність їх застосування при розв'язанні задач термов'язкопружнопластичності.

**Вступ.** Значна кількість відповідальних елементів машинобудівних конструкцій являють собою просторові призматичні тіла складної форми, що перебувають під дією довільно розподілених у просторі та часі силового і температурного навантажень. Визначення їх несучої здатності потребує розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності в нестационарному температурному полі, що є можливим лише із застосуванням чисельних методів, зокрема метода скінчених елементів (МСЕ) та його ефективних модифікацій, до яких відноситься напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ). На теперішній час досвід застосування НМСЕ поширений на широке коло задач механіки деформівного твердого тіла [1, 2, 3].

Урахування нелінійного деформування (деформацій пластичності і повзучості) потребує залучення покрокових алгоритмів моделювання процесу навантаження й ітераційного розв'язання отримуваних систем рівнянь на кожному кроці задачі. При цьому кількість кроків розв'язання задачі про моделювання тривалого деформування в умовах повзучості під впливом навіть сталого навантаження при ізотермічному навантаженні може становити порядку тисячі, а, зважаючи на складність форми досліджуваних об'єктів і суттєво просторовий характер напружено-деформованого стану, кількість невідомих становитиме 100 000 і більше. У випадку змінного в часі навантаження, зумовленого зокрема наявністю нестационарного температурного поля, складність задачі і, пов'язаний з цим обсяг обчислювальних витрат збільшуватиметься на порядок.

Суттєве зменшення кількості невідомих дискретної моделі може бути

досягнуто із використанням косокутних скінчених елементів (СЕ), розв'язувальні співвідношення яких враховують змінність компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ. Це потребує розширення скінченоелементної бази в напрямку створення нових модифікацій СЕ, що враховують зазначені геометричні особливості СЕ на основі розгляду напружено-деформованого стану досліджуваних об'єктів в термінах фізичних компонент тензорів напружень та деформацій. Як свідчить аналіз літературних джерел, область застосування неоднорідних косокутних СЕ істотно обмежена неоднорідними косокутними СЕ з шарнірними граничними умовами [11]. Тому є необхідним розроблення неоднорідного косокутного СЕ, що дозволяє моделювати довільні граничні умови.

Метою даної роботи є отримання розв'язувальних співвідношень НМСЕ для призматичних тіл з довільними граничними умовами на торцях із урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ і оцінка ефективності їх використання при розв'язанні задач.

**Вихідні співвідношення.** Розглянемо просторове тіло, що утворене рухом деякої поверхні складної, не обов'язково однозв'язної конфігурації, вздовж напрямної у вигляді відрізка прямої. Зовнішні впливи складаються з розподіленого у просторі навантаження  $q = q(z^i)$  і температурного поля  $T = T(z^i)$ . Фізико-механічні характеристики матеріалу передбачаються залежними від температури  $T$  і просторових координат  $z^i$ :  $E = E(z^i, T)$ ,  $\nu = \nu(z^i, T)$ .

В подальшому такі тіла будемо називати неоднорідними призматичними тілами (рис. 1).

Для дослідження процесів деформування зазначених тривимірних неоднорідних призматичних конструкцій доцільно використовувати наступні системи координат: базисну  $z^j$  – декартову систему координат, яка є незмінною і призначена для задання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (вісі  $z^{1'}$  та  $z^{2'}$  базисної системи координат розташовані в площині поперечного перетину тіла, а вісь  $z^{3'}$  орієнтована вздовж напрямної); місцеву систему координат  $x^i$ , природньо пов'язану з геометрією досліджуваного об'єкта, при цьому вісь  $x^3$  збігається за напрямком з  $z^{3'}$ .

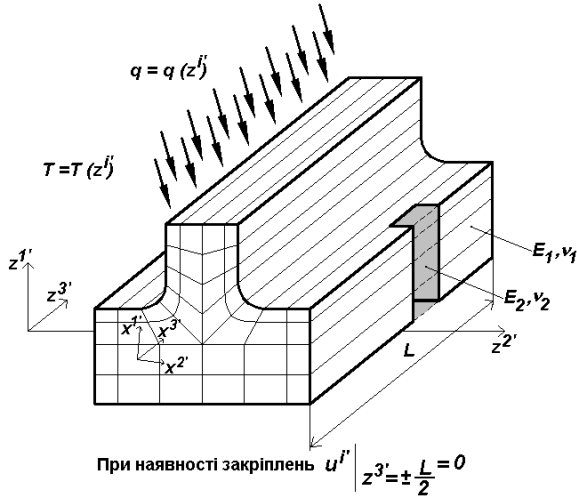


Рис. 1. Неоднорідне призматичне тіло

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення  $z_{,j}^{i'}$ , що обумовлює зв'язок між місцевою та базисною системами координат [4]:

$$z_{,j}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad z_{,3}^{\alpha} = z_{,\alpha}^{3'} = 0. \quad (1)$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1,2, а позначені латинськими – 1,2,3.

Компоненти метричного тензора  $g_{mn}$  в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензора базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z_{,m}^{i'} z_{,n}^{j'} g_{i'j'}. \quad (2)$$

При дослідженні призматичних тіл для базисної декартової системи координат компоненти метричного тензора мають наступні значення:

$$g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\gamma'} z_{,\beta}^{\gamma'}, \quad g_{33} = \left( z_{,3}^{3'} \right)^2. \quad (3)$$

Запишемо співвідношення для визначення компонент деформацій  $\varepsilon_{ij}$  через переміщення  $u_i$  в місцевій системі координат [4]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - u_k \Gamma_{ij}^k, \quad (4)$$

де  $\Gamma_{ij}^k$  – символи Кристофеля другого роду.

Подамо переміщення та символи Кристофеля в місцевій системі координат через їх значення в базисній:

$$u_k = u_{s'} z_{s',k}^{s'}, \quad (5)$$

$$\Gamma_{ij}^k = x_{l'}^k z_{s',i}^{m'} z_{j'}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'} + x_{l'}^k z_{s',i}^{m'} \frac{\partial z_{s',j}^{l'}}{\partial z^{m'}}, \quad (6)$$

де  $x_{l'}^k$  – компоненти тензору, оберненого до (1).

Підставивши переміщення (5) та символи Кристофеля (6) в місцевій системі координат в вираз для визначення компонент деформацій (4) після зведення подібних, зважаючи, що  $z_{s',k}^{s'} \cdot x_{l'}^k = \delta_{l'}^{s'}$ , одержимо загальний вираз для деформацій в місцевій криволінійній системі координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{l'} z_{s',j}^{l'} + u_{l'} z_{s',i}^{l'} \right) - u_{l'} z_{s',i}^{m'} z_{j'}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'}. \quad (7)$$

В декартовій базисній системі координат дорівнюють нулю всі символи Кристофеля, тому, з урахуванням (1), вираз (7) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( u_{l',\alpha} z_{s',\beta}^{l'} + u_{l',\beta} z_{s',\alpha}^{l'} \right); \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left( u_{l',\alpha} z_{s',3}^{l'} + u_{l',3} z_{s',\alpha}^{l'} \right); \\ \varepsilon_{33} &= u_{l',3} z_{s',3}^{l'}. \end{aligned} \quad (8)$$

Фізичні компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}. \quad (9)$$

При термов'язкопружнопластичному деформуванні просторових тіл компоненти прирощення повної деформації  $d\varepsilon_{ij}$  можуть бути подані сумою прирощень пружних деформацій  $d\varepsilon_{ij}^e$ , температурних деформацій

$d\varepsilon_{ij}^T$ , деформацій пластичності  $d\varepsilon_{ij}^p$  та деформацій повзучості  $d\varepsilon_{ij}^c$ , тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c. \quad (10)$$

Компоненти тензору напружень  $\sigma^{ij}$  запишемо через компоненти тензору пружних деформацій у відповідності із узагальненим законом Гука [4]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e. \quad (11)$$

Компоненти тензора пружних сталих  $C^{ijkl}$  для ізотропного тіла знаходимо з співвідношення:

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}), \quad (12)$$

де коефіцієнти Ляме  $\lambda$  та  $\mu$  визначаються через коефіцієнт Пуассона  $\nu = \nu(z^i, T)$  і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга)  $E = E(z^i, T)$  [4]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (13)$$

Фізичні компоненти тензора напружень в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}. \quad (14)$$

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (15)$$

де  $\alpha_T = \alpha_T(z^k, T)$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу,  $\Delta T = T - T_0$  – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при  $T = T_0$ .

Область пружних деформацій обмежена у просторі напружень поверхнею текучості [6]:

$$f_p(\sigma^{ij}, \vartheta, T) = 0. \quad (16)$$

У відповідності з гіпотезою ізотропного зміцнення при умові текучості Мізеса рівняння поверхні текучості має вигляд:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_s(\vartheta, T)]^2 = 0, \quad (17)$$

де  $\tau_s(\vartheta, T)$  – межа текучості при чистому зсуві;  $\vartheta$  – параметр зміцнення

$$\text{Одквіста, } \vartheta = \int_{\epsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p}.$$

Компоненти девіатора напружень  $s_{ij}$ , які входять у вираз (17), визначаються за формулою:

$$s_{ij} = \sigma^{ij} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \sigma^{kl} g^{ij}. \quad (18)$$

Девіатор напружень пов'язаний із пластичними деформаціями у відповідності з асоційованим законом пластичного течіння:

$$\epsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij}. \quad (19)$$

При виникненні деформацій повзучості, поруч із зміцненням необхідно враховувати появу і зростання з часом довільно орієнтованих у просторі дефектів матеріалу, що зменшують ефективний поперечний перетин тіла при незмінній геометрії. Для опису цього процесу в рівнянні використовуваної теорії повзучості вводиться параметр пошкоженості матеріалу –  $\omega$  [8].

По аналогії з (17) до розгляду запроваджується поверхня повзучості – функція другого інваріанту девіатора головних напружень, що обмежує область деформацій повзучості у просторі головних напружень [7, 8]:

$$f_c = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_c(\vartheta_c, T, \xi_i^c, \omega)]^2 = 0, \quad (20)$$

де  $\vartheta_c = \int_{\epsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^c d\epsilon_{ij}^c}$  – параметр Одквіста, при повзучості;  $\xi_i^c = \frac{d\epsilon_i^c}{dt}$  –

інтенсивність швидкості деформацій повзучості;  $\epsilon_i^c$  – інтенсивність деформацій повзучості;  $t$  – час;  $\omega$  – параметр пошкоженості Качанова-Работнова,  $0 \leq \omega \leq 1$  [8].

Вираз (20) може бути поданий у вигляді наступного рівняння:

$$\xi_i^c = f_1(\sigma^{ij}, \vartheta_c, \omega, T). \quad (21)$$

Конкретизація виразу (21) може бути здійснена, наприклад, на основі

теорії накопичення пошкоджень Ю.М.Работнова:

$$\xi_i^c = D \left( \frac{\sigma_i}{1 - \omega} \right)^m, \quad (22)$$

де  $\sigma_i = \sqrt{3s_{ij}s^{ij}/2}$  – інтенсивність нормальних напружень;  $D, m$  – константи матеріалу, що залежать від температури і визначаються з базових експериментів на повзучість.

Взаємозв'язок компонент тензора швидкостей деформацій повзучості  $\xi_{ij}^c$  і напружень при застосуванні вище перелічених теорій повзучості приймається у вигляді:

$$\xi_{ij}^c = \frac{d\varepsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2} \xi_i^c \frac{s_{ij}}{\sigma_i}. \quad (23)$$

Для опису змінення з часом параметру пошкоженості застосовується кінетичне рівняння:

$$\frac{d\omega}{dt} = f_2(\sigma^{ij}, \vartheta_c, \omega, T), \quad (24)$$

яке може бути подане у вигляді узагальненого виразу [5]:

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left[ \frac{\sigma_e}{1 - \omega^r} \right]^m \frac{1}{(1 - \omega)^q} \omega^\beta. \quad (25)$$

Розглянуті співвідношення дозволяють проводити опис процесів нелінійного деформування просторових тіл, що знаходяться в неоднорідному температурному полі.

**Неоднорідний косокутний призматичний скінчений елемент з довільними граничними умовами.** Для апроксимації просторових неоднорідних призматичних тіл використовуються просторові неоднорідні призматичні скінчені елементи (рис. 2), що являють собою призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обриса вздовж напрямної у вигляді прямої.

Кожному скінченому елементу (СЕ) поставлена у відповідність місцева система координат  $x^i$ , яка природньо пов'язана з геометрією об'єкта, так що осі  $x^1$  і  $x^2$  спрямовані вздовж сторін поперечного перетину скінченого елемента (рис. 2), а  $x^3$  спрямована вздовж напрямної та співпадає за напрямком із  $z^3$ . При цьому в місцевій системі

координат поперечний перетин  $CE$  відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2. Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах  $CE$ . Вигляд призматичного  $CE$  в місцевій системі координат наведений на рис. 3.

Будемо вважати, що компоненти тензору пружних сталих та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензору  $g_{ij}$ , а також коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha_T$  дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину  $CE$ :

$$C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}{}^{ijkl} = C^{ijkl} \Big|_{x^\alpha=0}; \quad g = \overset{\circ}{g} = g \Big|_{x^\alpha=0};$$

$$\alpha_T = \overset{\circ}{\alpha}_T = \alpha_T \Big|_{x^\alpha=0}. \quad (26)$$

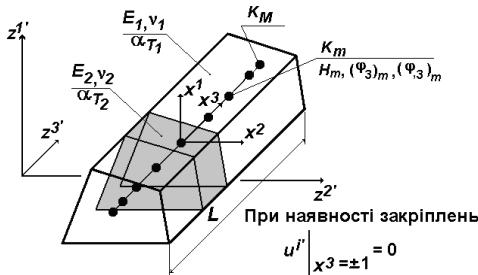


Рис. 2. Неоднорідний призматичний скінчений елемент в базисній системі координат

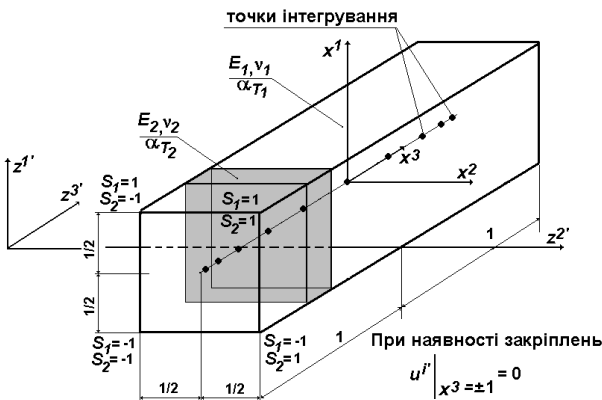


Рис. 3. Неоднорідний призматичний скінчений елемент в місцевій системі координат

Розподілення переміщень і температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (27)$$

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (28)$$

де  $u_{m'(S_1S_2)}$ ,  $T_{(S_1S_2)}$  – вузлові значення переміщень і температури, що подані компонентами в базисній системі координат;  $S_1$  і  $S_2$  – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат  $x^i$ .

Визначимо похідні від переміщень в центрі поперечного перетину СЕ виходячи з прийнятого закону їх розподілення (27):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{u}_{i'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2)}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2)} S_\alpha; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2),3}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2)} S_1 S_2; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2),3} S_\alpha. \end{aligned} \quad (29)$$

Аналогічно, виходячи з (28), визначимо похідні від температури в центрі поперечного перетину СЕ:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1S_2)}; \quad \overset{\circ}{T}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1S_2)} S_\alpha. \quad (30)$$

В напрямку утворюючої переміщення, температура та їх похідні по напрямку  $x^3$  апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій  $\Phi^{(l)}$  – поліномам Лагранжа ( $l=0,1$ ) і Міхліна ( $l=2,\dots,L$ ):

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^L u_{m'}^l \Phi^{(l)}; \quad u_{m',3} = \sum_{l=0}^L u_{m'}^l \Phi_{,3}^{(l)}; \quad (31)$$

$$T = \sum_{l=0}^L T^l \Phi^{(l)}; \quad T_{,3} = \sum_{l=0}^L T^l \Phi_{,3}^{(l)}; \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x^3), \\ \varphi^{(l)} &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2-1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)! (k!)^2 2^{k+1}} \left[ (1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right]. \end{aligned}$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє найбільш просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь [2].

Скінчені елементи, що пропонуються, орієнтовані на розрахунок широкого класу призматичних тіл. Вони повинні забезпечувати не тільки високу точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного рішення. Як показано в роботах [2, 3, 9], застосування моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) [10] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище “хибного зсуву”, що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Подамо компоненти тензору повних фізичних деформацій в поперечних перетинах, що відповідають точкам інтегрування, у відповідності до моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) [9] відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{12} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{33} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} x^\beta, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

В випадку лінійного зв'язку між фізичними компонентами тензора напружень та деформацій використовуємо узагальнений закон Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl}, \quad (34)$$

де  $\tilde{C}^{ijkl} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}$ .

Запишемо вираз для компонент тензора напружень через коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена (33):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & \tilde{C}^{ij11} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} x^2 \right) + 2\tilde{C}^{ij12} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \tilde{C}^{ij22} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} x^1 \right) + \\ & + 2\tilde{C}^{ij13} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13,2} x^2 \right) + 2\tilde{C}^{ij23} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23,1} x^1 \right) + \\ & + \tilde{C}^{ij33} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2} x^2 \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Після перегрупування складників, що містять величини деформацій та їх похідних, застосовуючи позначення

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} &= \tilde{C}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,2}^{ij} &= \tilde{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} + \tilde{C}^{ij13} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13,2} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} &= \tilde{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} + \tilde{C}^{ij23} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23,1} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1}, \end{aligned} \quad (36)$$

отримаємо скорочений запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,2}^{ij} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} x^1. \quad (37)$$

Відкидаючи з (37) члени вигляду  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{i\alpha}$  як ті, що не дають вкладення в енергію деформування елемента, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12}; \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}, \end{aligned} \quad (38)$$

де значення коефіцієнтів  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}$  і  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{ij}$  обчислюються в точках інтегрування  $K_m$ , що розташовані в поперечних перетинах вздовж вісі  $x^3$  (рис. 2).

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компоненти тензора напружень в місцевій системі координат (14):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\sigma}^{12} = g_{12}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33} = g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{33}; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} = \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3}; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} &= g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33}. \end{aligned} \quad (39)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена, отримані з урахуванням (9), матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ}} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}^{\circ} g_{22}^{\circ}}} \overset{\circ}{\epsilon}_{12}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}}} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{33} = \frac{1}{g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\epsilon}_{33}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \left. \frac{\partial \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^{\beta}=0} = \frac{\partial (\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} / g_{\alpha(\alpha)}^{\circ})}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \\ &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ}} \left( \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} h_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^{\circ} \right); \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}}} \left( \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} h_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^{\circ} \right); \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\beta} &= \frac{1}{g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\beta}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad h_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^{\circ} = \frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^{\circ}}{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ}},$$

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} = g_{\alpha(\alpha)} \Big|_{x^\beta=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\partial g_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0}.$$

Коефіцієнтом розкладення  $\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\beta=0}$  нехтуємо, як величиною більш

високого порядку малості.

Запишемо коефіцієнти розкладу деформацій (40) через переміщення в базисній системі координат:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( u_{m',i} z_{,j}^{m'} + u_{m',j} z_{,i}^{m'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\partial \varepsilon_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{\partial (u_{\gamma,\alpha} z_{,\alpha}^{\gamma})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = u_{\gamma,12} z_{,\alpha}^{\gamma} + u_{\gamma,\alpha} z_{,12}^{\gamma} \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \left( u_{\gamma,3(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma} + u_{\gamma,3} z_{,12}^{\gamma} + u_{3',12} z_{,3}^{3'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= u_{3',3\alpha} z_{,3}^{3'} \Big|_{x^\alpha=0}. \end{aligned} \quad (41)$$

Введемо наступні позначення для значень похідних від переміщень  $u_{m',i}$  і компонент тензора перетворення  $z_{,i}^{m'}$  в центрі СЕ:  $u_{m',i} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{u}_{m',i}$ ,

$z_{,i}^{m'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{z}_{,i}^{m'}$ . Тоді:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{u}_{m',i} \overset{\circ}{z}_{,j}^{m'} + \overset{\circ}{u}_{m',j} \overset{\circ}{z}_{,i}^{m'} \right); \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{u}_{\gamma,12} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} + \overset{\circ}{u}_{\gamma,\alpha} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{u}_{\gamma,3(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} + \overset{\circ}{u}_{\gamma,3} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma} + \overset{\circ}{u}_{3',12} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right); \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \overset{\circ}{u}_{3',3\alpha} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'}. \end{aligned} \quad (42)$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій з врахуванням прийнятого закону розподілення переміщень в поперечному перерізі СЕ (29):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{\gamma(S_1 S_2)} \left( S_{\alpha} z_{,\beta}^{\gamma} + S_{\beta} z_{,\alpha}^{\gamma} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1 S_2)} S_{\alpha} z_{,3}^{\gamma} + \frac{1}{2} u_{\gamma(S_1 S_2),3} z_{,\alpha}^{\gamma} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1 S_2),3} z_{,3}^{\gamma} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{\gamma(S_1 S_2)} \left( 2S_1 S_2 z_{,\alpha}^{\gamma} + S_{\alpha} z_{,12}^{\gamma} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1 S_2)} \left( 2S_1 S_2 z_{,3}^{\gamma} \right) + \right. \\
&\quad \left. + u_{\gamma(S_1 S_2),3} \left( S_{(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1 S_2),3} \left( 2S_{\alpha} z_{,3}^{\gamma} \right) \right].
\end{aligned} \tag{43}$$

Із урахуванням розкладу переміщень в напрямку утворюючої (31), отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу вузлових переміщень:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{\gamma(S_1 S_2)}^l \left( S_{\alpha} z_{,\beta}^{\gamma} + S_{\beta} z_{,\alpha}^{\gamma} \right) \Phi^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{m'(S_1 S_2)}^l \left( S_{\alpha} z_{,3}^{\gamma} \Phi^{(l)} + \frac{1}{2} z_{,\alpha}^{\gamma} \Phi_{,3}^{(l)} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{3'(S_1 S_2)}^l z_{,3}^{\gamma} \Phi_{,3}^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{\gamma(S_1 S_2)}^l \left( 2S_1 S_2 z_{,\alpha}^{\gamma} + S_{\alpha} z_{,12}^{\gamma} \right) \Phi^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{m'(S_1 S_2)}^l \left\{ \left( 2S_1 S_2 z_{,3}^{\gamma} \right) \Phi^{(l)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u_{\gamma(S_1 S_2),3} \left( S_{(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma} \right) \Phi^{(l)} \right\} \right];
\end{aligned} \tag{44}$$

$$+ \left( S_{(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \Bigg\};$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{3(S_1 S_2)}^l \left( 2S_{\alpha} z_{,3}^{\gamma} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \right].$$

**Виведення рівнянь рівноваги та матриці жорсткості неоднорідного косокутного призматичного скінченного елемента.** Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи  $N$  СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (45)$$

Варіація енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (46)$$

Подаючи, відповідно до МССЕ, фізичні компоненти тензору напружень (38) і тензору деформацій (33) через їх значення у центрі елемента отримаємо:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[ \left( \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \right. \\ \left. + 2 \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12} \delta \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \left( \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \right. \\ \left. + \left( \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha} \right) \delta \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\beta} x^{\beta} \right) \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (47)$$

Виконуючи інтегрування останнього виразу з урахуванням значень наступних інтегралів :

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0,$$

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}, \quad (48)$$

для варіації енергії деформації одного СЕ одержимо:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[ \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \left( \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^3. \quad (49)$$

З використанням отриманих вище виразів для коефіцієнтів розкладання компонент фізичних напружень (39) і деформацій (40) в ряд Маклорена, вираз для варіації енергії деформування одного СЕ набуде вигляду:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[ \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \left( \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} \delta \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^3, \quad (50)$$

або, у матричній формі:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[ \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{g} dx^3, \quad (51)$$

$$\text{де } \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \right\};$$

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,1} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{22,1} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad 2 \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{23,1} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{23} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33,1} \right\}; \\ \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,2} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{11,2} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{11} \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad 2 \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{13,2} - \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{13} \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{33,2} \right\}; \\ \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{11} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{12} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{22} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{23} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{13} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{33} \right\}; \\ \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,1} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{22}_{,1} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{23}_{,1} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{33}_{,1} \right\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,2} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{11}_{,2} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{13}_{,2} \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{33}_{,2} \right\}. \end{aligned}$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\} &= \sum_{l=0}^L \left( \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right] \boldsymbol{\varphi}^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right] \boldsymbol{\varphi}_{,3}^{(l)} \right) \{ u \}_l; \\ \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\alpha} \right\} &= \sum_{l=0}^L \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] \boldsymbol{\varphi}^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \boldsymbol{\varphi}_{,3}^{(l)} \right) \{ u \}_l, \end{aligned} \quad (52)$$

де

$$\begin{aligned} \{ u \}_l^T &= \left\{ u_{i(-1;-1)}^l \quad u_{i(1;-1)}^l \quad u_{i(-1;1)}^l \quad u_{i(1;1)}^l \right\}; \\ \left[ \overset{\circ}{B}_\alpha \right] &= \left[ \left[ \overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(-1;1)} \left[ \overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(1;1)} \right]; \\ \left[ \overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right] &= \left[ \left[ \overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(-1;1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(1;1)} \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Значення компонент підматриць  $\left[ \overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(S_1, S_2)}$ ,  $\left[ \overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(S_1, S_2)}$  у виразі (53)

для неоднорідних косокутних призматичних тіл визначаються відповідно до формул (44):

$$\left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} & \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} & 0 \\ \frac{1}{2} \left( S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} \right) & \frac{1}{2} \left( S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} & \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} S_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} S_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \end{bmatrix};$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} (B_{1,\alpha})_{11} & (B_{1,\alpha})_{12} & 0 \\ 0 & 0 & (B_{1,\alpha})_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де

$$(B_{1,\alpha})_{11} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{1'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{1'} - \frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{1'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$(B_{1,\alpha})_{12} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{2'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{2'} - \frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{2'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$(B_{1,\alpha})_{23} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} - \frac{1}{4} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (B_{2,\alpha})_{21} & (B_{2,\alpha})_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \end{bmatrix},$$

де

$$(B_{2,\alpha})_{21} = \frac{1}{4} \left( 2S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^1 + \overset{\circ}{z}_{,12}^1 \right) - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^1 \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$(B_{2,\alpha})_{22} = \frac{1}{4} \left( 2S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^2 + \overset{\circ}{z}_{,12}^2 \right) - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^2 \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}.$$

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій (52) через коефіцієнти розкладу переміщень у ряд Маклорена, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{l=0}^L \left( \delta\{u_l\}^T \left( \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^{-T} \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^{-T} \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \delta\{u_l\}^T \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^{-T} \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^{-T} \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \\ &= \sum_{l=0}^L \delta\{u_l\}^T \left\{ \overset{\circ}{R} \right\}_l, \end{aligned} \quad (54)$$

де  $\left\{ \overset{\circ}{R} \right\}_l$  – вектор вузлових реакцій СЕ:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\} &= \left[ \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^{-T} \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^{-T} \varphi_{,3}^{(l)} \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} dx^3 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^{-T} \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^{-T} \varphi_{,3}^{(l)} \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} dx^3 \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \\ &= \left[ \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^{-T} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^{-T} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^{-T} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^{-T} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \end{aligned} \quad (55)$$

Виконуємо чисельне інтегрування за напрямком  $x^3$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 &= \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_m^{(l)} H_m = \{ \sigma \}_{l1}, \\
 \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 &= \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} H_m = \{ \sigma \}_{l3}, \\
 \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 &= \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_m^{(l)} H_m = \{ \sigma \}_{l\alpha}, \\
 \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 &= \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} H_m = \{ \sigma \}_{l\alpha 3},
 \end{aligned} \quad (56)$$

з урахуванням результатів якого отримаємо вираз для обчислення компонент вектору вузлових реакцій СЕ:

$$\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\} = \left\{ \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T \{ \sigma \}_{l1} + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T \{ \sigma \}_{l3} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T \{ \sigma \}_{l\alpha} + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T \{ \sigma \}_{l\alpha 3} \right) \right\} \sqrt{g}^{\circ}. \quad (57)$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (58)$$

де, у відповідності із законом Гука (11),

$$\left[ \overset{\circ}{D} \right] = \left[ \overset{\circ}{C}^{ijkl} \right], \quad \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[ \overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)3} \right] \left[ \overset{\circ}{C}^{ij33} \right] \right].$$

З урахуванням цього вираз для варіації енергій деформування СЕ (54) набуває вигляду:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}^T \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} \right) \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (59)$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left( \delta \{u\}_l^T \right) [K]_{ln} \{u\}_n, \quad (60)$$

де  $[K]_{ln}$  – матриця жорсткості неоднорідного косокутного призматичного СЕ:

$$\begin{aligned} [K]_{ln} = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left( \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T \varphi^{(l)} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix} \varphi^{(n)} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix} \varphi_{,3}^{(n)} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}^T \varphi^{(l)} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \end{bmatrix} \times \\ & \left. \times \left( \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix} \varphi^{(n)} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix} \varphi_{,3}^{(n)} \right) \right\} \sqrt{g} \, dx. \quad (61) \end{aligned}$$

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком  $x^3$  з урахуванням неоднорідності, введемо позначення:

$$\begin{aligned} [D]_{00}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} \, dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} H_m; \\ [D]_{30}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} \, dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} H_m; \\ [D]_{03}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \varphi_{,3} \varphi_m^{(n)} \, dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \varphi_{,3} \varphi_m^{(n)} H_m; \\ [D]_{33}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \varphi_{,3} \varphi_m^{(n)} \, dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \varphi_{,3} \varphi_m^{(n)} H_m; \\ [D]_{00\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} \, dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} H_m; \quad (56) \\ [D]_{30\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} \, dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} H_m; \end{aligned}$$

$$[D]_{03\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] \varphi_{,3}^{(n)} H_m;$$

$$[D]_{33\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] \varphi_{,3}^{(n)} H_m.$$

З урахуванням цих виразів для матриці жорсткості СЕ отримаємо:

$$\begin{aligned} [K]_{ln} = & \left\{ \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T [D]_{00}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T [D]_{30}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T [D]_{03}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right] + \right. \\ & + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T [D]_{33}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right] + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [D]_{00\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \right. \\ & + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [D]_{30\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [D]_{03\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] + \right. \\ & \left. \left. + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [D]_{33\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \right) \right\} \sqrt{g}. \end{aligned} \quad (63)$$

Необхідно зауважити, що при розв'язанні задач термов'язко-пружнопластичності, для кожної з  $M$  точок інтегрування обчислюються не тільки значення координат  $x^3$ , значення базисних функцій  $(\varphi^l)_m$ , їх похідних  $(\varphi^l)_{,3}$ , та вагових функцій  $H_m$ , але й величини температур, величини прирощень деформацій пластичності і повзучості, їх накопичені величини, а також величини параметра пошкодженості матеріалу.

Отримані вирази матриці жорсткості (63) і вектору вузлових реакцій (57) неоднорідного косокутного призматичного скінченного елемента дозволяють будувати дискретні моделі для неоднорідних призматичних тіл складної форми. Урахування змінності компонент метричного тензору в поперечному перерізі призматичного СЕ дозволяє зменшити обмеження на співвідношення розмірів сторін і косокутність поперечного перерізу СЕ, що, в свою чергу, дозволить зменшити кількість невідомих в дискретних моделях НМСЕ.

**Розв'язання тестових прикладів.** З метою доведення ефективності використання розроблених розв'язувальних співвідношень НМСЕ для призматичних тіл з довільними граничними умовами на торцях із урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині

поперечного перерізу  $CE$ , розглянуто наступний тестовий приклад про двовісний розтяг паралелепіпеду розмірами  $20 \times 20 \times 10$  см в умовах плоскої деформації в напрямку  $z^3$ . Внаслідок симетрії розрахункова схема і дискретні моделі побудовані для  $1/4$  об'єкта (рис. 4). Вихідні дані: розтягуюче зусилля  $q = 1 \text{ кг/см}^2$ , модуль пружності  $E = 1 \text{ кг/см}^2$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ .

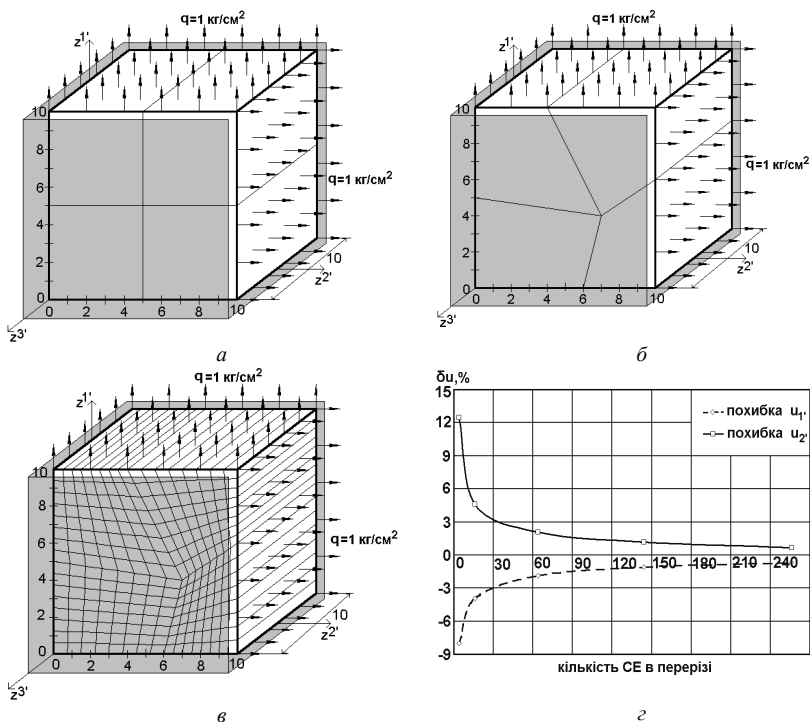


Рис. 4. Тестовий приклад про двовісний розтяг паралелепіпеду:  
 а) дискретна модель з ортогональною сіткою  $CE$ ; б) дискретні моделі тіла з неортогональною (косокутною) сіткою  $CE$ ; в) залежність похибки обчислення переміщень від загальної кількості  $CE$  в поперечному перерізі тіла по відношенню до еталонного розв'язку

В якості еталонного розв'язку використано результат, отриманий для ортогональної сітки (рис. 4,а). Результати, отримані для косокутної сітки (рис. 4,б) з врахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу  $CE$ , повністю співпали з еталонним розв'язком.

Як видно з наведеної залежності похибки обчислення переміщень від загальної кількості СЕ в поперечному перерізі тіла по відношенню до еталонного розв'язку (рис. 4,г), врахування змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ дозволяє отримувати вірогідні результати при значно меншій кількості елементів в площині поперечного перерізу. В даному тестовому прикладі використання розроблених косокутних СЕ дозволило скоротити кількість невідомих більш ніж в 60 разів при збереженні похибки отриманого розв'язку в межах 1%.

**Висновки.** В даній роботі отримані вирази матриці жорсткості (63) і вектору вузлових реакцій (57) неоднорідного косокутного призматичного СЕ з довільними граничними умовами. Ефективність його застосування доведена на тестовому прикладі про двовісний розтяг паралелепіпеда в умовах плоскої деформації – кількість невідомих при розв'язанні задачі скоротилася більш ніж 60 разів. Отже, врахування змінності компонент метричного тензору в поперечному перерізі СЕ дозволяє отримувати вірогідні результати при значно меншій кількості невідомих дискретної скінченоелементної моделі, що в свою чергу дозволяє зменшити обчислювальні витрати на порядок і більше.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Козак А.Л., Рутковский В.А., Сахаров А.С.* Численное моделирование разрушения железобетонных конструкций по методу конечных элементов. – К.: Наукова думка, 1996. – 360 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
4. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.
5. *Голуб В.П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикладная механика. – 2000. – № 3. – С. 31-66.
6. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
7. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1969. – 420 с.
8. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.
9. *Сахаров А.С., Кислюцкий В.Н., Киричевский В.В.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. – 479 с.
10. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учётом жестких смещений. // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып. 24. – с. 147-156.
11. *Сніжко Н.А., Солодей І.І., Овсянніков О.С., Шевченко Ю.В.* Вимушені коливання баштової градирні АЕС під дією вітрового навантаження. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С.92–103.

*Надійшла до редколегії 12.09.2005 р.*