

УДК 539.375

Баженов В.А., д-р техн. наук**Гуляр О.І.**, д-р техн. наук**Піскунов С.О.**, канд. техн. наук**Сахаров О.С.**, д-р техн. наук**Шкриль О.О.**

МЕТОД РЕАКЦІЙ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ J -ІНТЕГРАЛА В ПРОСТОРОВИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ

Виконаний аналіз вірогідності та інваріантності результатів обчислення J -інтеграла Черепанова-Райса в дискретних моделях методу скінченних елементів із використанням величин вузлових реакцій і переміщень при пружнопластичному деформуванні.

Вступ. При наявності пружнопластичних деформацій для оцінки тріщиностійкості просторових тіл найбільшого використання здобув J -інтеграл Черепанова-Райса. Значна частина таких конструкцій являють собою призматичні тіла, ефективним засобом розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла для яких є напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ) [2]. В роботі [3] на основі НМСЕ проведено реалізацію методики обчислення J -інтеграла на основі величин напружень та градієнтів переміщень (метод напружень) для призматичних тіл з поперечними та поздовжніми тріщинами. Аналіз результатів чисельних експериментів виявив, що при пружному деформуванні для певного кола задач (пластина із центральною тріщиною, нескінченне тіло з еліптичною тріщиною, напівнескінченне тіло з напівеліптичною тріщиною) метод напружень дозволяє отримувати вірогідні результати, що задовольняють ознакам фундаментальній властивості інваріантності J -інтеграла – незалежності від контура інтегрування і дорівнювання нулю по замкненому контуру. Розв'язання задачі про згин призматичного тіла із боковою тріщиною виявило тенденцію порушення цих ознак інваріантності – зростання похибок обчислення як власне величини J -інтеграла, так і його значень по замкненому контуру при збільшенні контуру інтегрування. Спроба досягти необхідної точності результатів потребувала значного згущення скінченно-елементної сітки і накладання обмежень на розмір контура інтегрування. В зв'язку з цим була проведена розробка і реалізація нової методики обчислення J -інтеграла, що ґрунтується на використанні для обчислення J -інтеграла величин, що безпосередньо входять в рівняння методу скінченних елементів – вузлових реакцій та переміщень (метод реакцій). Величини J -інтеграла отримані при пружному деформуванні за методом реакцій виявились інваріантними до

контура інтегрування, при цьому відповідна точність результатів була досягнута без додаткового згущення скінченноелементної сітки.

Метою даної роботи є подальше порівняння результатів обчислення J -інтеграла на основі методу напружень і методу реакцій в задачах механіки руйнування при пружнопластичному деформуванні.

1. Метод реакцій. В кожній точці фронту тріщини величина J -інтеграла обчислюється за довільною поверхнею F , що обрана в околі зазначеної точки, охоплює фронт тріщини і має характерний розмір Δ вздовж фронту тріщини [1] (рис.1,а):

$$J_k = \frac{1}{\Delta} \int_F \left(W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) dF, \quad (1)$$

де W – величина повної енергії деформування, в загальному випадку

$$W = \int_0^{\hat{\varepsilon}} \hat{\sigma} \cdot d\hat{\varepsilon}, \quad \hat{\sigma} \text{ – тензор напружень, } \hat{\varepsilon} \text{ – тензор деформацій, при}$$

пружному деформуванні $W = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \varepsilon_{ij}$; \vec{n} – зовнішня нормаль до поверхні інтегрування F ; n_j – компоненти зовнішньої нормалі до контуру інтегрування; u_i – переміщення.

При скінченно-елементному обчисленні J -інтеграла використовується по компонентне подання формули (1) [3], а для виконання інтегрування обирається контур S , який лежить в площині, перпендикулярній до фронту тріщини. В подальшому, так само як і в [3], для обчислення величини J -інтеграла розглядались прямокутні контури, кожна із сторін якого розташована на однаковій відстані, визначеній кількістю $SE N_e$, від вершини тріщини (рис.1,б).

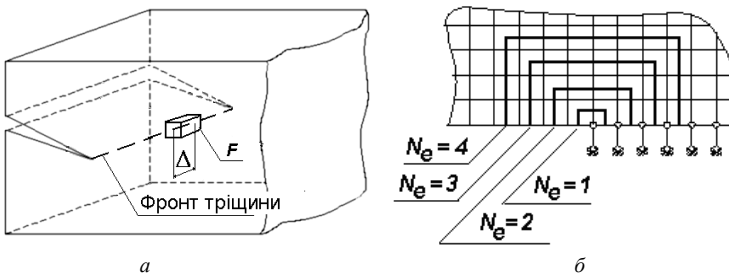


Рис.1. Поверхня інтегрування(а) та контури інтегрування на дискретній моделі (б)

Згідно запропонованого і реалізованого авторами в [3] метода реакцій обчислення J -інтеграла за контуром довільної конфігурації (рис.2,а) здійснюється за формулою:

$$J = J(u, R) = \sum_{j=1}^{N_3} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j^T \{R\}_j - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j \{R\}_j -$$

$$- \sum_{j=1}^{N_1} \left(R^{k'} \frac{(\{u_k\}_3 + \{u_k\}_4) - (\{u_k\}_1 + \{u_k\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_3} \left(R^{k'} \frac{\{u_k\}_4 - \{u_k\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j -$$

$$- \sum_{j=1}^{N_3} \left(R^{k'} \frac{(\{u_k\}_3 + \{u_k\}_4) - (\{u_k\}_1 + \{u_k\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_4} \left(R^{k'} \frac{\{u_k\}_4 - \{u_k\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j,$$

де $\{u\}_j$, $\{R\}_j$ – вектори переміщень і вузлових реакцій кожного СЕ, через які проходить контур: $\{u\}_j = \{\{u_k\}_i\}$, $\{R\}_j = \{\{R_k\}_i\}$; $k=1, 2, 3$ відповідає напрямкам z^1, z^2, z^3 , а $i=1, 2, 3, 4$ відповідає нумерації вузлів в межах СЕ (рис. 2, б).

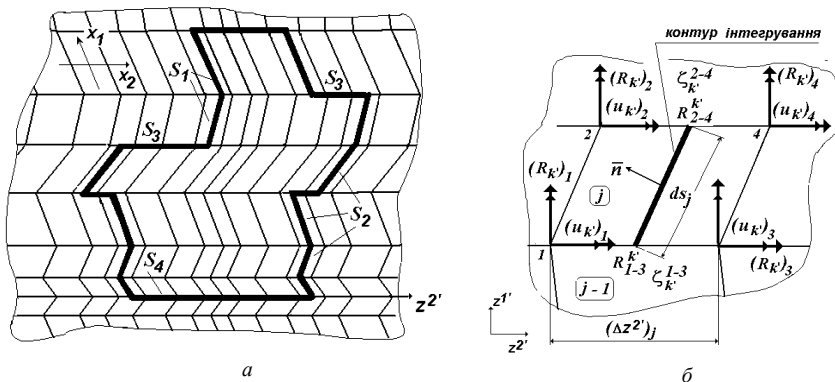


Рис.2. Довільний контур для обчислення J -інтеграла (а), та його фрагмент в межах СЕ (б)

Співставлення результатів, отриманих на основі методів реакцій та напружень проводилось на задачі про пружнопластичне деформування призматичного тіла з боковою тріщиною в просторовій постановці. Відповідна розрахункова схема та дискретна модель показані на рис.3, пружнопластичні характеристики матеріалу відповідають сталі 12Х2МФА [4].

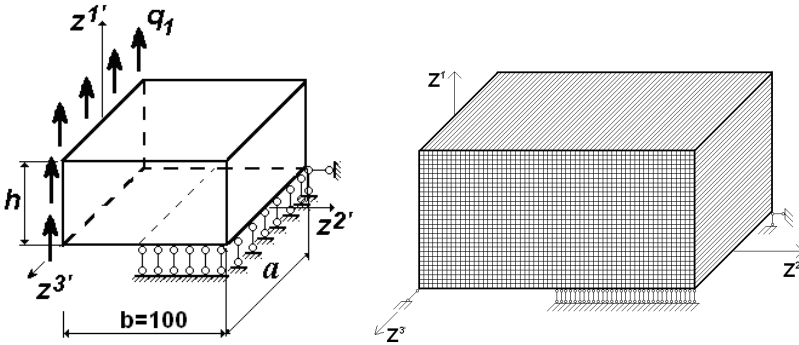


Рис.3. Розрахункова схема (а) та дискретна модель (б) призматичного тіла з боковим надрізом

Для запобігання локальних пластичних деформацій в точках прикладення зосередженого навантаження q , проведена його заміна статично еквівалентним розподіленням по поверхні $z^2 = 0$ навантаженням $q_1 = P/ha$. Виконані дослідження збіжності засвідчили, що в даному випадку для забезпечення вірогідності визначення J -інтеграла за методом реакції достатнім є застосування скінченноелементної сітки розмірністю 30×60 SE.

Аналіз результатів обчислення J -інтеграла, отриманих із застосуванням зазначених розрахункової схеми і дискретної моделі, проведений на всіх стадіях пружнопластичного деформування. Зокрема, розподілення J -інтеграла по товщині призматичного тіла, отримані при пружному деформуванні, при $q_1 = 2800$ кг/см, наведені на рис.4. Як видно, збільшення розмірності дискретної моделі і відповідне зменшення характерних розмірів SE і абсолютних розмірів контуру інтегрування не тільки не дозволяє досягти дорівнювання нулю величини J -інтеграла по замкнутому контуру, а і не дає змоги позбутися його залежності від розмірів контуру при використанні методу напружень. Зокрема, похибка обчислення J -інтеграла за контуром при $N_e = 8$ (контур від вершини тріщини проходить через 8 елементів вздовж z^2) на сітці 30×60 SE, геометричні розміри якого збігаються із розмірами контуру при $N_e = 3$ на сітці 10×20 SE, є такою ж самою. Відмінності результатів, отриманих на різних контурах, не зменшуються із згущенням сітки і набувають максимальних значень на торцевих поверхнях тіла ($z^3 = \pm 25$ мм).

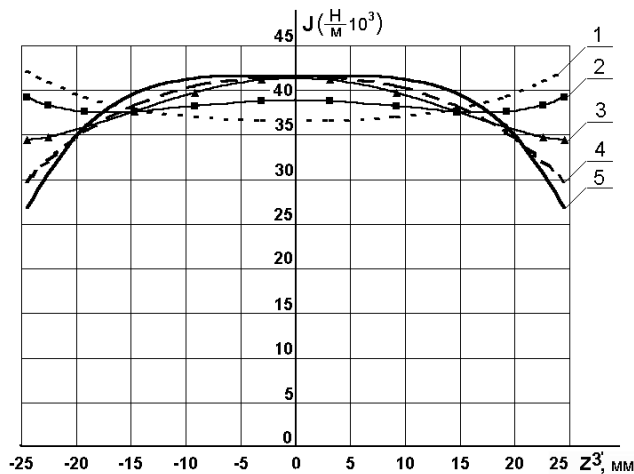


Рис.4. Розподілення J -інтеграла вздовж фронту тріщини, дискретна модель 30x60 SE:

1– 4 – обчислення J -інтеграла із використанням методу напружень: 1– $N_e = 20$; 2– $N_e = 12$; 3– $N_e = 9$; 4– $N_e = 3$;
5– метод реакцій.

Аналіз отриманих розподілень величин J -інтеграла за напрямком z^3 при пружнопластичному деформуванні засвідчив, що із зростанням навантаження і відповідним зростанням рівня деформацій пластичності відмінності величин J -інтеграла, обчислених за методом напружень і реакцій збільшуються. Зокрема, при величині навантаження $q=5000$ кг/см і рівні деформацій пластичності біля 6 %, похибка обчислення величини J -інтеграла є в 2,5 разі більшою ніж при пружному деформуванні (рис.5), причому ця різниця збільшується із збільшенням контуру. Таким чином, результати, отримані при пружному деформуванні не дозволяють провести прогнозування рівня похибки величин J -інтеграла при наявності деформацій пластичності, що підкреслює необхідність використання методу реакцій, який дозволяє отримувати інваріантні величини J -інтеграла.

Змінення величин J -інтеграла, обчислених із використанням різних контурів за методом напружень проілюстроване залежностями похибок J -інтеграла на торцях тіла відносно еталонного розв'язку (результати методу реакцій) від розмірів контура і рівня деформацій пластичності. Як видно, при збільшенні розмірів контура спостерігається зростання похибки на всіх стадіях пластичного деформування (рис.6).

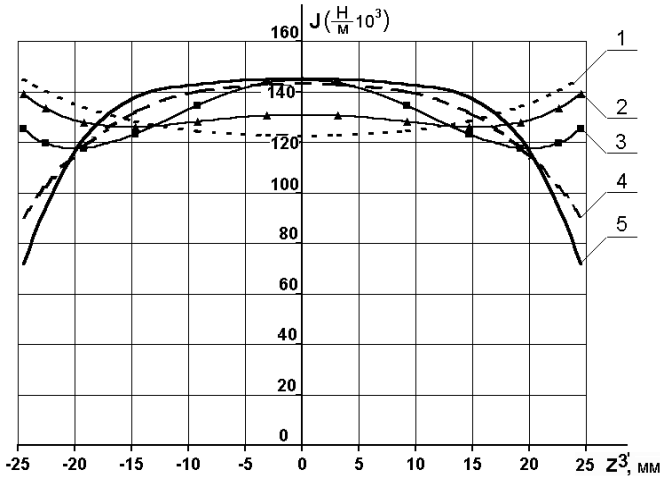


Рис.5. Розподілення J -інтеграла вздовж фронту тріщини при пружнопластичному деформуванні: 1–4 – метод напружень:

1 – $N_e = 20$; 2 – $N_e = 12$; 3 – $N_e = 9$; 4 – $N_e = 3$;

5 – метод реакцій

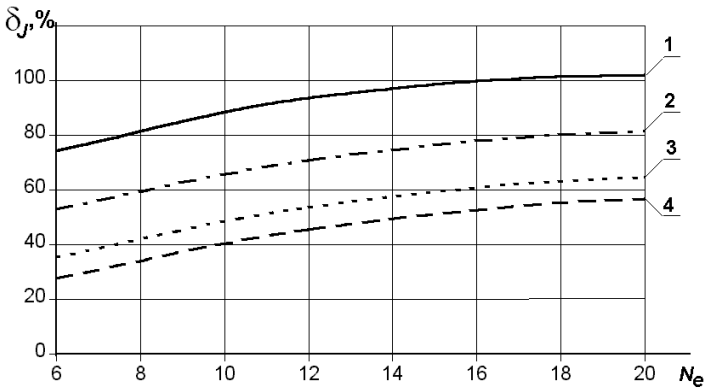


Рис.6. Залежність похибки обчислення J -інтеграла при різних рівнях навантажень від розмірів контура інтегрування:

1 – $q = 5000$; 2 – $q = 4000$; 3 – $q = 3000$; 4 – $q = 2800$ кг/см.

Похибка обчислення J -інтеграла зростає також і при збільшенні рівня максимальних пластичних деформацій ε_p (рис.7). Необхідно зазначити, що отриманий в даній задачі рівень деформації пластичності (біля 6%) є

досить невеликим, але навіть в цьому випадку величина похибки перевищує 100%.

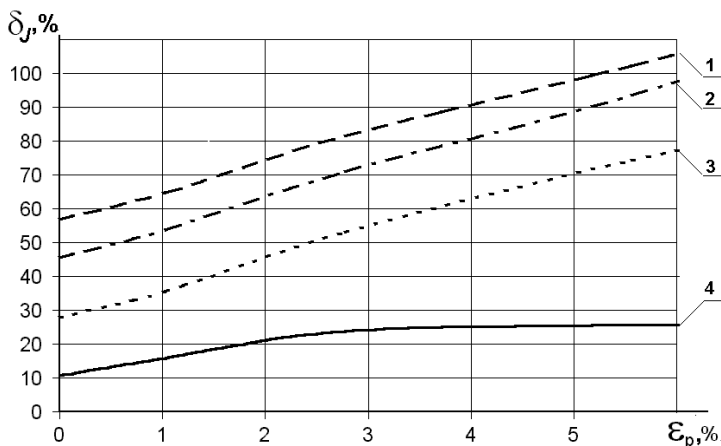


Рис.7. Залежність похибки обчислення J -інтеграла від рівня деформацій пластичності для різних контурів інтегрування:

1 - $N_e = 20$; 2 - $N_e = 12$; 3 - $N_e = 9$; 4 - $N_e = 3$.

Для більш детального аналізу виконання умов незалежності величин J -інтеграла від шляху інтегрування, досліджувалось дорівнювання нулю інтеграла, обчисленого із використанням величин напружень і градієнтів переміщень по замкнутому контуру. Конфігурація обраного замкнутого контура забезпечує виключення з розгляду привершинної зони пластичності. Внутрішні межі контуру обрані на відстані трьох елементів від вершини тріщини, а зовнішні межі, що визначають в даному випадку величину N_e , змінювались від 6 до 20 елементів. Такий контур при $N_e=6$, побудований на фрагменті дискретної моделі, показаний на рис.8.

Похибка визначення J -інтеграла по замкнутому контуру, обчислена відносно величини J -інтеграла отриманого методом реакцій, також зростає як при збільшенні контуру інтегрування (рис.8), так і при збільшенні рівня деформацій пластичності (рис.9).

Таким чином, в умовах пружнопластичного деформування похибка визначення J -інтеграла за методом напружень при змінні контура інтегрування є суттєво більшою порівняно з пружною постановкою задачі і зростає при збільшенні деформацій пластичності. У випадку нелінійного деформування зменшення контура інтегрування є обмеженим [1], що може призвести до неможливості отримання коректних результатів.

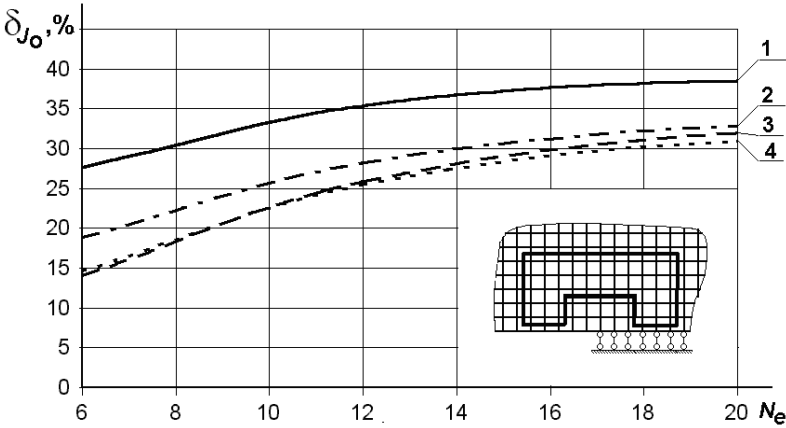


Рис.8. Залежність похибки обчислення J -інтеграла по замкненому контуру при різних рівнях навантажень від розмірів контура інтегрування:
1 – $q = 5000$; 2 – $q = 4000$; 3 – $q = 3000$; 4 – $q = 2800$ кг/см.

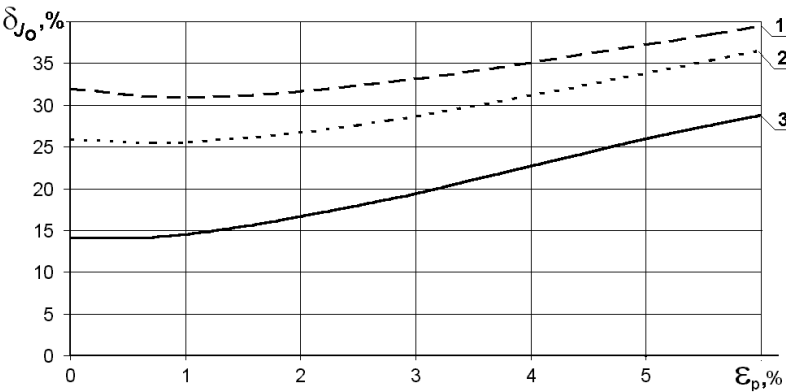


Рис. 9. Залежність похибки обчислення J -інтеграла по замкненому контуру від рівня деформацій пластичності для різних контурів інтегрування:
1 – $N_e = 20$; 2 – $N_e = 12$; 3 – $N_e = 9$.

Із використанням методу реакцій було проведено розв'язання задачі про деформування компактного зразка (рис.10), виготовленого зі сталі 12Х2МФА, для якої $E = 2.05 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$. Закон пластичного деформування має наступний вигляд [4]:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_m} = 1 + 0.645(\bar{\varepsilon}_p)^{0.388}, \quad \sigma_m = 637 \text{ МПа}.$$

Традиційно розрахунок компактного зразка здійснюється в умовах плоскої деформації. Дискретні моделі, розроблені з урахуванням симетрії для половини зразка містять 288 вузлів (рис.11,а) і 625 вузлів (рис.11,б). Значення J -інтеграла, обчислені на цих СЕ сітках за умов пружного деформування компактного зразка відрізняються в межах 1%, що свідчить про досягнення збіжності за сітковими моделями.

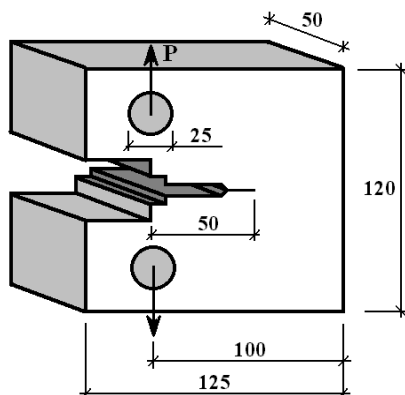


Рис.10. Компактний зразок

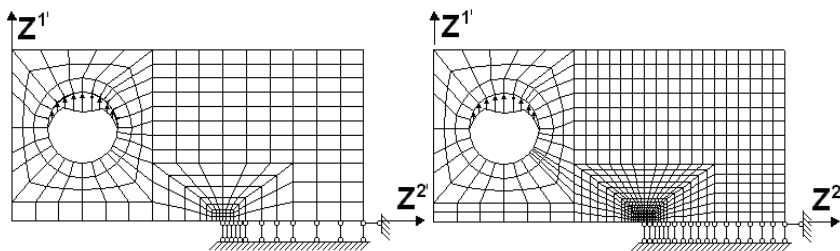


Рис. 11. Дискретні моделі компактного зразка

Отримані значення J -інтеграла при різних величинах навантажень збігаються з наведеними в [4], що підтверджує вірогідність застосованого алгоритму визначення J -інтеграла в задачах пластичності (рис.12).

Зважаючи на те, що товщина компактного зразка обмежена, його розрахунок потрібно виконувати в просторовій постановці. Дискретна модель НМСЕ, що побудована із використанням неоднорідних призматичних СЕ, наведена на рис.13. Розмірність СЕ моделі в поперечному перерізі визначена на основі дослідження збіжності в двовимірній постановці.

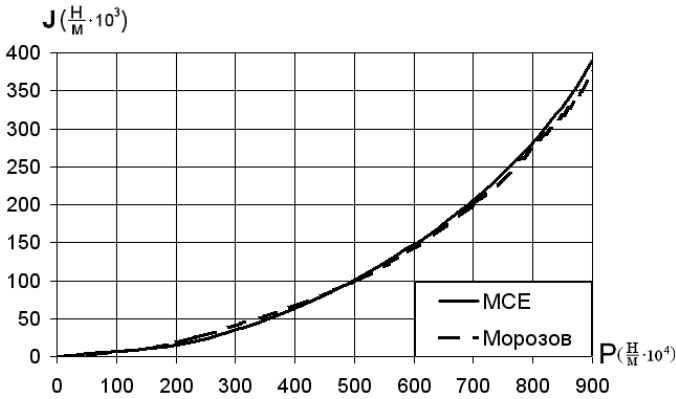
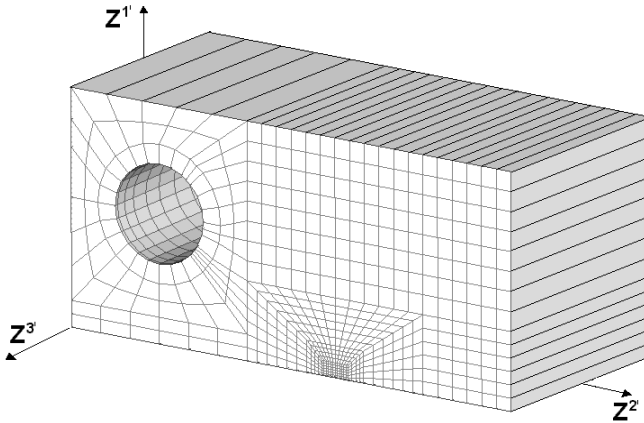
Рис. 12. Результати визначення J -інтеграла в двовимірній постановці

Рис. 13. Дискретна модель НМСЕ для компактного зразка

Збіжність розв'язку НМСЕ при пружному деформуванні досягається при використанні в розкладі переміщень 12 гармонік. Проведене порівняння результатів обчислення параметрів НДС, отриманих в двовимірній і тривимірній постановках засвідчило, що НДС є суттєво просторовим. Для ілюстрації на рис.14, 15 наведено розподілення напружень $\sigma^{33'}$ та переміщень $U_{1'}$ в СЕ, який розташований над вершиною тріщини.

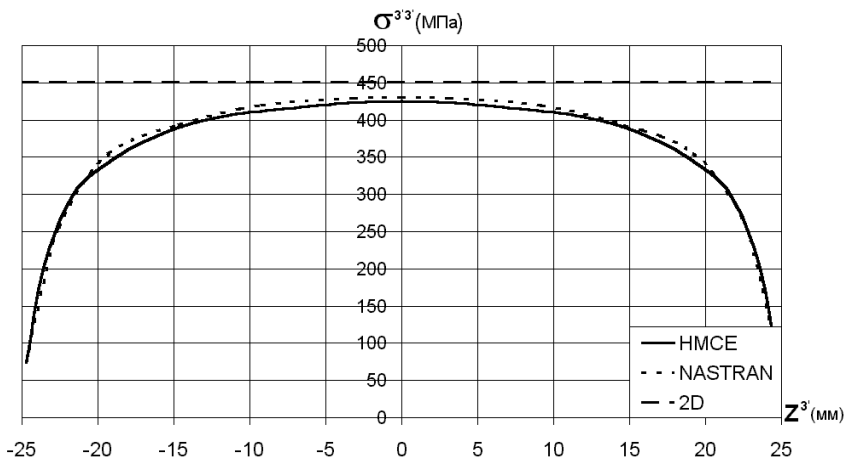


Рис.14. Розподіл напружень по товщині зразка

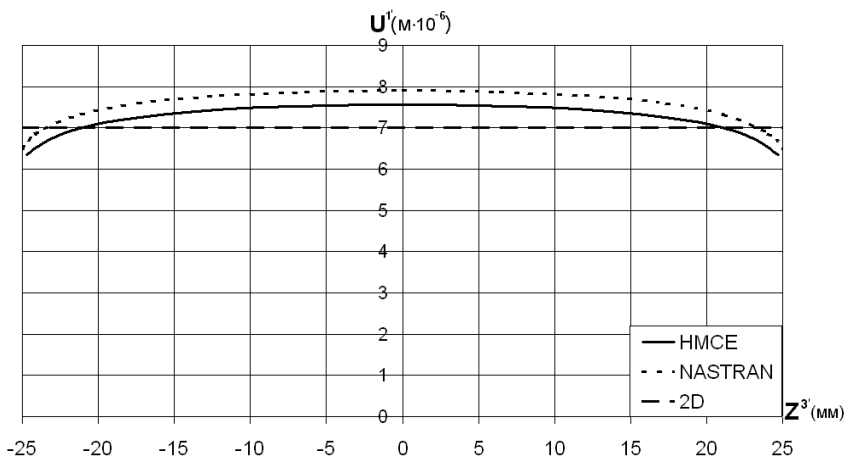


Рис.15. Розподіл переміщень по товщині зразка

Як можна побачити, напруження всередині (при $z^3 = 0$) і на бічних поверхнях зразка (при $z^3 = \pm 25$ мм) значно відрізняються між собою, при цьому напруження отримані в двовимірній постановці є більшими. Вірогідність усіх результатів підтверджена шляхом розв'язання задачі із використанням програмного комплексу NASTRAN. Слід зазначити, що

отримання розв'язку задачі на цьому комплексі потребує на порядок більших обчислювальних витрат в порівнянні з НМСЕ.

Відповідно до просторового характеру НДС розподіл J -інтеграла по товщині зразка є також змінним. Аналіз збіжності величин J -інтеграла, отриманих на основі методу реакцій засвідчив, що збіжність розподілу J -інтеграла по товщині зразка досягається при використанні 12 гармонік (рис.16).

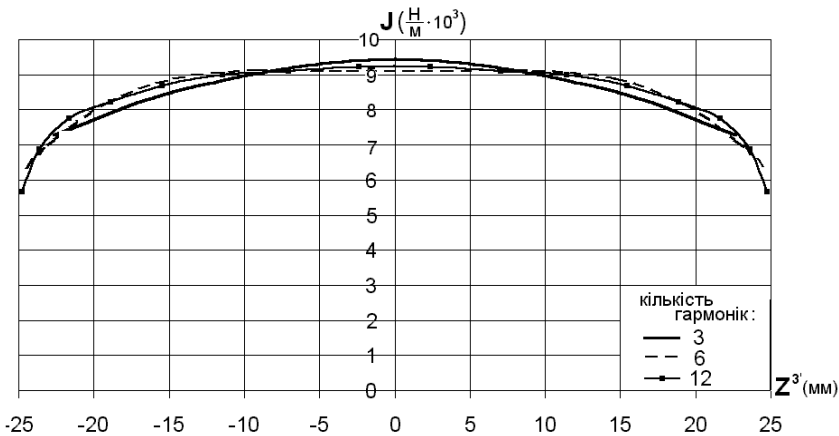


Рис.16. Збіжність J -інтеграла за кількістю гармонік

При пружному деформуванні значення J -інтеграла всередині зразка є більшим, а на бічних поверхнях – меншим, ніж отримане в двовимірній постановці (рис.17). Розподіл величин J -інтеграла, що також були обчислені за величинами вузлових реакцій та переміщень, отриманих в програмному комплексі NASTRAN, співпадає з результатами отриманими із застосуванням НМСЕ.

Подальший розв'язок задачі при пружнопластичному деформуванні засвідчив, що із збільшенням рівня пластичних деформацій різниця між значеннями J -інтеграла на бічних поверхнях та в центрі збільшується (рис.18).

Різниця між значеннями J -інтеграла, обчисленими в двовимірній і просторовій постановках також збільшується із зростанням рівня деформацій пластичності (рис.19): цей висновок ілюстрований отриманими розподіленнями абсолютних величин J -інтеграла по товщині компактного зразка при різних рівнях навантаження (рис.19), а також залежністю різниці між величинами J -інтеграла в просторовій і

двовимірній постановках, віднесених до відповідних значень J -інтеграла в просторовій постановці (рис.20).

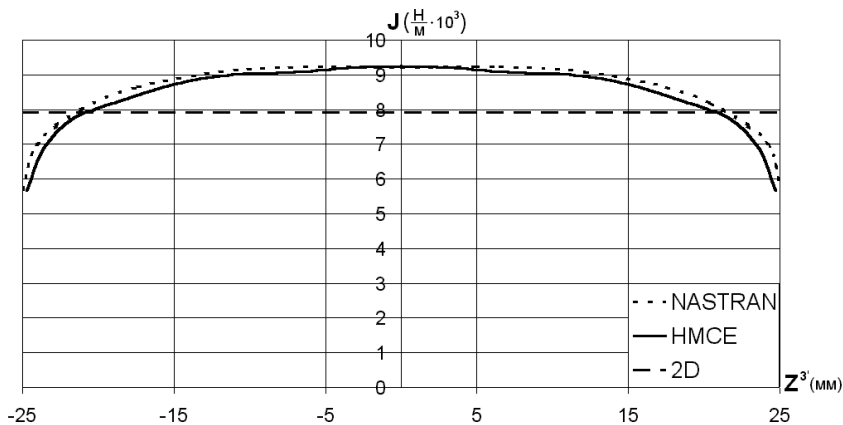


Рис.17. Розподіл величин J -інтеграла, обчислених за реакціями та переміщеннями, визначеними на різних СЕ базах

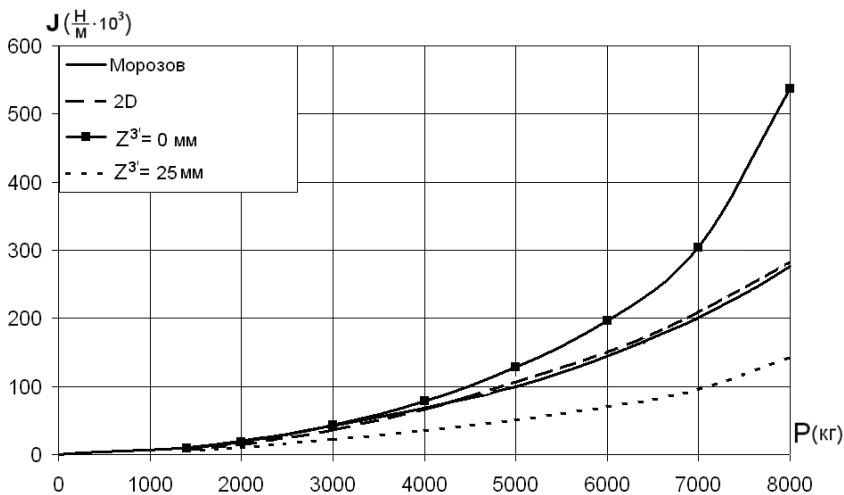


Рис.18. Залежність величин J -інтеграла від прикладеного навантаження

Найбільші відмінності (більш ніж в два рази) спостерігаються в серединній частині зразка. Необхідно відзначити, що величини J -інтеграла, отримані в просторовій постановці є більшими, ніж в двовимірній постановці, що вказує на недопустимість використання

результатів розрахунку в двовимірній постановці для оцінки несучої здатності просторових об'єктів.

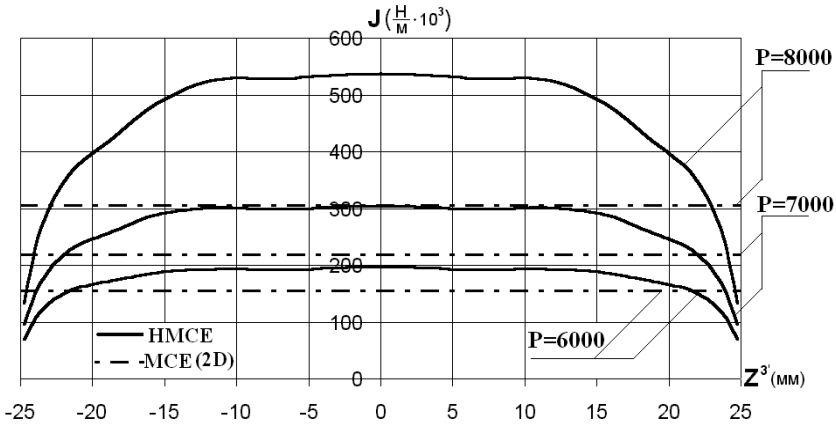


Рис.19. Розподіл J -інтеграла вздовж фронту тріщини при зростанні рівня навантаження

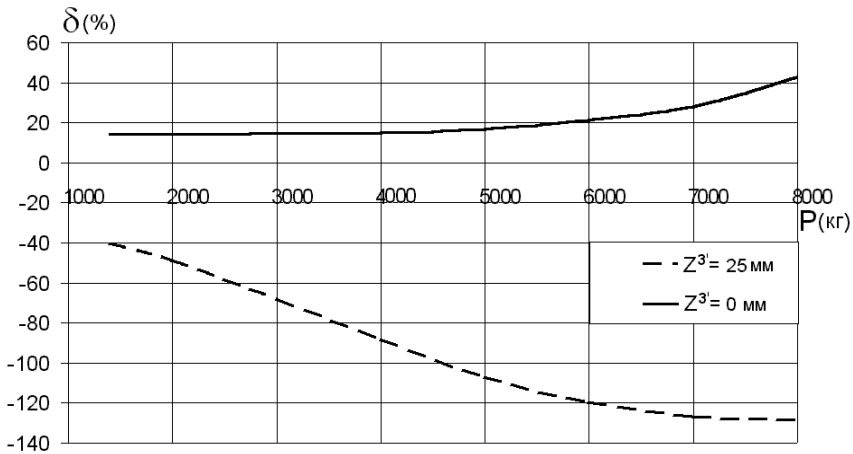


Рис.20. Відносна різниця результатів обчислення значень J -інтеграла в двовимірній і просторовій постановках

Таким чином, обчислення J -інтеграла за методом напружень може виявитись непридатним в просторових нелінійних задачах механіки руйнування. В той же час, метод реакцій забезпечує збереження

фундаментальної властивості інваріантності J -інтеграла як при пружному так і при пружнопластичному деформуванні.

Отримані результати розв'язання задачі про деформування компактного зразка виявили значні відмінності величин J -інтеграла, отриманих в просторовій і традиційно використовуваної для цієї задачі двовимірній постановках. Відмінності результатів двовимірного та тривимірного розрахунків можуть сягати більше 120%. Таким чином, для вірогідного визначення параметрів нелінійної механіки руйнування необхідним є дослідження деформування таких задач в тривимірній постановці.

1. *Атдури С.* Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О.* Особливості визначення J -інтеграла для дискретних моделей метода скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд.– К.: КНУБА, 2005.- Вип. 77.- С. 43-64.
4. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука. – 1980. – 256 с.

Надійшла до редколегії 21.11.2006 р.