

Формоутворення каркасів технічних форм, заданих на площині неявними функціями

Володимир Скочко

Київський національний університет будівництва і архітектури
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037
vladimir.and.friends@gmail.com, orcid.org/0000-0002-1709-2621

Рукопис отримано 04.09.2017 та після перегляду прийнято до публікації 05.10.2017
DOI: 10.26884/1707.1101

Анотація. При проектуванні форм робочих поверхонь машин і механізмів, технологічного устаткування, а також складних будівельних конструкцій, що піддаються впливу зовнішніх сил, інженери і дослідники вдаються до використання фізико-математичних методів отримання функцій відповідних форм. Дуже часто функції таких форм будуються на основі аналізу кінематики руху цілого комплексу конструктивних елементів робочого обладнання або на основі розв'язання задач системної оптимізації, що базуються на пошуку умовних екстремумів. В результаті, одержана функція приймає неявну форму, а процес побудови її графіку представляє собою виділення окремих ізоліній поля на координатній площині.

В роботі розглянуто ефективність двох способів побудови дискретних образів функцій, заданих на площині в неявній формі. Перший – передбачає комбіноване використання методу скінченних різниць та формул для знаходження похідних неявних функцій диференціальної геометрії. Другий спосіб передбачає реалізацію процесу формоутворення дискретного аналога моделі фізичної сітчастої конструкції з подальшим управлінням формою цієї моделі для переміщення її вузлів в точки, що задовольняють заданій неявній функції. Наведено приклади використання обох підходів з порівнянням точності інцидентності координат отриманих дискретних моделей графіку досліджуваної неявної функції. Проаналізовано переваги та недоліки запропонованих підходів.

Ключові слова: формоутворення, дискретний образ, неявні функції, чисельні методи, скінченні різниці, диференціальна геометрія, параметричні рівняння.



Володимир Скочко
доцент кафедри архітектурних
конструкцій
к.т.н., доцент

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Методи побудови функцій форм технічних поверхонь та обводів (кривих) беруть свій початок в різних розділах фізики і математики, таких як теоретична механіка, векторний аналіз, теорія поля, диференціальна геометрія (як, наприклад, в разі пошуку рівнянь сімейства огинаючих ліній), топологія, дискретна геометрія і т.д., що є наслідком необхідності максимально точно врахувати фізичні особливості подальшої роботи отриманої форми в умовах експлуатації. Крім того, часто шукані форми є наслідком специфічної кінематики руху складних багатокомпонентних конструкцій, а їх функції виводяться на основі параметричного аналізу з подальшим зв'язуванням або вилученням окремих параметрів, в тому числі натуральних.

В результаті, отримані функції нерідко записуються в неявній формі, що ускладнює процес подальшої побудови їх графіків і дослідження їх властивостей. Знаходження графіків неявних функцій в основному зводиться до побудови їх дискретного кар-

каса у вигляді ряду точок, координати яких з тією або іншою точністю задовольняють досліджуваному рівнянню. Згадана точність, а також відстані між точками отриманого каркаса, відіграють велику роль, так як вони впливають на результуючу точність обчислення диференціальних характеристик шуканої поверхні або кривої, одержуваних в даному випадку переважно з використанням апроксимаційних співвідношень (наприклад, скінченних різниць або поділень різниць). Однак, точність обчислення даних характеристик дуже важлива в наслідок того, що шукані дискретні образи часто не відображають фізичних особливостей роботи самих конструкцій, описуваних досліджуваними неявними функціями, а значить про властивості образів можна судити виключно за характером розподілу їх точок. При цьому не варто забувати, що конструкції, що вимагають застосування методів формоутворення, працюють в більшості випадків, перебуваючи під впливом великих навантажень, і передбачають високий рівень відповідальності інженерів і дослідників. Дана проблема є досить поширеною в рамках вирішення завдань архітектурного формоутворення.

АНАЛІЗ ПОПЕРЕДНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Якщо мова йде про задачу отримання плоских кривих (наприклад, плоских перетинів оболонок покриття архітектурних конструкцій), то найпростішим виходом для візуалізації і подальшого аналізу форми досліджуваної неявної функції є застосування одного з чисельних алгоритмів, що дозволяють шляхом послідовного звуження зони пошуку знаходити окремі точки кривої в заданій області [1 – 5]. Такі алгоритми можуть вимагати значної продуктивності комп'ютерної техніки і можуть не привести до шуканого рішення в разі невдалого вибору зони пошуку. Тому, краще використовувати або чисельні методи, що дозволяють визначати форму шуканої кривої при точному заданні крайових і початкових умов, або один з методів формоутворення дискретної геометрії. В роботі [6] було проде-

монстровано алгоритм побудови дискретного каркасу кривої довільної досліджуваної неявної функції:

$$\zeta(x, y) = 0 \quad (1)$$

з використанням методу кінцевих різниць, а також фундаментальних співвідношень диференціальної геометрії для знаходження часткових похідних від неявних функцій. Алгоритм передбачає побудову комбінованих різницевих рівнянь з похідними 1-го і 2-го порядку від функції $\zeta(x, y)$ з подальшим вирішенням системи отриманих рівнянь відносно координат умовно вільних вузлів (координати яких не є крайовими умовами). Дані рівняння мають наступну форму:

1. Для знаходження дискретного образу з заданим кроком по осі абсцис (Ox):

$$\begin{aligned} & y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1} = \\ & = h^2 \cdot (2 \cdot \zeta'_x(x, y) \cdot \zeta'_y(x, y) \cdot \zeta''_{xy}(x, y) - \\ & - (\zeta'_y(x, y))^2 \cdot \zeta''_{xx}(x, y) - \\ & - (\zeta'_x(x, y))^2 \cdot \zeta''_{yy}(x, y)) / (\zeta'_y(x, y))^3, \text{ чи:} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & b \cdot y_{i-1} + a \cdot y_i + c \cdot y_{i+1} = \\ & = (2 \cdot \zeta'_x(x, y) \cdot \zeta'_y(x, y) \cdot \zeta''_{xy}(x, y) - \\ & - (\zeta'_y(x, y))^2 \cdot \zeta''_{xx}(x, y) - \\ & - (\zeta'_x(x, y))^2 \cdot \zeta''_{yy}(x, y)) / (\zeta'_y(x, y))^3, \end{aligned} \quad (3)$$

$$b = 2 / [\Delta x_{i-1,i} \cdot (\Delta x_{i-1,i} + \Delta x_{i,i+1})], \quad (4)$$

$$a = -2 / (\Delta x_{i-1,i} \cdot \Delta x_{i,i+1}), \quad (5)$$

$$c = 2 / [\Delta x_{i,i+1} \cdot (\Delta x_{i-1,i} + \Delta x_{i,i+1})]. \quad (6)$$

Рівняння (2) призначене для випадку, коли обрано рівномірний крок h_x по осі Ox , тоді як рівняння (3) адаптоване для довільного кроку вузлів.

2. Для знаходження дискретного образу з заданим кроком по осі ординат (Oy):

$$\begin{aligned} & x_{i-1} - 2 \cdot x_i + x_{i+1} = \\ & = h_y^2 \cdot (2 \cdot \zeta'_y(x, y) \cdot \zeta'_x(x, y) \cdot \zeta''_{xy}(x, y) - \\ & - (\zeta'_x(x, y))^2 \cdot \zeta''_{yy}(x, y) - \end{aligned} \quad (7)$$

$-(\zeta'_y(x, y))^2 \cdot \zeta''_{xx}(x, y)) / (\zeta'_x(x, y))^3$, чи:

$$e \cdot x_{i-1} + d \cdot x_i + g \cdot x_{i+1} =$$

$$= (2 \cdot \zeta'_y(x, y) \cdot \zeta'_x(x, y) \cdot \zeta''_{xy}(x, y) -$$

$$- (\zeta'_x(x, y))^2 \cdot \zeta''_{yy}(x, y) -$$

$$(\zeta'_y(x, y))^2 \cdot \zeta''_{xx}(x, y)) / (\zeta'_x(x, y))^3, \quad (8)$$

$$e = 2 / [4y_{i-1,i} \cdot (4y_{i-1,i} + 4y_{i,i+1})], \quad (9)$$

$$d = -2 / (4y_{i-1,i} \cdot 4y_{i,i+1}), \quad (10)$$

$$g = 2 / [4y_{i,i+1} \cdot (4y_{i-1,i} + 4y_{i,i+1})]. \quad (11)$$

Рівняння (7) призначене для випадку, коли обрано рівномірний крок h_y по осі Oy , тоді як рівняння (8) адаптоване для довільного кроку вузлів.

У рівняннях (2), (3), (7) і (8) праві їх складові мають наступний сенс:

$$\zeta'_x(x, y) = \partial \zeta(x, y) / \partial x, \quad (12)$$

$$\zeta''_{xx}(x, y) = \partial^2 \zeta(x, y) / \partial x^2, \quad (13)$$

$$\zeta'_y(x, y) = \partial \zeta(x, y) / \partial y, \quad (14)$$

$$\zeta''_{yy}(x, y) = \partial^2 \zeta(x, y) / \partial y^2, \quad (15)$$

$$\zeta''_{xy}(x, y) = \partial^2 \zeta(x, y) / \partial x \partial y. \quad (16)$$

Початкові координати вузлів пропонуються обчислювати, вирішуючи в першому наближенні нижче наведені рівняння:

1. Для подальшого вирішення системи рівнянь типу (2) і (3) відповідно:

$$y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1} = 0, \quad (17)$$

$$b \cdot y_{i-1} + a \cdot y_i + c \cdot y_{i+1} = 0. \quad (18)$$

2. Для подальшого вирішення системи рівнянь типу (7) і (8) відповідно:

$$x_{i-1} - 2 \cdot x_i + x_{i+1} = 0, \quad (19)$$

$$e \cdot x_{i-1} + d \cdot x_i + g \cdot x_{i+1} = 0. \quad (20)$$

Такі попередні розрахунки початкових координат необхідні внаслідок того, що рівняння (2), (3), (7) і (8) можуть мати високу нелінійність, а права половина цих рівнянь з фізичної точки зору являє собою

векторне поле, в якому в процесі ітераційного числення рухаються до шуканих положень вільні вузли дискретної моделі. Тому, при невдалому заданні початкових координат вільних вузлів (тобто всіх, крім першого і останнього, які задаються в обов'язковому порядку і служать в якості крайових умов моделювання), відповідні вузли можуть опинитися у віддаленій області, де поле впливу має різкий або несприятливий характер. У цьому випадку, на кожній наступній ітерації вільні вузли можуть опинятися в інших не менш віддалених областях досліджуваної області, або навіть за її межами. Як результат, ітераційний процес може й зовсім не зійтись.

Ще одним методом побудови дискретного каркасу плоскої кривої, представленим в роботі [6], було моделювання дискретних образів, які є аналогами фізичних сітчастих безмоментних структур, з використанням параметричних рівнянь стану зв'язків (стрижнів) моделей для системного управління їх формою. Метод передбачає початкове формоутворення дискретного образу, шляхом побудови і рішення рівнянь рівноваги його вільних вузлів, що мають вигляд:

$$\sum_{j=1}^n (s_j - s_i) \cdot \mathbf{R}_{i,j} + \mathbf{S}_{s_i} = 0. \quad (21)$$

Тут: s – узагальнене позначення координат (x і y); n – кількість вільних (незафіксованих) вузлів моделі; $\mathbf{S}_{s_i}$ – проекції векторів вузлових сил $\mathbf{S}_i$; $\mathbf{R}_{i,j}$ – параметри умовної жорсткості зв'язків, що є співвідношеннями абсолютних величин поздовжніх зусиль в цих зв'язках $R_{i,j}$ до їх довжин $\delta_{i,j}$:

$$\mathbf{R}_{i,j} = R_{i,j} / \delta_{i,j}, \quad (22)$$

$$\delta_{i,j} = ((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2)^{1/2}. \quad (23)$$

Після первинного формоутворення конструкції шляхом вирішення системи рівнянь типу (21) відносно координат вільних вузлів, необхідно шляхом управління розподілом параметрів жорсткості (а значить і внутрішніх зусиль) в зв'язках конструкції, помі-

стити обрані її вузли в точки на площині, що задовольняють досліджуваній неявній функції $\zeta(x,y)$. Для цього необхідно скласти і вирішити систему параметричних рівнянь стану всіх стрижнів. Відповідні рівняння можуть бути записані в такій формі:

1) для зв'язків, що з'єднують два вільних вузла моделі (S_a і S_b):

$$\sum_{i=1}^{m-1} \delta_{a,i}^2 \cdot \mathbf{x}_{a,i} + \chi \cdot \delta_{a,b}^2 \cdot \mathbf{x}_{a,b} + \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{b,j}^2 \cdot \mathbf{x}_{b,j} - (\varphi_a + \varphi_b) + B_{a,b} = 0 ; \quad (24)$$

2) для зв'язків, що з'єднують один вільний і один нерухомий вузли моделі (S_a і S_{fix}):

$$\sum_{i=1}^{m-1} \delta_{a,i}^2 \cdot \mathbf{x}_{a,i} + \chi \cdot \delta_{a,fix}^2 \cdot \mathbf{x}_{a,fix} - \varphi_a + (R_{x,fix} \cdot x_{fix} + R_{y,fix} \cdot y_{fix}) + B_{a,fix} = 0 , \quad (25)$$

де m та n – кількість вузлів, сполучених з a -м та b -м вузлами; χ – деяка константа ($\chi \geq 0$), величина якої обумовлена топологічними особливостями моделі; φ_a та φ_b – вузлові значення скалярного потенціалу (поля досліджуваної неявної функції); R_{fix} – величини зусиль у зв'язках, що з'єднуються з шарнірними опорами; $B_{a,b}$ та $B_{a,fix}$ – загальні операційні константи інтегрування.

Функція скалярного потенціалу при даній постановці задачі повинна відповідати досліджуваній неявній функції:

$$\varphi_i = \varphi(x_i, y_i) = \zeta(x_i, y_i) , \quad (26)$$

а вектори вузлових навантажень $\bar{\mathbf{Z}}$ можуть знаходитися в градієнтній залежності від потенціалу φ :

$$\bar{\mathbf{Z}} = \nabla \varphi = (\partial \varphi / \partial x) \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + (\partial \varphi / \partial y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_y . \quad (27)$$

При співпадінні вільних вузлів з графіком функції $\zeta(x,y)$, координати цих вузлів будуть задовольняти виразу (1), а значить, очікуваними значеннями вузлових потенціалів будуть нулі: $\varphi_i = 0$.

В [7] було показано, що вирішення зада-

чі формоутворення і коригування відповідної сітчастої конструкції в матричній формі має такий вигляд:

$$[s^p] = [\mathbf{x}^{p-1}]^{-1} \cdot (-[g^{p-1}] - [\mathbf{Z}^p]) , \quad (28)$$

$$\{\mathbf{x}^p\} = \left[(\delta^p)^2 \right]^{-1} \cdot (\{\varphi'^p\} - \{\varphi^p\} + \left[(\delta^p)^2 \right] \cdot \{\mathbf{x}^{p-1}\}) . \quad (29)$$

Тут: $[s]$ – матриця координат (розмірністю $k \times 2$, де k – кількість вільних вузлів системи); $[g]$ – матриця крайових умов (розмірністю $k \times 2$); $[\mathbf{Z}]$ – матриця зовнішніх впливів (розмірністю $k \times 2$); $[\mathbf{x}]$ – матриця параметрів умовної жорсткості сітчастої конструкції (розмірністю $k \times k$); $\{\mathbf{x}\}$ – вектор-стовпець параметрів умовної жорсткості сітчастої конструкції; $[\delta^2]$ – матриця геометричних параметрів сітчастої конструкції (розмірністю $h \times h$, де h – кількість зв'язків моделі); $\{\varphi\}$ – вектор-стовпець вузлових показників скалярного потенціалу; $\{\varphi'\}$ – вектор-стовпець очікуваних вузлових показників скалярного потенціалу; p – індекс, що відповідає поточному кроку ітераційного числення.

Системні рішення (28) і (29) повинні виконуватися послідовно і циклічно, реалізуючи ітераційне числення. При цьому система (28) може мати високу нелінійність, а система (29) – складатися з лінійних (в більшості випадків) рівнянь.

ОСНОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо приклад використання обох вище згаданих способів отримання дискретних образів на практиці. Для того, щоб мати чітке уявлення про вигляд і особливості поведінки досліджуваної кривої скористаємося елементарною функцією квадратної параболи:

$$y(x) = x^2 . \quad (30)$$

Приведемо цю функцію до неявної форми, записавши її в наступному вигляді:

$$\zeta(x, y) = y - x^2 = 0. \quad (31)$$

Почнемо з другого способу, заснованого на розв'язанні параметричних рівнянь. Для цього задаємося топологічною інформацією щодо майбутнього дискретного образ. Нехай образ складається з 7-ми вільних вузлів та 16-ти нерухомих – базових – вузлів, що з'єднуються між собою 22-ма зв'язками в порядку, показаному на Рис.1, а.

В даному випадку, лише вільні вузли дискретної кривої будуть після завершення процесу коригування інцидентними шуканій кривій неявної функції. При цьому, очевидно (як було показано в [6]), сама модель не є прообразом лінії, кожен вузол якої сполучається виключно з наступним по порядку. Запропонована модель топо-

гічно еквівалентна складній багатокомпонентній стрижневій конструкції, кожен вільний вузол якої з'єднується з чотирма сусідніми вузлами (як вільними, так і фіксованими), дозволяючи розширити зону пошуку шуканих точок кривої неявної функції за межами розташування початкового образу. Справа в тому, що, будучи прообразом реальної механічної конструкції, навантаженої зовнішніми силами, що мають польовий функціональний характер і змінюють напрямок і величину в кожній точці, модель просто не зможе в разі відповідності елементарному ланцюгу досягти стану статичної рівноваги. У той же час, будучи геометрично незмінною, модель легко врівноважиться під впливом практично будь-яких зовнішніх навантажень.

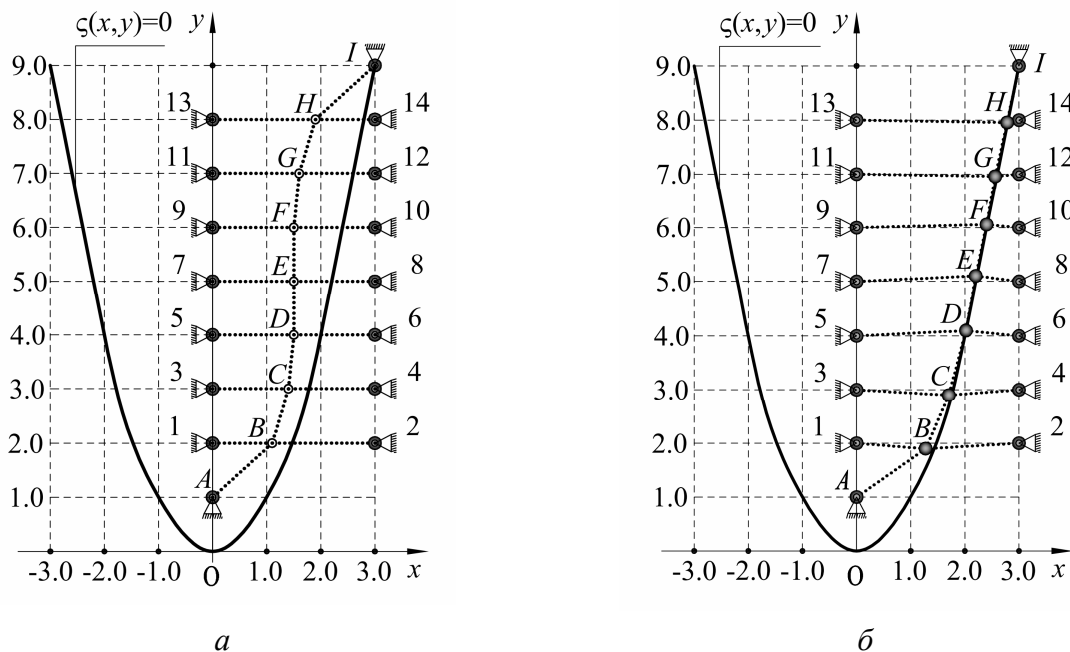


Рис.1. Побудова дискретного образу кривої неявну функції з використанням параметричних рівнянь типу (24) і (25): *а* – дискретний образ досліджуваної функції на першому етапі моделювання (топологічна схема); *б* – дискретний образ досліджуваної функції після завершення процесу коригування.

Умовні позначення (тут і надалі): ——— – неперервний графік неявної функції; – дискретний образ графіка неявної функції; ● і ○ – вільні вузли дискретного образу в початковій та результуючій формах відповідно; ● – базові (фіксовані) вузли дискретного образу

Fig.1. The construction of a discrete image of curved line of an implicit function using parametric equations of the types (24) and (25): *a* – the discrete image of the function on the first stage (the topological scheme); *b* – the discrete image of the function after the correction process. Symbols (here and below): ——— – continuous graph of implicit function; – discrete image of the graph of implicit function; ● and ○ – free nodes of the discrete image in the initial and the resulting forms; ● – basic (fixed) nodes of a discrete image

По-перше, складемо систему рівнянь рівноваги типу (21) для всіх вільних вузлів представленої на Рис.1 моделі. Для цього визначимо форму векторного поля впливів відповідно до формули (27). В результаті одержимо вираз (32).

З урахуванням формули (32) система

статичної рівноваги усіх вільних вузлів, складена за аналогом рівнянь типу (21), матиме вигляд (33) – (46).

По-друге, складемо систему параметричних рівнянь типу (24) і (25) для всіх стрижнів (ланок) моделі. Дана система буде мати вигляд (47) – (58).

$$\bar{\mathbf{z}} = (\partial(y - x^2)/\partial x) \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + (\partial(y - x^2)/\partial y) \cdot \bar{\mathbf{e}}_y = -2 \cdot x \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + 1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_y. \quad (32)$$

$$-(\mathbf{K}_{A,B} + \mathbf{K}_{B,1} + \mathbf{K}_{B,2} + \mathbf{K}_{B,C}) \cdot x_B + \mathbf{K}_{A,B} \cdot x_A + \mathbf{K}_{B,1} \cdot x_1 + \mathbf{K}_{B,2} \cdot x_2 + \mathbf{K}_{B,C} \cdot x_C - 2 \cdot x_B = 0, \quad (33)$$

$$-(\mathbf{K}_{B,C} + \mathbf{K}_{C,3} + \mathbf{K}_{C,4} + \mathbf{K}_{C,D}) \cdot x_C + \mathbf{K}_{B,C} \cdot x_B + \mathbf{K}_{C,3} \cdot x_3 + \mathbf{K}_{C,4} \cdot x_4 + \mathbf{K}_{C,D} \cdot x_D - 2 \cdot x_C = 0, \quad (34)$$

$$-(\mathbf{K}_{C,D} + \mathbf{K}_{D,5} + \mathbf{K}_{D,6} + \mathbf{K}_{D,E}) \cdot x_D + \mathbf{K}_{C,D} \cdot x_C + \mathbf{K}_{D,5} \cdot x_5 + \mathbf{K}_{D,6} \cdot x_6 + \mathbf{K}_{D,E} \cdot x_E - 2 \cdot x_D = 0, \quad (35)$$

$$-(\mathbf{K}_{D,E} + \mathbf{K}_{E,7} + \mathbf{K}_{E,8} + \mathbf{K}_{E,F}) \cdot x_E + \mathbf{K}_{D,E} \cdot x_D + \mathbf{K}_{E,7} \cdot x_7 + \mathbf{K}_{E,8} \cdot x_8 + \mathbf{K}_{E,F} \cdot x_F - 2 \cdot x_E = 0, \quad (36)$$

$$-(\mathbf{K}_{E,F} + \mathbf{K}_{F,9} + \mathbf{K}_{F,10} + \mathbf{K}_{F,G}) \cdot x_F + \mathbf{K}_{E,F} \cdot x_E + \mathbf{K}_{F,9} \cdot x_9 + \mathbf{K}_{F,10} \cdot x_{10} + \mathbf{K}_{F,G} \cdot x_G - 2 \cdot x_F = 0, \quad (37)$$

$$-(\mathbf{K}_{F,G} + \mathbf{K}_{G,11} + \mathbf{K}_{G,12} + \mathbf{K}_{G,H}) \cdot x_G + \mathbf{K}_{F,G} \cdot x_F + \mathbf{K}_{G,11} \cdot x_{11} + \mathbf{K}_{G,12} \cdot x_{12} + \mathbf{K}_{G,H} \cdot x_H - 2 \cdot x_G = 0, \quad (38)$$

$$-(\mathbf{K}_{G,H} + \mathbf{K}_{H,13} + \mathbf{K}_{H,14} + \mathbf{K}_{H,I}) \cdot x_H + \mathbf{K}_{G,H} \cdot x_G + \mathbf{K}_{H,13} \cdot x_{13} + \mathbf{K}_{H,14} \cdot x_{14} + \mathbf{K}_{H,I} \cdot x_I - 2 \cdot x_H = 0, \quad (39)$$

$$-(\mathbf{K}_{A,B} + \mathbf{K}_{B,1} + \mathbf{K}_{B,2} + \mathbf{K}_{B,C}) \cdot y_B + \mathbf{K}_{A,B} \cdot y_A + \mathbf{K}_{B,1} \cdot y_1 + \mathbf{K}_{B,2} \cdot y_2 + \mathbf{K}_{B,C} \cdot y_C + 1 = 0, \quad (40)$$

$$-(\mathbf{K}_{B,C} + \mathbf{K}_{C,3} + \mathbf{K}_{C,4} + \mathbf{K}_{C,D}) \cdot y_C + \mathbf{K}_{B,C} \cdot y_B + \mathbf{K}_{C,3} \cdot y_3 + \mathbf{K}_{C,4} \cdot y_4 + \mathbf{K}_{C,D} \cdot y_D + 1 = 0, \quad (41)$$

$$-(\mathbf{K}_{C,D} + \mathbf{K}_{D,5} + \mathbf{K}_{D,6} + \mathbf{K}_{D,E}) \cdot y_D + \mathbf{K}_{C,D} \cdot y_C + \mathbf{K}_{D,5} \cdot y_5 + \mathbf{K}_{D,6} \cdot y_6 + \mathbf{K}_{D,E} \cdot y_E + 1 = 0, \quad (42)$$

$$-(\mathbf{K}_{D,E} + \mathbf{K}_{E,7} + \mathbf{K}_{E,8} + \mathbf{K}_{E,F}) \cdot y_E + \mathbf{K}_{D,E} \cdot y_D + \mathbf{K}_{E,7} \cdot y_7 + \mathbf{K}_{E,8} \cdot y_8 + \mathbf{K}_{E,F} \cdot y_F + 1 = 0, \quad (43)$$

$$-(\mathbf{K}_{E,F} + \mathbf{K}_{F,9} + \mathbf{K}_{F,10} + \mathbf{K}_{F,G}) \cdot y_F + \mathbf{K}_{E,F} \cdot y_E + \mathbf{K}_{F,9} \cdot y_9 + \mathbf{K}_{F,10} \cdot y_{10} + \mathbf{K}_{F,G} \cdot y_G + 1 = 0, \quad (44)$$

$$-(\mathbf{K}_{F,G} + \mathbf{K}_{G,11} + \mathbf{K}_{G,12} + \mathbf{K}_{G,H}) \cdot y_G + \mathbf{K}_{F,G} \cdot y_F + \mathbf{K}_{G,11} \cdot y_{11} + \mathbf{K}_{G,12} \cdot y_{12} + \mathbf{K}_{G,H} \cdot y_H + 1 = 0, \quad (45)$$

$$-(\mathbf{K}_{G,H} + \mathbf{K}_{H,13} + \mathbf{K}_{H,14} + \mathbf{K}_{H,I}) \cdot y_H + \mathbf{K}_{G,H} \cdot y_G + \mathbf{K}_{H,13} \cdot y_{13} + \mathbf{K}_{H,14} \cdot y_{14} + \mathbf{K}_{H,I} \cdot y_I + 1 = 0, \quad (46)$$

$$\chi \cdot \delta_{A,B}^2 \cdot \mathbf{K}_{A,B} + \delta_{B,1}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,1} + \delta_{B,2}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,2} + \delta_{B,C}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,C} - \varphi_B + (R_{x_A} \cdot x_A + R_{y_A} \cdot y_A) + B_{A,B} = 0, \quad (47)$$

$$\chi \cdot \delta_{B,1}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,1} + \delta_{A,B}^2 \cdot \mathbf{K}_{A,B} + \delta_{B,2}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,2} + \delta_{B,C}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,C} - \varphi_B + (R_{x_1} \cdot x_1 + R_{y_1} \cdot y_1) + B_{B,1} = 0, \quad (48)$$

$$\chi \cdot \delta_{B,2}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,2} + \delta_{A,B}^2 \cdot \mathbf{K}_{A,B} + \delta_{B,1}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,1} + \delta_{B,C}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,C} - \varphi_B + (R_{x_2} \cdot x_2 + R_{y_2} \cdot y_2) + B_{B,2} = 0, \quad (49)$$

$$\chi \cdot \delta_{B,C}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,C} + \delta_{A,B}^2 \cdot \mathbf{K}_{A,B} + \delta_{B,1}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,1} + \delta_{B,2}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,2} + \delta_{C,3}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,3} + \delta_{C,4}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,4} + \delta_{C,D}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,D} - (\varphi_B + \varphi_C) + B_{B,C} = 0, \quad (50)$$

$$\chi \cdot \delta_{C,3}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,3} + \delta_{B,C}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,C} + \delta_{C,4}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,4} + \delta_{C,D}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,D} - \varphi_C + (R_{x_3} \cdot x_3 + R_{y_3} \cdot y_3) + B_{C,3} = 0, \quad (51)$$

$$\chi \cdot \delta_{C,4}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,4} + \delta_{B,C}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,C} + \delta_{C,3}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,3} + \delta_{C,D}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,D} - \varphi_C + (R_{x_4} \cdot x_4 + R_{y_4} \cdot y_4) + B_{C,4} = 0, \quad (52)$$

$$\chi \cdot \delta_{C,D}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,D} + \delta_{B,C}^2 \cdot \mathbf{K}_{B,C} + \delta_{C,3}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,3} + \delta_{C,4}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,4} + \delta_{D,5}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,5} + \delta_{D,6}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,6} + \delta_{D,E}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,E} - (\varphi_C + \varphi_D) + B_{C,D} = 0, \quad (53)$$

$$\chi \cdot \delta_{D,5}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,5} + \delta_{C,D}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,D} + \delta_{D,6}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,6} + \delta_{D,E}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,E} - \varphi_D + (R_{x_5} \cdot x_5 + R_{y_5} \cdot y_5) + B_{D,5} = 0, \quad (54)$$

$$\chi \cdot \delta_{D,6}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,6} + \delta_{C,D}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,D} + \delta_{D,5}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,5} + \delta_{D,E}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,E} - \varphi_D + (R_{x_6} \cdot x_6 + R_{y_6} \cdot y_6) + B_{D,6} = 0, \quad (55)$$

$$\chi \cdot \delta_{D,E}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,E} + \delta_{C,D}^2 \cdot \mathbf{K}_{C,D} + \delta_{D,5}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,5} + \delta_{D,6}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,6} + \delta_{E,7}^2 \cdot \mathbf{K}_{E,7} + \delta_{E,8}^2 \cdot \mathbf{K}_{E,8} + \delta_{E,F}^2 \cdot \mathbf{K}_{E,F} - (\varphi_D + \varphi_E) + B_{D,E} = 0, \quad (56)$$

$$\chi \cdot \delta_{E,7}^2 \cdot \mathbf{K}_{E,7} + \delta_{D,E}^2 \cdot \mathbf{K}_{D,E} + \delta_{E,8}^2 \cdot \mathbf{K}_{E,8} + \delta_{E,F}^2 \cdot \mathbf{K}_{E,F} - \varphi_E + (R_{x_7} \cdot x_7 + R_{y_7} \cdot y_7) + B_{E,7} = 0, \quad (57)$$

$$\chi \cdot \delta_{E,8}^2 \cdot \mathfrak{N}_{E,8} + \delta_{D,E}^2 \cdot \mathfrak{N}_{D,E} + \delta_{E,7}^2 \cdot \mathfrak{N}_{E,7} + \delta_{E,F}^2 \cdot \mathfrak{N}_{E,F} - \varphi_E + (R_{x8} \cdot x_8 + R_{y8} \cdot y_8) + B_{E,8} = 0, \quad (58)$$

$$\chi \cdot \delta_{E,F}^2 \cdot \mathfrak{N}_{E,F} + \delta_{D,E}^2 \cdot \mathfrak{N}_{D,E} + \delta_{E,7}^2 \cdot \mathfrak{N}_{E,7} + \delta_{E,8}^2 \cdot \mathfrak{N}_{E,8} + \delta_{F,9}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,9} + \delta_{F,10}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,10} + \delta_{F,G}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,G} - (\varphi_E + \varphi_F) + B_{E,F} = 0, \quad (59)$$

$$\chi \cdot \delta_{F,9}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,9} + \delta_{E,F}^2 \cdot \mathfrak{N}_{E,F} + \delta_{F,10}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,10} + \delta_{F,G}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,G} - \varphi_F + (R_{x9} \cdot x_9 + R_{y9} \cdot y_9) + B_{F,9} = 0, \quad (60)$$

$$\chi \cdot \delta_{F,10}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,10} + \delta_{E,F}^2 \cdot \mathfrak{N}_{E,F} + \delta_{F,9}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,9} + \delta_{F,G}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,G} - \varphi_F + (R_{x10} \cdot x_{10} + R_{y10} \cdot y_{10}) + B_{F,10} = 0, \quad (61)$$

$$\chi \cdot \delta_{F,G}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,G} + \delta_{E,F}^2 \cdot \mathfrak{N}_{E,F} + \delta_{F,9}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,9} + \delta_{F,10}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,10} + \delta_{G,11}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,11} + \delta_{G,12}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,12} + \delta_{G,H}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,H} - (\varphi_F + \varphi_G) + B_{F,G} = 0, \quad (62)$$

$$\chi \cdot \delta_{G,11}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,11} + \delta_{F,G}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,G} + \delta_{G,12}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,12} + \delta_{G,H}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,H} - \varphi_G + (R_{x11} \cdot x_{11} + R_{y11} \cdot y_{11}) + B_{G,11} = 0, \quad (63)$$

$$\chi \cdot \delta_{G,12}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,12} + \delta_{F,G}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,G} + \delta_{G,11}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,11} + \delta_{G,H}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,H} - \varphi_G + (R_{x12} \cdot x_{12} + R_{y12} \cdot y_{12}) + B_{G,12} = 0, \quad (64)$$

$$\chi \cdot \delta_{G,H}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,H} + \delta_{F,G}^2 \cdot \mathfrak{N}_{F,G} + \delta_{G,11}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,11} + \delta_{G,12}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,12} + \delta_{H,13}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,13} + \delta_{H,14}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,14} + \delta_{H,I}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,I} - (\varphi_G + \varphi_H) + B_{G,H} = 0, \quad (65)$$

$$\chi \cdot \delta_{H,13}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,13} + \delta_{G,H}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,H} + \delta_{H,14}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,14} + \delta_{H,I}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,I} - \varphi_H + (R_{x13} \cdot x_{13} + R_{y13} \cdot y_{13}) + B_{H,13} = 0, \quad (66)$$

$$\chi \cdot \delta_{H,14}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,14} + \delta_{G,H}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,H} + \delta_{H,13}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,13} + \delta_{H,I}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,I} - \varphi_H + (R_{x14} \cdot x_{14} + R_{y14} \cdot y_{14}) + B_{H,14} = 0, \quad (67)$$

$$\chi \cdot \delta_{H,I}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,I} + \delta_{G,H}^2 \cdot \mathfrak{N}_{G,H} + \delta_{H,13}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,13} + \delta_{H,14}^2 \cdot \mathfrak{N}_{H,14} - \varphi_H + (R_{xI} \cdot x_I + R_{yI} \cdot y_I) + B_{H,I} = 0. \quad (68)$$

Використовуючи систему (33) – (68), будемо компоненти тотожностей (28) і (29). Матриця $[s^p]$ матиме вигляд:

$$[s^p] = [X^p \quad Y^p], \quad (69)$$

де $\{X^p\}$ та $\{Y^p\}$ – вектори координат вузлів, які мають такий вигляд:

$$\{X^p\}^T = [x_B^p \quad x_C^p \quad x_D^p \quad x_E^p \quad x_F^p \quad x_G^p \quad x_H^p], \quad (70)$$

$$\{Y^p\}^T = [y_B^p \quad y_C^p \quad y_D^p \quad y_E^p \quad y_F^p \quad y_G^p \quad y_H^p]. \quad (71)$$

Матриця $[g^{p-1}]$ виглядатиме так:

$$[g^{p-1}] = [g_x^{p-1} \quad g_y^{p-1}], \quad (72)$$

де $\{g_x^{p-1}\}$ та $\{g_y^{p-1}\}$ – вектори крайових умов, які мають вигляд:

$$\{g_x^{p-1}\} = \begin{bmatrix} \mathfrak{N}_{AB} \cdot x_A + \mathfrak{N}_{B1} \cdot x_1 + \mathfrak{N}_{B2} \cdot x_2 \\ \mathfrak{N}_{C3} \cdot x_3 + \mathfrak{N}_{C4} \cdot x_4 \\ \mathfrak{N}_{D5} \cdot x_5 + \mathfrak{N}_{D6} \cdot x_6 \\ \mathfrak{N}_{E7} \cdot x_7 + \mathfrak{N}_{E8} \cdot x_8 \\ \mathfrak{N}_{F9} \cdot x_9 + \mathfrak{N}_{F10} \cdot x_{10} \\ \mathfrak{N}_{G11} \cdot x_{11} + \mathfrak{N}_{G12} \cdot x_{12} \\ \mathfrak{N}_{H13} \cdot x_{13} + \mathfrak{N}_{H14} \cdot x_{14} + \mathfrak{N}_{HI} \cdot x_I \end{bmatrix}, \quad (73)$$

$$\{g_y^{p-1}\} = \begin{bmatrix} \mathfrak{N}_{AB} \cdot y_A + \mathfrak{N}_{B1} \cdot y_1 + \mathfrak{N}_{B2} \cdot y_2 \\ \mathfrak{N}_{C3} \cdot y_3 + \mathfrak{N}_{C4} \cdot y_4 \\ \mathfrak{N}_{D5} \cdot y_5 + \mathfrak{N}_{D6} \cdot y_6 \\ \mathfrak{N}_{E7} \cdot y_7 + \mathfrak{N}_{E8} \cdot y_8 \\ \mathfrak{N}_{F9} \cdot y_9 + \mathfrak{N}_{F10} \cdot y_{10} \\ \mathfrak{N}_{G11} \cdot y_{11} + \mathfrak{N}_{G12} \cdot y_{12} \\ \mathfrak{N}_{H13} \cdot y_{13} + \mathfrak{N}_{H14} \cdot y_{14} + \mathfrak{N}_{HI} \cdot y_I \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Матриця $[\mathfrak{Z}^p]$ буде виглядати так:

$$[\mathfrak{Z}^p] = [\mathfrak{Z}_x^p \quad \mathfrak{Z}_y^p], \quad (75)$$

де $\{\mathfrak{Z}_x^p\}$ та $\{\mathfrak{Z}_y^p\}$ – вектори компонентів зовнішніх впливів, що мають вигляд:

$$\{\mathfrak{Z}_x^p\}^T = [-2 \cdot x_B^p \quad -2 \cdot x_C^p \quad -2 \cdot x_D^p \rightarrow -2 \cdot x_E^p \quad -2 \cdot x_F^p \quad -2 \cdot x_G^p \quad -2 \cdot x_H^p], \quad (76)$$

$$\{\mathfrak{Z}_y^p\}^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]. \quad (77)$$

Матриця $[\mathfrak{N}^{p-1}]$ матиме такий вигляд:

$$[\mathfrak{N}^{p-1}] = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Тут блоки $[A^{p-1}]$, $[B^{p-1}]$, $[C^{p-1}]$ і $[D^{p-1}]$ мають наступний вид:

$$[A] = \begin{bmatrix} -\left(\mathfrak{N}_{A,B} + \mathfrak{N}_{B,1} + \mathfrak{N}_{B,2} + \mathfrak{N}_{B,C}\right) & \mathfrak{N}_{B,C} \cdot X_C & 0 & 0 \\ \mathfrak{N}_{B,C} \cdot X_B & -\left(\mathfrak{N}_{B,C} + \mathfrak{N}_{C,3} + \mathfrak{N}_{C,4} + \mathfrak{N}_{C,D}\right) & \mathfrak{N}_{C,D} \cdot X_D & 0 \\ 0 & \mathfrak{N}_{C,D} \cdot X_C & -\left(\mathfrak{N}_{C,D} + \mathfrak{N}_{D,5} + \mathfrak{N}_{D,6} + \mathfrak{N}_{D,E}\right) & \mathfrak{N}_{D,E} \cdot X_E \\ 0 & 0 & \mathfrak{N}_{D,E} \cdot X_D & -\left(\mathfrak{N}_{D,E} + \mathfrak{N}_{E,7} + \mathfrak{N}_{E,8} + \mathfrak{N}_{E,F}\right) \end{bmatrix}, \quad (79)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathfrak{N}_{E,F} \cdot X_E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (80)$$

$$[C]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathfrak{N}_{E,F} \cdot X_F \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (81)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} -\left(\mathfrak{N}_{E,F} + \mathfrak{N}_{F,9} + \mathfrak{N}_{F,10} + \mathfrak{N}_{F,G}\right) & \mathfrak{N}_{F,G} \cdot X_G & 0 \\ \mathfrak{N}_{F,G} \cdot X_F & -\left(\mathfrak{N}_{F,G} + \mathfrak{N}_{G,11} + \mathfrak{N}_{G,12} + \mathfrak{N}_{G,H}\right) & \mathfrak{N}_{G,H} \cdot X_H \\ 0 & \mathfrak{N}_{G,H} \cdot X_G & -\left(\mathfrak{N}_{G,H} + \mathfrak{N}_{H,13} + \mathfrak{N}_{H,14} + \mathfrak{N}_{H,I}\right) \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Вектор $\{\mathfrak{N}^p\}$ виглядатиме так:

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{N}^p\}^T &= [\mathfrak{N}_{A,B} \quad \mathfrak{N}_{B,1} \quad \mathfrak{N}_{B,2} \quad \mathfrak{N}_{B,C} \quad \mathfrak{N}_{C,3} \quad \mathfrak{N}_{C,4} \quad \mathfrak{N}_{C,D} \quad \mathfrak{N}_{D,5} \quad \mathfrak{N}_{D,6} \quad \mathfrak{N}_{D,E} \quad \mathfrak{N}_{E,7} \rightarrow \\ &\rightarrow \mathfrak{N}_{E,8} \quad \mathfrak{N}_{E,F} \quad \mathfrak{N}_{F,9} \quad \mathfrak{N}_{F,10} \quad \mathfrak{N}_{F,G} \quad \mathfrak{N}_{G,11} \quad \mathfrak{N}_{G,12} \quad \mathfrak{N}_{G,H} \quad \mathfrak{N}_{H,13} \quad \mathfrak{N}_{H,14} \quad \mathfrak{N}_{H,I}]. \end{aligned} \quad (83)$$

Аналогічний вигляд матиме і вектор $\{\mathfrak{N}^{p-1}\}$, за винятком зміни індексу номера ітераційного числення $p-1$.

Матриця $[(\delta^p)^2]$ буде виглядати наступним чином:

$$[(\delta^p)^2] = \begin{bmatrix} E & G \\ F & H \end{bmatrix}. \quad (84)$$

Тут $[E]$, $[F]$, $[G]$ и $[H]$ – матричні блоки (розмірністю 11×11 кожен):

$$[E] = \begin{bmatrix} \chi \cdot \delta_{A,B}^2 & \delta_{B,1}^2 & \delta_{B,2}^2 & \delta_{B,C}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{A,B}^2 & \chi \cdot \delta_{B,1}^2 & \delta_{B,2}^2 & \delta_{B,C}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{A,B}^2 & \delta_{B,1}^2 & \chi \cdot \delta_{B,2}^2 & \delta_{B,C}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{A,B}^2 & \delta_{B,1}^2 & \delta_{B,2}^2 & \chi \cdot \delta_{B,C}^2 & \delta_{C,3}^2 & \delta_{C,4}^2 & \delta_{C,D}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{B,C}^2 & \chi \cdot \delta_{C,3}^2 & \delta_{C,4}^2 & \delta_{C,D}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{B,C}^2 & \delta_{C,3}^2 & \chi \cdot \delta_{C,4}^2 & \delta_{C,D}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{B,C}^2 & \delta_{C,3}^2 & \delta_{C,4}^2 & \chi \cdot \delta_{C,D}^2 & \delta_{D,5}^2 & \delta_{D,6}^2 & \delta_{D,E}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{C,D}^2 & \chi \cdot \delta_{D,5}^2 & \delta_{D,6}^2 & \delta_{D,E}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{C,D}^2 & \delta_{D,5}^2 & \chi \cdot \delta_{D,6}^2 & \delta_{D,E}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{C,D}^2 & \delta_{D,5}^2 & \delta_{D,6}^2 & \chi \cdot \delta_{D,E}^2 & \delta_{E,7}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{D,E}^2 & \chi \cdot \delta_{E,7}^2 \end{bmatrix}, \quad (85)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \delta_{D,E}^2 & \delta_{E,7}^2 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{D,E}^2 & \delta_{E,7}^2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_{E,8}^2 & \delta_{E,F}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_{E,8}^2 & \delta_{E,F}^2 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (87)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} \chi \cdot \delta_{E,8}^2 & \delta_{E,F}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{E,8}^2 & \chi \cdot \delta_{E,F}^2 & \delta_{F,9}^2 & \delta_{F,10}^2 & \delta_{F,G}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{E,F}^2 & \chi \cdot \delta_{F,9}^2 & \delta_{F,10}^2 & \delta_{F,G}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{E,F}^2 & \delta_{F,9}^2 & \chi \cdot \delta_{F,10}^2 & \delta_{F,G}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{E,F}^2 & \delta_{F,9}^2 & \delta_{F,10}^2 & \chi \cdot \delta_{F,G}^2 & \delta_{G,11}^2 & \delta_{G,12}^2 & \delta_{G,H}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{F,G}^2 & \chi \cdot \delta_{G,11}^2 & \delta_{G,12}^2 & \delta_{G,H}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{F,G}^2 & \delta_{G,11}^2 & \chi \cdot \delta_{G,12}^2 & \delta_{G,H}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{F,G}^2 & \delta_{G,11}^2 & \delta_{G,12}^2 & \chi \cdot \delta_{G,H}^2 & \delta_{H,13}^2 & \delta_{H,14}^2 & \delta_{H,I}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{G,H}^2 & \chi \cdot \delta_{H,13}^2 & \delta_{H,14}^2 & \delta_{H,I}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{G,H}^2 & \delta_{H,13}^2 & \chi \cdot \delta_{H,14}^2 & \delta_{H,I}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{G,H}^2 & \delta_{H,13}^2 & \delta_{H,14}^2 & \chi \cdot \delta_{H,I}^2 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Вектор $\{\varphi^p\}$ буде виглядати так:

$$\begin{aligned} \{\varphi^p\}^T &= [\varphi_{AB}^p \ \varphi_{B1}^p \ \varphi_{B2}^p \ \varphi_{BC}^p \ \varphi_{C3}^p \ \varphi_{C4}^p \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi_{C,D}^p \ \varphi_{D,5}^p \ \varphi_{D,6}^p \ \varphi_{D,E}^p \ \varphi_{E,7}^p \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi_{E,8}^p \ \varphi_{E,F}^p \ \varphi_{F,9}^p \ \varphi_{F,10}^p \ \varphi_{F,G}^p \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi_{G,11}^p \ \varphi_{G,12}^p \ \varphi_{G,H}^p \ \varphi_{H,13}^p \ \varphi_{H,14}^p \ \varphi_{H,I}^p] = \\ &= [\varphi_B^p \ \varphi_B^p \ \varphi_B^p \ (\varphi_B^p + \varphi_C^p) \ \varphi_C^p \ \varphi_C^p \rightarrow \\ &\rightarrow (\varphi_C^p + \varphi_D^p) \ \varphi_D^p \ \varphi_D^p \ (\varphi_D^p + \varphi_E^p) \ \varphi_E^p \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi_E^p \ (\varphi_E^p + \varphi_F^p) \ \varphi_F^p \ \varphi_F^p \ (\varphi_F^p + \varphi_G^p) \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi_G^p \ \varphi_G^p \ (\varphi_G^p + \varphi_H^p) \ \varphi_H^p \ \varphi_H^p \ \varphi_H^p]. \end{aligned} \quad (89)$$

Тут значення вузлових потенціалів відповідно до виразів (26) і (31) необхідно обчислювати за формулою:

$$\varphi_i^p = y_i^p - (x_i^p)^2. \quad (90)$$

Вектор очікуваних значень потенціалів $\{\varphi'\}$ повинен включати тільки нульові значення:

$$\begin{aligned} \{\varphi'\}^T &= [\varphi'_{AB} \ \varphi'_{B1} \ \varphi'_{B2} \ \varphi'_{BC} \ \varphi'_{C3} \ \varphi'_{C4} \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi'_{C,D} \ \varphi'_{D,5} \ \varphi'_{D,6} \ \varphi'_{D,E} \ \varphi'_{E,7} \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi'_{E,8} \ \varphi'_{E,F} \ \varphi'_{F,9} \ \varphi'_{F,10} \ \varphi'_{F,G} \rightarrow \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \varphi'_{G,11} \ \varphi'_{G,12} \ \varphi'_{G,H} \ \varphi'_{H,13} \ \varphi'_{H,14} \ \varphi'_{H,I}] = \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ (0+0) \ 0 \ 0 \rightarrow \\ &\rightarrow (0+0) \ 0 \ 0 \ (0+0) \ 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 0 \ (0+0) \ 0 \ 0 \ (0+0) \rightarrow \\ &\rightarrow 0 \ 0 \ (0+0) \ 0 \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

Побудувавши вирази (69) – (91), по черзі вирішуємо системи (28) і (29), використовуючи циклічне ітераційне числення. У Табл.1 наведені крайові та початкові умови, а також виконані в якості прикладів розрахунки координат і параметрів жорсткості дискретного образу, показаного на Рис.1, а.

Для даної постановки задачі початкові параметри жорсткості для всіх зв'язків прийняті рівними $\mathbf{x}^0 = 5$. Початкова форма моделі на першому етапі ітераційного числення була отримана без урахування вузлових навантажень (з використанням координат фіксованих вузлів моделі, представлених на Рис.1, а).

Слід зазначити, що при заданні крайових умов – фіксованих вузлів моделі – лише один вузол був інцидентним графіку досліджуваної функції (вузол I). Однак зовсім не обов'язково, щоб хоч один базовий вузол моделі точно збігався з шуканим графіком.

Табл. 1. Крайові умови і результати моделювання
Table 1. Boundary conditions and simulation results

Вид даних		Номер задачі							
		№ 1			№ 2			№ 3	
Кількість ітерацій		1	15	30	1	30	100	1	30
Коефіцієнт χ		0	0	0	0	0	0	-	-
Координати вільних вузлів моделі (x_i, y_i)	x_B	1.3065 (1.0982)*	1.2537	1.1701	1.025	1.5929	1.6033	0.353	0.855
	x_C	1.7033 (1.3929)*	1.7132	1.6773	1.3	1.7156	1.7678	0.707	1.309
	x_D	1.8256 (1.4732)*	1.9538	2.0067	1.375	1.8257	1.8746	1.06	1.651
	x_E	1.8687 (1.5000)*	2.1178	2.2167	1.4	2.0008	2.0419	1.414	1.938
	x_F	1.9016 (1.5268)*	2.2779	2.4075	1.425	2.22	2.2462	1.767	2.191
	x_G	1.9771 (1.6071)*	2.452	2.59	1.5	2.4152	2.4285	2.121	2.419
	x_H	2.2159 (1.9018)*	2.6681	2.7809	1.775	2.6125	2.62	2.474	2.631
	y_B	1.9268 (2.0000)*	1.9336	1.9283	1	2.5354	2.5659	1	1
	y_C	2.9072 (3.0000)*	2.965	2.9395	2	3.0036	3.1175	2	2
	y_D	3.9021 (4.0000)*	4.089	4.1329	3	3.4744	3.5165	3	3
	y_E	4.9010 (5.0000)*	5.0879	5.119	4	4.1834	4.1718	4	4
	y_F	5.9021 (6.0000)*	6.0509	6.0652	5	5.0631	5.0456	5	5
	y_G	6.9072 (7.0000)*	6.9701	6.9758	6	5.9049	5.8975	6	6
	y_H	7.9268 (8.0000)*	7.9264	7.9418	7	6.8624	6.8642	7	7
Значення потенціалів вільних вузлів моделі (φ_i)	φ_B	0.2199	0.3619	0.5592	-0.0510	-0.002	-0.005	0.875	0.27
	φ_C	0.0058	0.0301	0.1262	0.3100	0.0603	-0.008	1.5	0.288
	φ_D	0.5694	0.2718	0.1062	1.1094	0.1411	0.0024	1.875	0.274
	φ_E	1.4092	0.6028	0.2051	2.0400	0.18	0.0024	2.001	0.244
	φ_F	2.2860	0.862	0.2691	2.9694	0.1347	8E-05	1.876	0.201
	φ_G	2.9984	0.958	0.2678	3.7500	0.0716	-2E-04	1.501	0.146
	φ_H	3.0168	0.8075	0.2086	3.8494	0.0374	-4E-05	0.877	0.08
Параметри жорсткості зв'язків моделі ($\mathbf{K}_{ij}$)	$\mathbf{K}_{A,B}$	5	5.6977	6.8888	0.3	0.2851	0.2285	-	-
	$\mathbf{K}_{B,1}$	5	6.0637	7.9506	0.3	0.2618	0.1592	-	-
	$\mathbf{K}_{B,2}$	5	5.5931	6.4665	0.3	0.3582	0.2238	-	-
	$\mathbf{K}_{B,C}$	5	5.3758	6.29	0.3	3.5763	2.1496	-	-
	$\mathbf{K}_{C,3}$	5	4.7145	4.5658	0.3	1.5915	1.5438	-	-
	$\mathbf{K}_{C,4}$	5	4.4983	4.2408	0.3	1.8224	1.7307	-	-
	$\mathbf{K}_{C,D}$	5	5.5365	5.7206	0.3	10.835	12.143	-	-
	$\mathbf{K}_{D,5}$	5	5.5816	5.8237	0.3	2.6614	2.8775	-	-
	$\mathbf{K}_{D,6}$	5	6.657	7.5612	0.3	4.1047	4.7992	-	-
	$\mathbf{K}_{D,E}$	5	8.3207	9.7416	0.3	11.723	13.445	-	-
	$\mathbf{K}_{E,7}$	5	6.2106	6.6247	0.3	3.3998	3.6309	-	-
	$\mathbf{K}_{E,8}$	5	9.6376	12.389	0.3	7.8471	9.3423	-	-
	$\mathbf{K}_{E,F}$	5	11.117	13.6	0.3	11.792	12.632	-	-
	$\mathbf{K}_{F,9}$	5	6.7019	7.2024	0.3	3.372	3.4572	-	-
	$\mathbf{K}_{F,10}$	5	13.953	20.224	0.3	12.806	14.109	-	-
	$\mathbf{K}_{F,G}$	5	13.878	17.197	0.3	13.537	13.899	-	-
	$\mathbf{K}_{G,11}$	5	6.9394	7.4171	0.3	2.9764	2.9969	-	-
	$\mathbf{K}_{G,12}$	5	21.179	34.33	0.3	20.653	21.435	-	-
	$\mathbf{K}_{G,H}$	5	13.504	16.2	0.3	9.5555	9.6564	-	-
	$\mathbf{K}_{H,13}$	5	6.3345	6.6281	0.3	1.7256	1.7363	-	-
	$\mathbf{K}_{H,14}$	5	33.405	60.819	0.3	29.869	31.265	-	-
	$\mathbf{K}_{H,I}$	5	10.238	12.024	0.3	4.2194	4.2747	-	-

*В дужках наведено координати вільних вузлів моделі до початку дії на них поля $\mathcal{Z}$.

Розглянемо тепер перший із запропонованих способів побудови дискретних образів неявних функцій на основі їх апроксимаційних кінцево-різницевої співвідно-

шень і приватних похідних.

Для застосування даного методу необхідно в першу чергу отримати приватні похідні, що входять в праву половину рів-

няння (7). У нашому випадку доцільно застосовувати саме це рівняння, так як для подальшого порівняння цього способу з раніше розглянутим, бажано визначити з його допомогою координати відповідної кількості вільних вузлів моделі (як і на Рис.1), розміщених для простоти обчислень з рівним кроком $h_y = 1$ по осі Oy. Отже, шукані похідні (12) – (16) будуть мати наступний вигляд:

$$\zeta'_x(x_i, y_i) = \partial \zeta(y_i - x_i^2) / \partial x = -2 \cdot x_i, \quad (92)$$

$$\zeta''_{xx}(x_i, y_i) = \partial^2 \zeta(y_i - x_i^2) / \partial x^2 = -2, \quad (93)$$

$$\zeta'_y(x_i, y_i) = \partial \zeta(y_i - x_i^2) / \partial y = 1, \quad (94)$$

$$\zeta''_{yy}(x_i, y_i) = \partial^2 \zeta(y_i - x_i^2) / \partial y^2 = 0, \quad (95)$$

$$\zeta''_{xy}(x_i, y_i) = \partial^2 \zeta(y_i - x_i^2) / \partial x \partial y = 0. \quad (96)$$

Використовуючи вирази (92) – (96), будемо систему рівнянь типу (7) для вільних вузлів моделі, представленої на Рис.2, а. Слід зазначити, що перший і останній вузли дискретної моделі повинні належати графіку досліджуваної функції $\zeta(x, y)$. Ці два вузла будуть служити крайовими умовами моделювання. Система буде мати вигляд:

$$x_A - 2 \cdot x_B + x_C = -1/(4 \cdot x_B^3), \quad (97)$$

$$x_B - 2 \cdot x_C + x_D = -1/(4 \cdot x_C^3), \quad (98)$$

$$x_C - 2 \cdot x_D + x_E = -1/(4 \cdot x_D^3), \quad (99)$$

$$x_D - 2 \cdot x_E + x_F = -1/(4 \cdot x_E^3), \quad (100)$$

$$x_E - 2 \cdot x_F + x_G = -1/(4 \cdot x_F^3), \quad (101)$$

$$x_F - 2 \cdot x_G + x_H = -1/(4 \cdot x_G^3), \quad (102)$$

$$x_G - 2 \cdot x_H + x_I = -1/(4 \cdot x_H^3). \quad (103)$$

Вирішуючи цю систему відносно координат вільних вузлів, ми отримаємо дискретний образ графіка досліджуваної функції, використовуючи ітераційне числення. Однак, в якості похибки даного числення можна розглядати лише абсолютну або відносну похибку між поточними і попередніми координатами вузлів. При цьому, впливати на рівень точності задоволення функції $\zeta(x, y)$ не представляється можливим. Таким чином, дана методика не дозволяє

контролювати точність співпадіння точок дискретного образу, що моделюється, зі своїм безперервним графіком. Результати рішення системи (97) – (103) представлені в Табл.1 (задача №3). На Рис.1, б представлено результуючу форма дискретного образу неявної функції (31).

Очевидно, що такий спосіб побудови дискретної кривої неявної функції в досліджуваній області є більш залежним від початкових умов моделювання, що робить його менш ефективним.

Для додаткової демонстрації переваг попереднього методу моделювання дискретних образів вирішимо аналогічну до попередньої задачу з використанням параметричних рівнянь стану, і використовуючи дискретний образ, топологічно подібний до моделі на Рис.1, а, однак зміщений нижче, як показано на Рис.3, а.

В даному прикладі ми будемо використовувати дещо інший підхід, який полягає в тому, що рівняння рівноваги вільних вузлів моделі повинні складатися без урахування вектора зовнішнього впливу $\bar{\mathfrak{I}}$, тобто:

$$\bar{\mathfrak{I}}_i = 0 \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + 0 \cdot \bar{\mathbf{e}}_y. \quad (104)$$

Можливість такого підходу була пояснена в [7]. Його доцільність полягає в тому, щоб в разі, коли градієнтне векторне поле змушує більшість вузлів переміщатися в одному і тому ж напрямку, зосереджуючи їх в одній і при тому не дуже інформативній області, дати можливість цим вузлам досягти найближчих або максимально інформативних ділянок досліджуваної області. При цьому кінцеве положення вузлів залежить тільки від розподілу параметрів жорсткості (і як наслідок внутрішніх зусиль) в зв'язках моделі, і перебуває під впливом лише вузлових значень цільових функцій (вузлових потенціалів). Для даної постановки задачі початкові параметри жорсткості для всіх зв'язків прийняті рівними $\mathbf{x}^0 = 0.3$.

Результати моделювання дискретного образу з використанням відповідного підходу представлені в Табл.1 (задача №2)

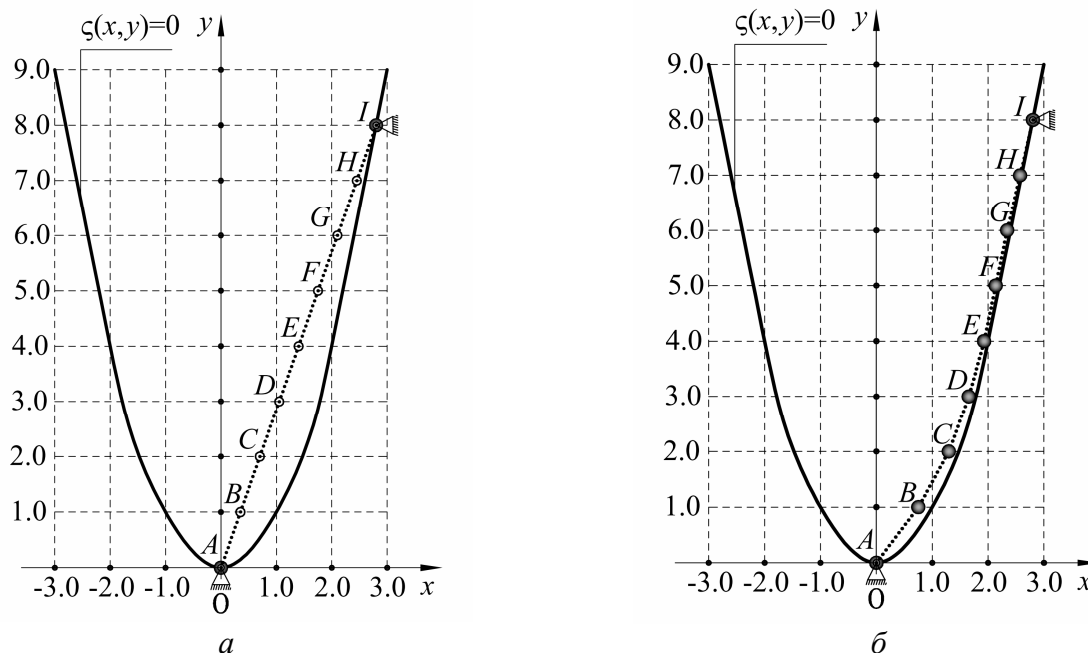


Рис.2. Побудова дискретного образу кривої неявної функції з використанням скінченно-різницевих співвідношень і часткових похідних в рівняннях типу (7): *a* – дискретний образ досліджуваної функції на першому етапі (топологічна схема); *б* – дискретний образ досліджуваної функції після сходження ітераційного процесу

Fig.2. The construction of a discrete image of curved line of an implicit function using finite-difference relations and partial derivatives in equations of the type (7): *a*– the discrete image of the function on the first stage (the topological scheme); *б* – the discrete image of the function after the iteration process converges

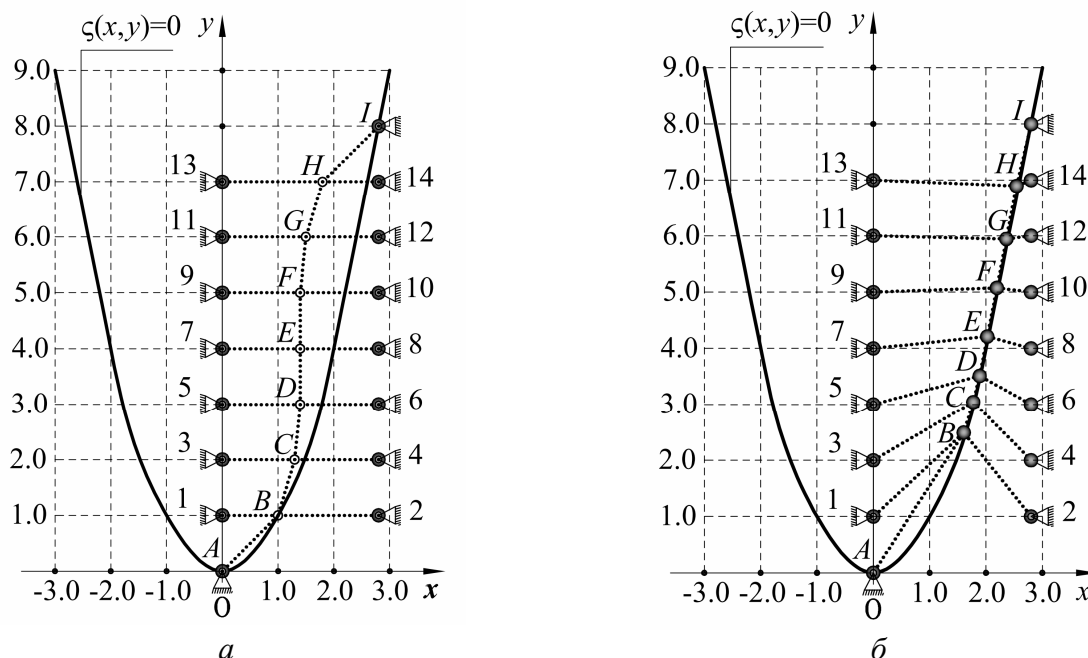


Рис.3. Побудова додаткового дискретного образу кривої неявної функції з використанням параметричних рівнянь типу (24) і (25): *a* – дискретний образ досліджуваної функції на першому етапі (топологічна схема); *б* – дискретний образ досліджуваної функції після сходження процесу ітераційного числення

Fig.3. The construction of an additional discrete image of the curved line of an implicit function using parametric equations of types (24) and (25): *a* – the discrete image of the function on the first stage (the topological scheme); *б* – the discrete image of the function after the iteration process converges

та проілюстровані на Рис.3, б. Як видно на цьому рисунку, вільні вузли моделі з високою точністю інцидентні графіку функції $\zeta(x,y)$, однак розташовуються на ньому не з регулярним кроком, на відміну від вузлів дискретного образу, отриманого з використанням різницевого співвідношення.

Слід зазначити, що метод, заснований на застосуванні параметричних рівнянь дозволяє визначити координати з будь-якою заданою точністю, яка відповідає точності задоволення цільовій функції, тобто досліджуваній неявній функції.

ВИСНОВКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Очевидно, перший із запропонованих способів отримання дискретних образів неявних функцій є більш ефективним і гнучким по відношенню до крайових і початкових умов моделювання. При цьому існує можливість як враховувати, так і ігнорувати векторне градієнтне поле впливу на вільні вузли моделі. Врахування даних впливів найбільш актуальне у випадку, якщо графік досліджуваної функції являє собою візуалізацію ізоліній або характерних обводів реальних фізичних полів (таких як температурне, вологістне або електричне) або об'єктів (технічних форм деталей машин і механізмів) відповідно. При цьому, якщо досліджувана функція несе інформацію про характер розвитку абстрактних процесів або систем (таких як економічні, фінансові чи соціальні), то доцільніше ігнорувати векторні компоненти градієнтного поля зовнішніх впливів, оскільки вони можуть привести до неінформативного розташування вільних вузлів шуканого дискретного образу.

У той же час, другий спосіб побудови дискретних каркасів кривих неявних функцій з використанням скінченно-різницевого співвідношення не вимагає складання і вирішення додаткової системи рівнянь стану зв'язків, а тому є більш легким і швидким в застосуванні. Його слабкою стороною є обмеження рівня досяжної точності моделювання.

На завершення слід зазначити, що кожен з представлених способів може бути цілком застосовним для вирішення різних класів

задач. Перший спосіб є універсальним і особливо цікавим, так як одержувані на основі його застосування дискретні образи представляють собою моделі реальних стрижневих (та/або вантових) безмоментних конструкцій, форма яких може з високою точністю відповідати безперервному аналогу графіків досліджуваних функцій. Даний спосіб дозволяє якісно розширити інструментальну базу архітекторів і конструкторів щодо вирішення завдань формотворення. Другий з розглянутих способів також може бути застосовний при проектуванні архітектурних форм і обводів технічних поверхонь, проте в більшості випадків лише на етапі побудови ескізів, оскільки точність його не достатня для вирішення завдань конструктивної надійності і стійкості.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Nishimura H., Hirai M., Kawai T., Kawata T., Shirakawa I., Omura K., 1985.** Object Modelling by Distribution Function and a Method of Image Generation. The Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan, J68D (4), 718.
2. **Andrew Witkin, Paul S. Heckbert., 1994.** Using Particles to Sample and Control Implicit Surfaces, SIGGRAPH 94, 269.
3. **Muraki S., 1991.** Volumetric Shape Description of Range Data Using "Blobby Model". Computer Graphics. July 1991, 25 (4), 227.
4. **R.van Kleij, 1993.** Display of Solid Models with Quadratic Surfaces. Ph.D. dissertation, Delft University of Technology, 167.
5. **Allgower E. L., Gnutzmann S., 1991.** Simplicial Pivoting for Mesh Generation of Implicitly Defined Surfaces. Computer Aided Geometric Design, Vol.8, 305-325.
6. **Скочко В.І., 2017.** Дискретна візуалізація плоских кривих, заданих функціями в неявній формі. Містобудування і територіальне планування. Вип.64, 372-383.
7. **Skochko V., 2015.** Morphogenesis and correction of planar rod constructions with a small amount of free nodes. Motrol: Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. Polish Academy of Sciences, Vol.17(8), 35-43.
8. **Kulikov P., Ploskiy O., Skochko V., 2014.** The Principles of Discrete Modeling of Rod Constructions of Architectural Objects. Motrol, Vol.16 (8), 3-10.

9. **Сукач М., 2016.** Друга міжнародна науково-практична конференція Підводні технології. Підводні технології, Вип.04, 4-15.
10. **Bilyk S., 2016.** Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data. Underwater technologies, Vol.04, 89-96.
11. **Cornell C.A., 2001.** A First-Order Reliability Theory for Structural Design. Solid Mechanics Division. Ontario, Canada, University of Waterloo, 56-64.
12. **Marti P., 2013.** Theory of Structures: Fundamentals, Framed Structures, Plates and Shells. John Wiley & Sons, Inc., Ernst & Sohn GmbH & Co. KG., XVI, 679.
13. **Narendra K., Amnasway A., 1988.** A Stable Adaptive Systems. Prentice-Hall, 350.
14. **Рабинович И., 1954.** Курс строительной механики стержневых систем. Часть 2. Статически неопределимые системы. Гостройиздат, 548.
15. **Рабинович И., 1946.** Строительная механика стержневых систем. Часть 2. Статически неопределимые системы. Стройиздат, 420.
16. **Rosenblatt F., 1962.** Principles of Neurodynamics. Perceptrons and the Theory of Brain Mechanisms, Spartan Books, 470.
17. **Narendra K., Amnasway A., 1988.** A Stable Adaptive Systems. Prentice-Hall, 350.
18. **Matsyulyavichyus D., 1965.** Synthesis of the optimal system of a flat rod statically determined construction of minimum weight. Structural mechanics. No 1, 102-107.
19. **Matsyulyavichyus D., 1969.** Synthesis of optimum configuration of hinge structure under dead load and weight. Lithuanian mechanical collection. No 2, 5-23.
20. **Gordeev V., 1974.** Research of multiple similar structures with parameters close to optimum. TsNIPIASS Publ., Vol.8, 12-15.
21. **Haykin S., 2006.** Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Second Edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1105.
4. **R.van Kleij, 1993.** Display of Solid Models with Quadratic Surfaces. Ph.D. dissertation, Delft University of Technology, 167.
5. **Allgower E. L., Gnatzmann S., 1991.** Simplicial Pivoting for Mesh Generation of Implicitly Defined Surfaces. Computer Aided Geometric Design, Vol.8, 305-325.
6. **Skocko V.I., 2017.** Dyskretna vizualizacija ploskyx kryvyx, zadanyx funkcijamy v nejavnij formi. Mistobuduvannja i terytorialne planuvannja, Vyp.64, 372-383 (in Ukrainian).
7. **Skochko V., 2015.** Morphogenesis and correction of planar rod constructions with a small amount of free nodes. Motrol: Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. Polish Academy of Sciences, Vol.17(8). 35-43.
8. **Kulikov P., Ploskiy O., Skochko V., 2014.** The Principles of Discrete Modeling of Rod Constructions of Architectural Objects. Motrol, Vol.16 (8), 3-10.
9. **Sukach M., 2016.** Друга mizhnarodna naukovo-praktichna konferencija Pidvodni tehnologii. Pidvodni tehnologii, Vyp.04, 4-15 (in Ukrainian).
10. **Bilyk S., 2016.** Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data. Underwater technologies, Vol.04, 89-96.
11. **Cornell C.A., 2001.** A First-Order Reliability Theory for Structural Design. Solid Mechanics Division. Ontario, Canada, University of Waterloo, 56-64.
12. **Marti P., 2013.** Theory of Structures: Fundamentals, Framed Structures, Plates and Shells. John Wiley & Sons, Inc., Ernst & Sohn GmbH & Co. KG., XVI, 679.
13. **Narendra K., Amnasway A., 1988.** A Stable Adaptive Systems. Prentice-Hall, 350.
14. **Rabinovich I., 1954.** Kurs stroitelnoy mehaniki stержnevyyh sistem. Chast 2. Sticheski neopredelimyie sistemyi. Gostroyizdat, 548 (in Russian).
15. **Rabinovich I., 1946.** Cтроitelnaya mehanika stержnevyyh sistem. Chast 2. Sticheski neopredelimyie sistemyi. Stroyizdat, 420 (in Russian).
16. **Rosenblatt F., 1962.** Principles of Neurodynamics. Perceptrons and the Theory of Brain Mechanisms, Spartan Books, 470.
17. **Narendra K., Amnasway A., 1988.** A Stable Adaptive Systems. Prentice-Hall, 350.
18. **Matsyulyavichyus D., 1965.** Synthesis of the optimal system of a flat rod statically determined construction of minimum weight. Structural mechanics. No 1, 102-107.
19. **Matsyulyavichyus D., 1969.** Synthesis of optimum configuration of hinge structure under

REFERENCES

dead load and weight. Lithuanian mechanical collection. No 2, 5-23.

20. **Gordeev V., 1974.** Research of multiple similar structures with parameters close to optimum. TsNIPIASS Publ., Vol.8, 12-15.
21. **Haykin S., 2006.** Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Second Edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1105.

Shaping of the frameworks of technical forms, which defined by implicit functions on a plane

Volodymyr Skochko

Abstract. During designing the shapes of working surfaces of machines and mechanisms, technological equipment, as well as complex building structures, which exposed to external forces, engineers and researchers resort to the use of physical and mathematical methods for obtaining the functions of appropriate forms. Very often, the functions of such forms must be constructed on the basis of analysis of the kinematics of the motion of constructive elements complex of the working equipment or on the basis of solving the systemic optimization tasks basing on the search for conditional extremums. As a result, the received functions take an implicit form, and the process of constructing their graphs consist in a search of individual isolines of the potential fields on the coordinate plane.

In this paper, the effectiveness of two methods of constructing discrete images of functions, defined on the plane in implicit form is considered. The first method involves the combined using of the finite difference method and formulas for finding derivatives of implicit functions of differential geometry. The second method provides the realization of the process of shaping a discrete analogue of the model of a physical grid structure with the subsequent control of the shape of this model to move its nodes to points that satisfy to given implicit function. An example of using both approaches is considered to compare the accuracy of the incidence of the obtained discrete models coordinates to the graph of the given implicit function. The advantages and disadvantages of the proposed approaches are analyzed.

Keywords: morphogenesis, discrete image, implicit functions, numerical methods, finite differences, differential geometry, parametric equations.