УДК 539.3

П.П. Лізунов, д-р техн. наук

ПРУЖНА РІВНОВАГА СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМУ СИЛОВОМУ ПОЛІ

Отримані співвідношення, які описують напружено-деформований стан безмоментної сферичної оболонки, що рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі.

Розглянемо задачу про напружено-деформований стан безмоментної сферичної оболонки, що є частиною споруди, центр мас якої рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі. Введемо наступні праві прямокутні системи координат: $O_aX_aY_aZ_a$ – абсолютну систему координат з початком в центрі гравітації; $OXYZ$ – орбітальну систему координат, вісь OZ якої є продовженням радіуса-вектора $\vec{\rho}_{(o)}$, проведеного з гравітаційного центру O_a в центр мас споруди, а вісь ОХ лежить в площині, що проходить через радіус-вектор $\vec{\rho}_{(o)}$ та вектор швидкості центру мас споруди. Будемо використовувати також систему координат O_{xyz}, осі якої направлені вздовж головних центральних осей інерції споруди. У випадку стаціонарного руху споруди в центральному силовому полі осі OZ та O_z співпадають. Введемо також криволінійну систему координат $O_1x_1x_2x_3$, пов'язану з недеформованою поверхнею оболонки.

Під час руху в центральному силовому полі на кожний елемент оболонки діє навантаження, що складається з гравітаційних та інерційних сил

$$\vec{q}=\vec{q}^{\,g}+\vec{q}^{\,J}. \qquad (1)$$

Вектор гравітаційного навантаження, що діє на одиничний елемент поверхні оболонки, визначається за формулою

$$\vec{q}^{\,g}=-\frac{\gamma\rho h\vec{r}^{\,*}}{r^2}, \qquad (2)$$

де $\gamma=f\,M_0$; f – гравітаційна стала; M_0 – маса гравітаційного центру; ρ – щільність матеріалу оболонки; h – її товщина; $\vec{r}^{\,*}$ – одиничний вектор, який визначається співвідношенням $\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{r}^{\,*}$; $\vec{r}$ – радіус-вектор елемента оболонки в системі координат $O_aX_aY_aZ_a$; $r=\left|\vec{r}\right|$.

Модуль радіуса-вектора $\vec{r}$ визначається формулою [1]

$$r=\left[\rho_{(o)}^2-2\rho_{(o)}\left(R\cos x_1-e\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (3)$$

де R – радіус кривизни оболонки; e – відстань між центром кривизни оболонки і центром мас споруди.

Підставивши (3) в формулу (2), маємо вираз для модуля гравітаційної сили, що діє на одиничний елемент серединної поверхні оболонки

$$q^g = \gamma\rho h[\rho_{(o)}^2 - 2\rho_{(0)}(R\cos x_1 - e)]^{-1}. \qquad (4)$$

Складові гравітаційної сили, що діють в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 криволінійної системи координат, мають такий вигляд [1]:

$$q_{x_1}^g = -\frac{\gamma\rho h}{\rho_{(o)}^2}[1 + \frac{2}{\rho_{(o)}}(R\cos x_1 - e)]\sin x_1;$$

$$q_{x_2}^g = 0;$$

$$q_{x_3}^g = -\frac{\gamma\rho h}{\rho_{(o)}^2}[1 + \frac{2}{\rho_{(o)}}(R\cos x_1 - e)]\cos x_1. \qquad (5)$$

Вектор інерційного навантаження, діючого на елемент оболонки, визначається за формулою

$$\vec{q}^{\,J} = -\rho h\vec{a}, \qquad (6)$$

де $\vec{a}$ – вектор абсолютного прискорення елемента оболонки, проекції якого на координатні лінії x_1, x_2, x_3 криволінійної системи координат мають вигляд [1]:

$$a_{x_1} = -\omega_o^2(\rho_{(o)} + e - R\cos x_1 \sin^2 x_2)\sin x_1;$$

$$a_{x_2} = \omega_o^2 R\sin x_1 \sin x_2 \cos x_2;$$

$$a_{x_3} = -\omega_o^2\left[\rho_{(o)} + e - R(\sin^2 x_1 \cos x_2 + \cos x_1)\cos x_2\right]. \qquad (7)$$

З урахуванням співвідношень (7) отримуємо проекції вектора інерційного навантаження, діючого на елемент оболонки в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3:

$$q_{x_1}^J = \rho h\omega_0^2(\rho_{(o)} + e - R\cos x_1 \sin^2 x_2)\sin x_1;$$

$$q_{x_2}^J = -\rho h\omega_0^2 R\sin x_1 \sin x_2 \cos x_2;$$

$$q_{x_3}^J = \rho h\omega_0^2[\rho_{(o)} + e - R(\sin^2 x_1 \cos x_2 + \cos x_1)]\cos x_2. \qquad (8)$$

Додаючи відповідні праві частини виразів (5) і (8), з урахуванням умови $\gamma/\rho_{(o)}^3 = \omega_o^2$ рівноваги гравітаційних та інерційних навантажень в центрі мас споруди, отримуємо складові вектора повного навантаження, що діє на елемент оболонки вздовж координатних ліній x_1, x_2, x_3:

$$q_{x_1} = \rho h\omega_o^2[3(e - R\cos x_1) + R\cos x_1 \cos^2 x_2]\sin x_1;$$

$$q_{x_2} = -\rho h \omega_o^2 R \sin x_1 \sin x_2 \cos x_2;$$

$$q_{x_3} = \rho h \omega_o^2 [(e - R\cos x_1)(2\cos x_1 + \cos x_2) - R\sin^2 x_1 \cos^2 x_2]. \quad (9)$$

Диференціальні рівняння руху безмоментної сферичної оболонки мають вигляд [1, 2]

$$\frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + 2N_{12}\operatorname{ctg} x_2 + Rq_{x_1} = 0,$$

$$\frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + (N_{22} - N_{11})\operatorname{ctg} x_2 + Rq_{x_2} = 0,$$

$$-N_{11} - N_{22} + Rq_{x_3} = 0, \quad (10)$$

де N_{11}, N_{22}, N_{12} – зусилля в серединній поверхні оболонки, які визначаються наступними формулами:

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22});$$

$$N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11});$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}, \quad (11)$$

де ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} – компоненти тензора деформацій, які виражаються через складові вектора переміщень елемента оболонки u, υ, w вздовж координатних ліній x_1, x_2, x_3 таким чином:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \upsilon\operatorname{ctg} x_2 + w\right);$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2} + w\right);$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - u\operatorname{ctg} x_2 + \frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}\right); \quad (12)$$

E – модуль пружності матеріала оболонки; ν – коефіцієнт Пуассона.

Система диференціальних рівнянь, що описують пружну рівновагу безмоментної сферичної оболонки в центральному силовому полі, з урахуванням виразів (9) – (12), має вигляд:

$$\frac{E}{R^2(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (1+\nu)\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1+\nu}{2\sin x_1}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_1 \partial x_2} + \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu-3}{2}\frac{\operatorname{ctg} x_1}{\sin x_1}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2} - (\nu + \operatorname{ctg}^2 x_1)u + \frac{1-\nu}{2\sin^2 x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right] =$$

$$=\rho\omega_0^2\left[3(R\cos x_1-e)-R\cos x_1\cos^2 x_2\right]\sin x_1,$$

$$\frac{E}{R^2(1-\nu^2)}\left[\frac{1+\nu}{2\sin x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_1^2}+\operatorname{ctg}x_1\frac{\partial\upsilon}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{\sin^2 x_1}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_2^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3-\nu}{2}\frac{\operatorname{ctg}x_1}{\sin x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{1+\nu}{\sin x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}+\frac{(1-\nu)(1-2\cos^2 x_1)}{2\sin^2 x_1}\upsilon\right]=\rho\omega_0^2 R\sin x_1\sin x_2\cos x_2,$$

$$\frac{E}{R^2(1-\nu^2)}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu\left(\frac{1}{\sin x_1}\frac{\partial\upsilon}{\partial x_2}+u\operatorname{ctg}x_1\right)-\right.\right.$$

$$\left.-(1+\nu)w\right]\left(1+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)+\left[\nu\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{\sin x_1}\frac{\partial\upsilon}{\partial x_2}+u\operatorname{ctg}x_1-\right.$$

$$\left.\left.-(1+\nu)w\right]\left[1+\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin^2 x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\operatorname{ctg}x_1\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\right]\right\}=$$

$$=\rho\omega_0^2\left[(R\cos x_1-e)(2\cos x_1+\cos x_2)+R\sin^2 x_1\cos^2 x_2\right]. \qquad (13)$$

Інтегруючи рівняння (13), можна визначати внутрішні зусилля розтягу, які підтримують задану форму сферичної оболонки, що рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гуляев В.И., Лизунов П.П.* Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении. – К.: Вища школа, 1989. –199 с.
2. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. –314 с.

Стаття надійшла до редакції 10.06.2013 р.

Лизунов П.П.

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Получены соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние безмоментной сферической оболочки, движущейся по круговой траектории в центральном силовом поле.

Lizunov P.

EQUILIBRIUM ELASTIC SPHERICAL SHELL IN A CENTRAL FORCE FIELD

These ratios, which describe the stress-strain state moment free spherical shell that moves on a circular path in a central force field.