

УДК 539.3

В.К. Чибіряков, д-р техн. наук
А.М. Смоляр, канд. техн. наук
І.В. Мірошкіна, канд. техн. наук
В.О. Чумак

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ АНАЛІТИЧНОЇ МОДЕЛІ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОРОТКОГО БРУСА

В статті запропонована аналітично-чисельна методика визначення напружено-деформованого стану просторового тіла прямокутного поперечного перерізу. По поперечних координатах застосовуються скінченні синус- та косинус-перетворення Фур'є, а по поздовжній – узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень. Алгебраїчні рівняння розв'язуються за методом Гауса. В статті приведені ізолінії напружено-деформованого стану короткого бруса.

Надійність та економічність є основними вимогами, що ставляться сучасною технікою і будівництвом до конструкцій та елементів конструкцій. Задоволення перерахованих вимог залежить від використання сучасних конструктивних форм, застосування нових матеріалів і нових технологій обробки матеріалів задля отримання необхідних змін їхніх фізико-механічних властивостей, а також врахування реальних умов експлуатації конструкцій і реальних змін фізико-механічних властивостей під час виготовлення та експлуатації. Виконання поставлених задач передбачає створення нових більш потужних математичних моделей і використання сучасних чисельних методів для їхньої реалізації. Особливо гостро постають перераховані проблеми в задачах розрахунку масивних конструкцій і їхніх елементів.

Сучасний рівень розвитку методу скінченних елементів, методу скінченних різниць, варіаційно-різницевого методу і їхня практична реалізація на ЕОМ дозволяє розв'язувати ці задачі в найбільш загальній постановці. Основними недоліками прямих чисельних методів є складність їхньої програмної реалізації, значна ресурсоемність, повільна збіжність.

Необхідно також зазначити, що розвиток системного забезпечення загальних чисельних методів до теперішнього часу вичерпав ресурси підвищення їхньої ефективності засобами програмування. У зв'язку з цим з'явилася тенденція – розвиток загальних чисельних методів пов'язувати з використанням комбінованих підходів, основаних на раціональному поєднанні аналітичних і чисельних методів. Основна ідея такого підходу

– це використання аналітичних методів для зниження вимірності просторової задачі теорії пружності з подальшим розв’язуванням редукованих рівнянь, визначених на області меншої вимірності, чисельними методами. Ця ідея лежить в основі відомого методу потенціалу (методу граничних інтегральних рівнянь, методу граничних елементів). До цього напрямку також відноситься побудова ефективних розрахункових моделей масивних тіл на базі поєднання аналітичних методів з методом скінченних елементів[1, 2, 3] та іншими чисельними методами [4, 5, 6, 7].

Пропонуємо аналітично-чисельну методику розрахунку напружено-деформованого стану просторових тіл. Тестування методик проведемо на прикладі короткого бруса. Короткий брус у будівельній механіці є зручною геометричною формою для постановки та розв’язання тестових задач.

Коротким брусом будемо називати прямокутний паралелепіпед (рис. 1). Чотири вертикальні (торцеві) грані бруса оперті шарнірно, горизонтальні (бокові) грані – вільні від зв’язків. Брус по одній з бокових поверхонь знаходиться під дією рівномірно-розподіленого навантаження q_z^- .

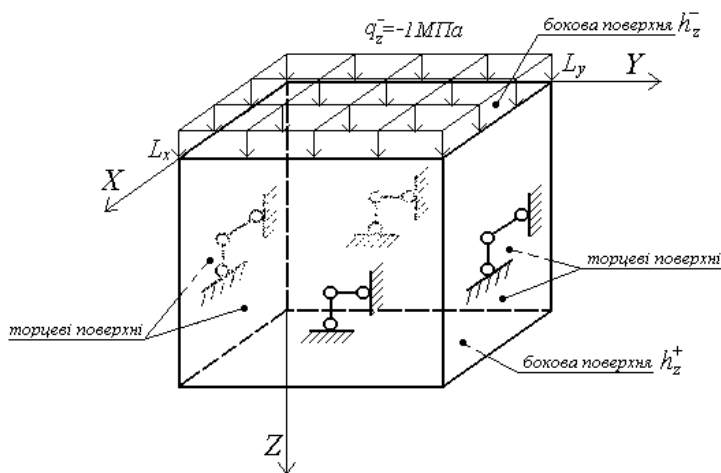


Рис.1. Розрахункова схема короткого бруса

Напружено-деформований стан короткого бруса описується рівняннями просторової задачі теорії пружності:

$$\sum \partial_i \sigma_{ij} + F_i = 0,$$

$$\sigma_{ii} = \sum (\lambda + 2\mu) u_i - \sum_{j \neq i} 2\mu u_j, \quad \sigma_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i, \quad (1)$$

де $i,j=1,2,3$ - осі декартової системи координат x,y,z ; σ_{ij} - тензор напружень; u_i - вектор переміщень; λ, μ - параметри Ламе; F_i - об'ємні сили.

Краєві умови на торцевих гранях мають вигляд:

$$\begin{aligned} X = 0 : \sigma_x &= 0, v = 0, w = 0; \\ X = L_x : \sigma_x &= 0, v = 0, w = 0; \\ Y = 0 : \sigma_y &= 0, u = 0, w = 0; \\ Y = L_y : \sigma_y &= 0, u = 0, w = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

На бокових гранях – задані напруження.

Поставлену крайову задачу (1)-(2) просторової теорії пружності для короткого бруса розв'язуємо, застосовавши по координаті z проєкційний метод [8], а по координатах x та y – перетворення Фур'є [2].

Уздовж координати z всі функції системи рівнянь (1) розкладаємо в ряд по поліномах Лежандра. Ця процедура проєкційного методу у формі операційного обчислення названа узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень [8]. Згідно з цим методом, всім елементам системи (1) ставляться у відповідність їхні зображення з таблиці проєкційних співвідношень [8].

Рівняння редукованої системи являють собою коефіцієнти розкладів функцій та операторів вихідних рівнянь (1) у ряд по поліномах Лежандра, тому отримані співвідношення залежать лише від двох координат x та y . Кількість рівнянь залишилась незмінною. В силу того, що поліноми Лежандра не є власними функціями операторів вихідної задачі (1)-(2), отримані співвідношення зв'язані.

Далі по координатах x та y застосовуємо синус- та косинус-перетворення Фур'є [2] на скінченних відрізках $[0, L_x]$ та $[0, L_y]$ відповідно. Для заданих крайових умов на торцевих площинах – шарнірне спирання – синуси та косинуси будуть власними функціями операторів вихідної задачі (1)-(2).

Вибір синус- чи косинус-перетворень визначається виглядом граничних умов (2). Так, для однорідних крайових умов $f(x, y)|_{x=0} = 0$, $f(x, y)|_{x=L_x} = 0$, $f(x, y)|_{y=0} = 0$ та $f(x, y)|_{y=L_y} = 0$ користуємося скінченим синус-перетворенням Фур'є, в інших випадках - скінченим косинус-перетворенням Фур'є.

Виходячи із заданих граничних умов (2), функції $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}, u, w$ на відрізьку $[0, L_y]$ будуть розкладатися в скінченний ряд по синусах:

$$f(x, y) \cong \sum_{m=1}^M f_s^m(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right),$$

де $f_s^m(x) = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \int_0^L f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) dy$, а функції τ_{xy}, τ_{yz}, v - у скінченний ряд по косинусах:

$$f(x, y) \cong \sum_{m=1}^M f_c^m(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right),$$

$$\text{де } f_c^m(x) = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \int_0^L f(x, y) \cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) dy.$$

У приведених формулах $m=1, 2, \dots, M_y$ - номер гармоніки, індекс s , вказує на синус-перетворення Фур'є, а індекс c - на косинус-перетворення Фур'є.

Для спрощення викладок, визначаємо скінченні синус- та косинус-перетворення Фур'є так:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\rightarrow f_s^m(x), \\ f(x, y) &\rightarrow f_c^m(x), \quad m=1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (3)$$

де $f(x, y)$ - будемо називати оригіналом, а $f_s^m(x)$ ($f_c^m(x)$) - зображенням по синусах (косинусах). Вираз (3) означає, що функції $f(x, y)$ ставиться у відповідність скінченний набір коефіцієнтів $f_s^m(x)$ ($f_c^m(x)$).

Провівши деякі аналітичні перетворення легко встановити, що синус- та косинус-перетворення Фур'є для похідних по y мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &\rightarrow \frac{\partial f_s^m(x)}{\partial y} = -\frac{m\pi}{L_y} f_c^m(x), \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &\rightarrow \frac{\partial f_c^m(x)}{\partial y} = \frac{m\pi}{L_y} f_s^m(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Вирази (4) доповнюють співвідношення (3). Аналогічно визначаються скінченні синус- та косинус-перетворення Фур'є уздовж координати x .

Після формальної підстановки у вихідні рівняння (1) уздовж координат x та y замість оригіналів функцій та операторів

диференціювання їхніх зображень згідно (3), (4), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь. Для зручності подальших перетворень, виключаємо з цієї системи рівнянь компоненти напружень - записуємо її рівняння в переміщеннях. Після перетворень розрахункова система алгебраїчних рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 & \left(-\left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^2 (\lambda + 2\mu) - \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \mu - \frac{4\mu}{h_z^2} m^{ji} m^{jk} \right) u_{s,c}^{i,m,n} + \left(-\frac{m\pi^2}{L_x L_y} \lambda - \frac{m\pi^2}{L_x L_y} \mu \right) v_{c,s}^{i,m,n} + \\
 & + \left(\frac{n\pi}{L_x} \frac{2\lambda}{h_z} m^{ij} - \frac{n\pi}{L_x} \frac{2\mu}{h_z} m^{ji} \right) w_{s,s}^{i,m,n} + \frac{1}{\sqrt{h_z}} \left[\tau_{xz,s,c}^{+,m,n} - \tau_{xz,s,c}^{-,m,n} (e_1^{ij} - e_2^{ij}) \right] p_0^{ij} + X_{s,c}^{i,m,n} = 0, \\
 & \left(-\frac{m\pi^2}{L_x L_y} \lambda - \frac{m\pi^2}{L_x L_y} \mu \right) u_{s,c}^{i,m,n} + \left(-\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 (\lambda + 2\mu) - \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \mu - \frac{4\mu}{h_z^2} m^{ji} m^{jk} \right) v_{c,s}^{i,m,n} + \\
 & + \left(\frac{n\pi}{L_y} \frac{2\lambda}{h_z} m^{ij} - \frac{n\pi}{L_y} \frac{2\mu}{h_z} m^{ji} \right) w_{s,s}^{i,m,n} + \frac{1}{\sqrt{h_z}} \left[\tau_{yz,c,s}^{+,m,n} - \tau_{yz,c,s}^{-,m,n} (e_1^{ij} - e_2^{ij}) \right] p_0^{ij} + Y_{c,s}^{i,m,n} = 0, \\
 & \left(\frac{n\pi}{L_x} \frac{2\lambda}{h_z} m^{ji} - \frac{n\pi}{L_x} \frac{2\mu}{h_z} m^{jj} \right) u_{s,c}^{i,m,n} + \left(\frac{m\pi}{L_y} \frac{2\lambda}{h_z} m^{ji} - \frac{m\pi}{L_y} \frac{2\mu}{h_z} m^{jj} \right) v_{c,s}^{i,m,n} + \\
 & + \left(-\left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \mu - \left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^2 \mu - \frac{4(\lambda + 2\mu)}{h_z^2} m^{ij} m^{ji} \right) w_{s,s}^{i,m,n} + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{h_z}} \left[\sigma_{z,s,s}^{+,m,n} - \sigma_{z,s,s}^{-,m,n} (e_1^{ij} - e_2^{ij}) \right] p_0^{ij} + Z_{s,s}^{i,m,n} = 0. \tag{5}
 \end{aligned}$$

У приведеній формулі (5) $n = 1, 2, \dots, M_x$ - номер гармоніки по координаті x .

Для повної постановки редукованої крайової задачі, систему алгебраїчних рівнянь (5) доповнюємо редукованими граничними умовами. Уздовж осі z на боковій поверхні h_z^- бруса діє постійне рівномірно розподілене навантаження $\sigma_z^- = -1 \text{ МПа}$. Визначаємо коефіцієнти розкладу цього навантаження уздовж координатних осей x та y :

$$\sigma_{z,s,s}^{-,m,n} = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \int_0^{L_x} \left(\sqrt{\frac{2}{L_y}} \int_0^{L_y} (-1) \sin\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) dy \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{L_x}} \int_0^{L_x} \left(\sqrt{\frac{2}{L_y}} \frac{L_y}{m\pi} (\cos(m\pi) - 1) \sin\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) \right) dx = \\
&= \frac{2L_y}{m\pi} (\cos(m\pi) - 1) \frac{L_x}{n\pi} (-\cos(n\pi) + 1) = \frac{2L_x L_y}{nm\pi^2} (\cos(m\pi) - 1)(-\cos(n\pi) + 1). \quad (6)
\end{aligned}$$

Система рівнянь (5), на відміну від вихідної системи (1), складається з алгебраїчних рівнянь, до того ж вона містить лише три невідомі компоненти-зображення елементів напружено-деформованого стану. Рівняння системи (5) зв'язані по поліномах Лежандра і незалежні відносно гармонік m та n . Це означає, що кожній гармоніці відповідає своя система алгебраїчних рівнянь (5). Розв'язок такої системи можливо отримати точно за допомогою методу виключення Гауса. Цей метод покладено в основу розробленого алгоритму.

Для кожної пари гармонік m та n за методом Гауса розв'язуємо відповідну систему алгебраїчних рівнянь. З отриманих розв'язків (зображень) у кожній точці видачі результатів по координаті $z = [h_z^-, h_z^+]$ знаходимо скінченні суми розкладів по поліномах Лежандра. В цих точках по координаті $y = [0, L_y]$ скінченні суми розкладів по поліномах

Лежандра перемножуємо з відповідними значеннями $\sin\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right)$ чи

$\cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right)$ і складаємо в призначених точках, в яких по координаті

$x = [0, L_x]$ отриманні суми перемножуємо з відповідними значеннями

$\sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right)$ чи $\cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right)$ і також складаємо в точках видачі результатів

короткого бруса. Таким чином визначаємо компоненти напружено-деформованого стану (оригінали) просторового бруса.

Описаний алгоритм покладений в основу розробленого програмного комплексу «Інтеграл-брус», за допомогою якого отримано чисельні результати для короткого бруса (рис. 1). Деякі компоненти повного тензора напружень та вектора переміщень візуалізовані у вигляді ізоліній для середніх перерізів бруса (рис. 2).

Для розробленого алгоритму на описаній вище тестовій задачі було проведено дослідження збіжності граничних умов у залежності від кількості поліномів та гармонік. При степені поліноміальності

апроксимації $N=6$ достатня збіжність граничних умов (похибка не перевищує 5%) досягалася при кількості гармонік десять-дванадцять.

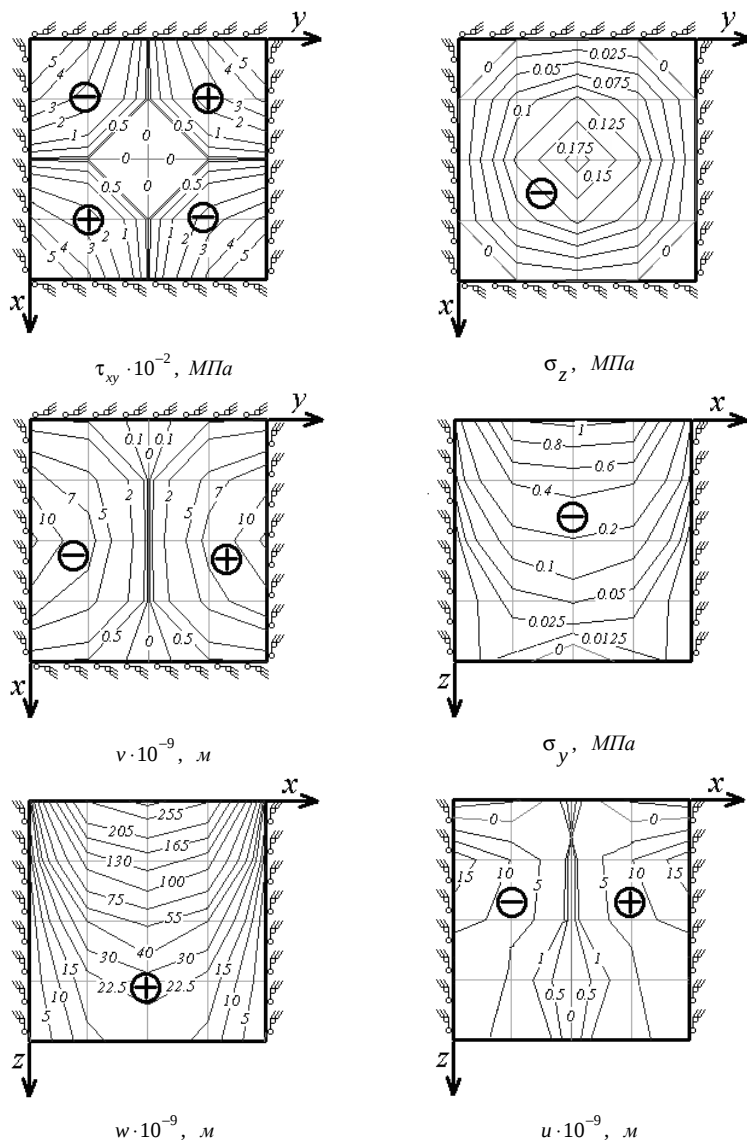


Рис. 2. Ізолнії вектора переміщень та тензора напружень

При степені апроксимації $N=8$ та кількості гармонік Фур'є тридцять - тридцять п'ять було досягнуто майже точної збіжності граничних умов (похибка не перевищує 1%).

З приведених чисельних результатів (рис. 2) можна зробити висновок про просторовий характер напружено-деформованого стану короткого бруса. При вказаних вище параметрах проведення чисельного процесу спостерігається симетрія результатів для компонент $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}, u, w$ відносно координатної осі x , та $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, v, w$ - відносно осі y , а також коса симетрія для компонент τ_{xy}, τ_{yz}, v відносно осі x , та τ_{xy}, τ_{xz}, u - відносно осі y . Красіві умови на торцевих поверхнях за розробленою методикою задовольняються точно, незалежно від степенів апроксимації по координатах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Зенкевич О.К.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
2. *Корнеев В.Г., Розин Л.А.* Дифференциальная форма метода конечных элементов применительно к задачам теории упругости // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 297-306.
3. *Гуляев А.И.* Об одном методе расчета пространственных конструкций на основе полуаналитического варианта МКЭ для замкнутых некруговых конечных элементов // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1984. – Вып. 44. – С. 44-46.
4. *Григоренко Я.М. и др.* Статика анизотропных толстостенных оболочек / Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. – Киев: Вища школа, 1985. – 190 с.
5. *Лисицын Б.М.* Об одном методе решения задач теории упругости // Прикл. механика. – 1967. – Т.3. - № 4. – С. 85-92.
6. *Лисицын Б.М., Вериженко В.Е.* Об одном направлении развития метода конечных элементов // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14. - № 4. – С. 33-40.
7. *Леонтьев Н.Н.* К решению плоской задачи теории упругости вариационным методом Власова в матричной формулировке // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1970. - № 1. – С. 68-74.
8. *Чибіряков В.К., Смоляр А.М.* Теорія товстих пластин та оболонок: Монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.

Стаття надійшла до редакції 16.03.2011 р.

Чибиряков В.К., Смоляр А.М., Мирошкина И.В., Чумак В.А.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОРОТКОГО БРУСА

В статье предлагается аналитически-численная методика определения напряженно-деформированного состояния пространственного тела прямоугольного поперечного сечения. По поперечных координатах применяются конечные синус- и косинус-преобразования Фурье, а по продольной - обобщенный метод конечных интегральных преобразований. Алгебраические уравнения решаются методом Гаусса. В статье приведены изолинии напряженно-деформированного состояния короткого бруса.

Chybiryakov V., Smolyar, A., Miroshkina I., Chumak V.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE ANALYTICAL MODEL OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A SHORT SQUARED BEAM

In this article we propose an analytic-numerical method of determining the stress-strain state of a spatial body of rectangular cross section. On the transverse coordinates applied finite sine and cosine Fourier transform, and in the longitudinal - a generalized method of integral transforms. Algebraic equations are solved by Gauss method. The article shows the isolines of the stress-strain state of a short squared beam.