

УДК 539.3

І.І. Солодей, канд. техн. наук,

О.І. Гуляр, д-р техн. наук

М.О. Вабіщевич

А.Ю. Приходько

Б.І. Сизевич

УЗАГАЛЬНЕНА МАТРИЦЯ МАС НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

В рамках напіваналітичного метода скінченних елементів побудовано узагальнену матрицю мас неоднорідних скінченних елементів в задачах дослідження стаціонарних та нестаціонарних коливань призматичних прямокутних тіл та тіл обертання із складною формою та структурою поперечного перерізу, що знаходяться під дією навантажень різної інтенсивності та тривалості у часі.

Вступ.

Широке коло реальних будівельних конструкцій являють собою неоднорідні тіла обертання та призматичні тіла складної форми. До них відносяться градирні, водонапірні башти, захисні оболонки АЕС, покриття, перекриття, фундаменти промислових і цивільних будівель та споруд і т.і. В процесі експлуатації такі об'єкти знаходяться під дією динамічних навантажень, доволіно орієнтованих у просторі та часі. Для визначення найбільш небезпечних з погляду міцності конструкцій значень параметрів напружено-деформованого стану необхідно простежити весь процес деформування, що призводить до необхідності розв'язання нестационарних просторових задач. Важливими ознаками перелічених об'єктів, що ускладнюють аналіз їх поведінки, є складна структура та конфігурація поперечного перерізу, а також неоднорідність властивостей матеріалу в усіх трьох напрямках, яка може визначатися найрізноманітнішими причинами: технологією виготовлення, впливом зовнішніх полів (температури, радіаційного опромінення і т.і.) та конструктивною неоднорідністю. Це зумовлює не тільки змінність характеристик жорсткості, але і щільності матеріалу, як в поперечному перерізі так і вздовж направляючої конструкції. При цьому зміна фізико-механічних характеристик може носити як континуальний, так і дискретний характер, а їх кількісна відмінність знаходиться в широкому діапазоні значень постійних матеріалу, що може включати граничний випадок, коли тіло має вирізи, які порушують суцільність об'єкта.

Зважаючи на складність поставленої задачі, її розв'язання потребує застосування чисельних методів. В наш час найбільш універсальним чисельним методом, що застосовується в наукових дослідженнях, особливо для розрахунку складних об'єктів, є метод скінченних елементів (МСЕ). Застосування традиційного варіанта методу скінченних елементів для розв'язання просторових задач динаміки проблематично, у зв'язку із значними обчислювальними труднощами. Істотно підвищити ефективність МСЕ дозволяє його поєднання з методом розділу невідомих. Цей підхід одержав назву напіваналітичного метода скінченних елементів (НМСЕ). НМСЕ був запропонований в роботі [7] як ефективний метод розв'язання просторових задач теорії пружності для невісесиметрично навантажених тіл обертання. Висока ефективність напіваналітичного варіанта у порівнянні з традиційним МСЕ зумовлена, у класичному випадку, зведенням просторової задачі до ряду двовимірних.

Не дивлячись на те, що дослідження просторового динамічного напружено-деформованого стану методом скінченних елементів є одним із найважливіших напрямків сучасної будівельної механіки та механіки деформованого твердого тіла, залишаються суттєві труднощі, які зумовлені високою розмірністю математичної моделі МСЕ та великим об'ємом інформації, що звужують область його використання для розв'язання складних просторових задач динаміки. Об'єктами, що розглядаються, як правило у двовимірній постановці, залишаються пружні вісесиметричні тіла та оболонки обертання.

Розробка ефективних методів розв'язання задач з великою кількістю невідомих, що виникають при використанні метода скінченних елементів до розрахунку конструкцій споруд та об'ємних тіл складної форми суттєво розширює можливості МСЕ програм, що орієнтовані на доступні рядовому користувачу комп'ютери класу ПК, значно зменшують час аналізу, що в свою чергу веде до зменшення термінів виконання проекту і як слідство - його кошторису.

1. Основні співвідношення просторової задачі теорії пружності для неоднорідних призматичних тіл та тіл обертання при динамічному навантаженні.

Розглядаються системи неоднорідних ізотропних тіл обертання та призматичних тіл, що знаходяться під дією довільного динамічного навантаження на інтервалі часу $T \in [t_0, t_1]$. Опис геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в ортогональній круговій циліндричній або декартовій системі координат Z^i , що в подальшому називається базисною. Для подання напружено-деформованого стану тіла

із складною формою поперечного перетину запроваджується місцева криволінійна система координат x^i , яка пов'язана з геометрією тіла.

Переміщення будь-якої точки тіла визначається компонентами в базисній системі координат $u_{i'}$. Компоненти тензору деформацій в місцевій системі координат виражаються через компоненти переміщень в базисній [2]:

Тіла обертання	Призматичні тіла
$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',\beta} + z_{,\beta}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right)$ $\epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left(u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',3} - \frac{2z_{,\alpha}^{2'} u_{3'}}{Z^{2'}} \right)$ $\epsilon_{33} = u_{3',3} + Z^{2'} u_{2'}$	$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',\beta} + z_{,\beta}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right)$ $\epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left(a u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',3} \right)$ $\epsilon_{33} = a u_{3',3}$

(1)

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [2]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (2)$$

В ізотропному тілі компоненти тензора пружних сталих d^{ijkl} пов'язані з коефіцієнтами Ламе λ і μ співвідношеннями [8]:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}), \quad (3)$$

де $\lambda = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)}$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$; $E = E(Z^{i'})$, $\nu = \nu(Z^{i'})$ - значення

модуля пружності і коефіцієнта Пуассона в точці тіла, що розглядається.

Рух неоднорідного ізотропного тіла, об'ємом V , обмеженого поверхнею S описується рівнянням, що є наслідком принципу Даламбера, покомпонентна форма якого в криволінійній системі координат приймає вигляд [2, 8]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} z_{,k}^{j'} \sigma^{ki} \right) + f^{j'} = \rho \ddot{u}^{j'}. \quad (4)$$

Однозначність розв'язання (4) забезпечується запровадженням відповідних початкових і граничних умов.

Початкові умови становить відомий розподіл переміщення та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу t_0 , який приймається за початок часової координати:

$$u(Z^{i'}, t_0) = u_0(Z^{i'}), \quad \dot{u}(Z^{i'}, t_0) = \dot{u}_0(Z^{i'}), \quad Z^{i'} \in V. \quad (5)$$

При цьому припускається, що на частині поверхні S_u задані кінематичні граничні умови:

$$u(Z^{i'}, t) = \tilde{u}(Z^{i'}, t), \quad Z^{i'} \in S_u, \quad (6)$$

а на поверхні S_p з нормаллю $\vec{n} = n_j e^j$ - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z_i^{k'} \sigma^{ij} n_j = \tilde{p}(Z^{k'}, t), \quad Z^{k'} \in S_p. \quad (7)$$

Диференційне рівняння (4) з граничними умовами (7) еквівалентно варіаційному принципу Гамільтона [3, 6]:

$$\int_V \rho \dot{u}^{i'} \delta u_{i'} dV + \int_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} dV - \int_V f^{i'} \delta u_{i'} dV - \int_{S_p} p^{i'} \delta u_{i'} dS = 0, \quad (8)$$

де $\tilde{\sigma}^{ij}$, $\tilde{\epsilon}_{ij}$ - фізичні компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно.

2. Неоднорідні скінченні елементи НМСЕ для задачі динаміки.

Для дискретизації неоднорідних просторових тіл при динамічному навантаженні застосовуються кільцевий та призматичний скінченні елементи [1, 2, 5] (рис. 1).

Щільність матеріала, компоненти тензора пружних постійних і метричного тензора в області поперечного перерізу елемента вважаються незмінними. Напротивагу цьому постійні матеріала і напруження довільно змінюються вздовж осі x^3 і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування.

В площині перетину елемента прийнято білінійне розподілення переміщень, швидкостей та прискорень:

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} \prod_{n=1}^2 \left(S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$

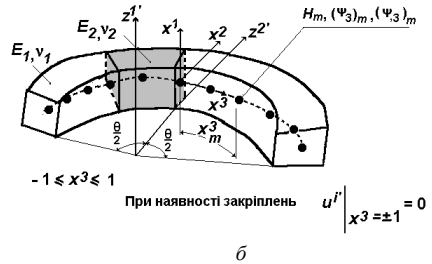
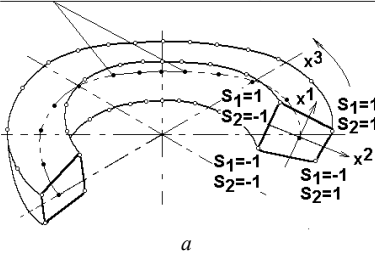
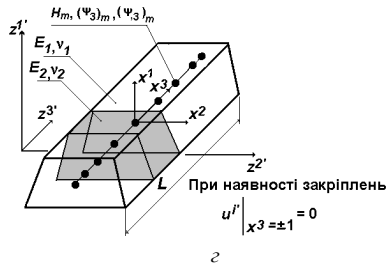
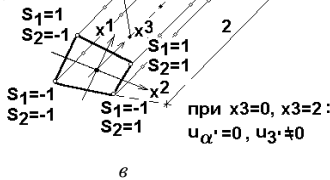
Точки інтегрування $d^{ijkl}(x^3), \rho(x^3), \sigma^{ij}(x^3)$ Точки інтегрування
 $d^{ijkl}(x^3), \rho(x^3),$
 $\sigma^{ij}(x^3)$ 

Рис. 1. Неоднорідні скінченні елементи НМСЕ:

а) замкнений кільцевий; б) незамкнений кільцевий; в) шарнірно опертий призматичний; г) призматичний із довільними граничними умовами на торцях

Для обчислення компонент тензора деформацій використовується моментна схеми скінченного елемента (МССЕ) [4].

Для апроксимації переміщень, швидкостей та прискорень в напрямку утворюючої використовується система координатних функцій $\psi_{k'}^l$:

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} = \sum_{l=l_0}^L (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^l \psi_{(k')}^l, \quad (10)$$

де для кільцевого замкнутого СЕ на основі рядів Фур'є:

$$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \cos lx^3, \quad \psi_{3'}^l = \sin lx^3, \quad l_0 = 0, \quad 0 \leq x^3 \leq 2\pi \quad (11)$$

призматичного СЕ на основі рядів Фур'є:

$$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3, \quad \psi_{3'}^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3, \quad l_0 = 1, \quad 0 \leq x^3 \leq 2 \quad (12)$$

кільцевого незамкненого та призматичного СЕ із довільними граничними умовами на торцях (ψ^l – поліноми Лагранжа при $l = 0, 1$ і Міхліна при $l = 2, \dots, L$):

$$\begin{aligned}\psi_{k'}^0 &= \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \psi_{k'}^1 = \frac{1}{2}(1+x^3), \quad -1 \leq x^3 \leq 1, \\ \psi_{k'}^l &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2 - 1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{s=0}^l \frac{(-1)^s (l+s)!}{(l-s)! (s!)^2 2^{s+1}} \left[(1-x^3)^s + (-1)^l (1+x^3)^s \right].\end{aligned}\quad (13)$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ способом.

3. Узагальнена матриця мас НМСЕ в задачах стаціонарних та нестаціонарних коливань просторових тіл.

Специфіка напіваналітичного варіанта методу скінченних елементів така, що за невідомі приймаються амплітудні компоненти векторів переміщень, швидкостей та прискорень. При цьому задача їх визначення зводиться до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку для моменту часу τ , яка записується у формі:

$$[M]_{lm} \{\ddot{U}\}^m + [K]_{lm} \{U\}^m = \{Q\}_l. \quad (14)$$

Матрична форма (14) є традиційним записом розрахункової системи рівнянь, яка отримана після просторової дискретизації внаслідок підстановки (9)-(13) до (8). Матриці $[M]_{lm}$, $[K]_{lm}$ та вектор $\{Q\}_l$ отримані внаслідок обходу скінченно-елементної області та процедури асамблювання відповідних компонент матриць $[m]_{lm}$, $[k]_{lm}$ та вектору $\{q\}_l$ елементів відповідно. Вектори $\{U\}^m$ та $\{\ddot{U}\}^m$ зкомпоновані з переміщень і прискорень вузлів повної скінченноелементної моделі.

У загальному випадку варіація кінетичної енергії скінченного елемента в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\delta K = - \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \ddot{u}^{k'} \delta u_{k'} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (15)$$

з якого, виходячи з відомих припущень, можна отримати вирази для частних випадків:

- періодичні коливання

$$\delta K = -\omega_p^2 \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho u_p^{i'} \delta u_{i'}^p \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \quad (16)$$

- рухоме навантаження

$$\delta K = V^2 \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \frac{\partial u^{i'}}{\partial y^{3'}} \frac{\partial \delta u_{i'}}{\partial y^{3'}} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \quad (17)$$

- вимушені коливання

$$\delta K = -\theta_r^2 \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho u_r^{i'} \delta u_{i'}^r \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (18)$$

Виразивши переміщення вузлів елемента вздовж окружної координати у вигляді (9) - (13), отримаємо:

$$\delta K = \sum_{l=l_0}^L \sum_{m=m_0}^L \delta \{u_{k'}\}_{(S_1, S_2)}^l \}^T [m]_{lm} \{u_{k'}\}_{(S_1, S_2)}^m \}, \quad (19)$$

де $[m]_{lm}$ - амплітудна матриця мас неоднорідного вздовж x^3 елемента, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$[m]_{lm} = \hbar A \sqrt{g} \rho_{lm}^{k'} \left[g^{k'(k')} \right]_{(S_1, S_2)} \Big|_{H_M} H_I, \quad (20)$$

де

$$\rho_{lm}^{k'} = \int_{x^3} \rho \left(x^3 \right) \psi_{(k')}^m \psi_{(k')}^l dx^3, \quad (21)$$

$\rho(x^3)$ - щільність матеріалу, обчислена в центрі поперечного перерізу. Для однорідних тіл інтегрування (21) можна виконати в замкнутій формі:

$$\rho_{lm}^{k'} = \rho \times \begin{cases} 1, l=m \\ 0, l \neq m \end{cases}. \quad (22)$$

Значення параметра $\hbar$ залежить від вибору скінченних елементів для апроксимації конструкції і дорівнює π при використанні замкнених кільцевих скінченних елементів на основі рядів Фур'є (рис.1а), для інших СЕ - $\hbar = 1$.

В загальному випадку при обчисленні інтеграла по площині поперечного перерізу СЕ:

$$H_I = \prod_{n=1}^2 [(S_n P_n + 3)/144]. \quad (23)$$

Таблиця 1

Параметри узагальненої матриці мас

Задача	A	H_M^I
Періодичні коливання	$-\omega_p^2$	1
Рухоме навантаження	V^2	$-\left(\frac{\partial x^3}{\partial y^3} \frac{l\pi}{2}\right)^2$
Вимушені коливання	$-\theta_r^2$	1
Імпульсне навантаження	1	1

Так як при формуванні коефіцієнтів матриці жорсткості беруть участь поліноми більш низького ступеня (перші похідні), ніж при формуванні коефіцієнтів матриці мас і, отже, збіжність чисельного рішення визначається збіжністю потенційної енергії деформації, тоді доцільно зменшити ступінь поліномів, які використовуються при обчисленні коефіцієнтів матриці мас. В цьому випадку, отримаємо вираз для коефіцієнтів "неузгодженої" матриці мас. Використавши припущення про осереднення маси біля вузла, що розглядається, та враховуючи, що кожна вузлова маса відповідає частині маси елементів, які примикають до даного вузла, множник H_I можна записати як:

$$H_I = 1/4. \quad (24)$$

Висновки.

На основі моментної схеми скінченного елемента представлено узагальнену матрицю мас неоднорідних скінченних елементів НМСЕ в задачах дослідження стаціонарних та нестаціонарних коливань неоднорідних призматичних прямокутних тіл та тіл обертання із складною формою та структурою поперечного перерізу, що знаходяться під дією навантажень різної інтенсивності та тривалості у часі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.С., Солодей І.І.* “Чотиривимірна скінченноелементна апроксимація простору та часу в нестационарних задачах динаміки на основі НМСЕ” // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.72, 2003. –с.119-134
2. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. –483с.
3. *Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т.* Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований. –М.: Машиностроение, 1989. – 248с.
4. *Гуляр О.І., Топор О.Г., Солодей І.І.* “Просторова задача динаміки для пружнопластичних неоднорідних тіл обертання в схемі напіваналітичного методу скінченних елементів”, Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.66, 1999. –с.56-57.
5. *Гуляр О.І., Сізевич Б.І., Сніжко Н.А., Овсянніков О.С., Солодей І.І.* “ Аналіз власних форм і частот просторових тіл в схемі напіваналітичного методу скінченних елементів ” // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. – К.:КНУБА, Вип.73, 2003. –с.100-115
6. *Друккер Д.* Вариационные принципы в математическом теории пластичности // Механика.- М.: ИП, 1959.- № 6.
7. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 539 с.
8. *Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с.

Отримано 08.09.10

Солодей І.І., Гуляр А.І., Вабищевич М.О., Приходько А.Ю., Сізевич Б.І.

Обобщенная матрица масс полуаналитического метода конечных элементов в задачах динамики пространственных конструкций

В рамках полуаналитического метода конечных элементов построена обобщенная матрица масс неоднородных конечных элементов в задачах исследования стационарных и нестационарных колебаний призматических прямолинейных тел и тел вращения со сложной формой и структурой поперечного сечения, которые находятся под действием нагрузок различной интенсивности и продолжительности во времени.

Solodei I.I., Gulyar A.I., Vabishevich M.O., Pryhodko A.Y., Sizevich B.I.

Generalized element mass matrix of semi-analytical finite element method for dynamical 3D problems

Generalized element mass matrix for different types of dynamical problems is considered in range of semi-analytical finite element method. Library of special finite elements to model 3D solids of revolution and prismatic solid are presented.