

Алгоритм спрощеної побудови обчислювальних шаблонів та рівнянь рівноваги вузлів гладких дискретно представлених поверхонь

Андрій Посікера, аспірант¹ (ORCID: 0009-0003-3260-2903),

¹ Київський національний університет будівництва архітектури, просп. Повітряних Сил, 31, м. Київ, 03037, Україна

АНОТАЦІЯ

У роботі представлено алгоритм, який дозволяє визначати коефіцієнти обчислювальних шаблонів та рівнянь рівноваги вузлів довільних двовимірних сітчастих структур, призначених для імітації гладкого сполучення фрагментів як регулярних, так і нерегулярних дискретно представлених поверхонь. Даний алгоритм базується на виявленні закономірностей формування коефіцієнтів рівнянь рівноваги у сітчастих структурах, утворених шляхом зв'язування параметрів зовнішнього формоутворюючого навантаження. Запропонований алгоритм дозволяє скоротити час моделювання дискретних образів за рахунок прискорення побудови рівнянь рівноваги вузлів та, як наслідок, процесу формоутворення.

Ключові слова: дискретно представлені поверхні, геометричне моделювання, формоутворення, рівняння статичної рівноваги, сталий розвиток, зелене будівництво, енергоефективність та ресурсозбереження обчислювальні шаблони.

1. ВСТУП

В рамках проектних рішень архітектурних концепцій будівель і споруд, розроблених на засадах сталого розвитку і відновлення за принципом «відбудувати краще, ніж було» усе частіше й частіше застосовуються плавні форми огорожувальних конструкцій, що мають на меті мінімізацію втрати теплової енергії та будівельних матеріалів, що застосовуються при їх зведенні. Окрім того, плавні сполучення архітектурних форм дозволяють знизити експлуатаційні витрати за рахунок відсутнього скорочення площі їх поверхні у порівнянні з багатокутними формами.

Досить часто криволінійні гладкі оболонки застосовують при проектуванні плавних сполучень із іншими, але плоскими, фрагментами огорожувальних конструкцій. Гладкі сполучення площинних фрагментів огорожувальних конструкцій дозволяють покращити формфактор будівель або заблокованого таким чином ряду будівель, що утворюють суцільний архітектурний ансамбль. Окрім того, такі рішення дають змогу мінімізувати геометричні містки холоду у вузлах фасадних систем та забезпечують відносну рівномірність улаштування теплоізоляційних матеріалів. Усе це у комплексі призводить до значного зменшення трансмісійних (кондуктивних) тепловтрат крізь товщу огорожувальних конструкцій та відповідає базовим засадам зеленого будівництва.

В процесі проектування відповідних криволінійних форм сполучення регулярних фрагментів огорожувальних конструкцій часто виникає питання формату відображення результатів моделювання оболонок, які мають представляти собою деякий дискретний набір точок каркасу відповідних фрагментів. Як правило, моделювання здійснюється із застосуванням систем автоматизованого проектування (САПр), які мають вбудовані інструменти, що на основі параметрично представлених функцій дозволяють будувати кусочні (фрагментарні) криволінійні поверхні за заданими базовими точками та/або крайовими умовами опорного контуру. Втім, такі інструменти мають ряд суттєвих обмежень, так як вони не відображають фізичні особливості роботи конструкцій та їхні фізико-механічні властивості. Таким чином, будучи засобами суто графічного представлення, інструменти САПр для відображення криволінійних поверхонь застосовуються переважно на етапі ескізного проектування, а форми фрагментів огорожувальних конструкцій, отримані на основі їх застосування, обов'язково перевіряються (на предмет

міцності та стійкості конструкцій, що утворюють дискретно представлений образ каркасу відповідних поверхонь) та багаторазово уточнюються на інших, більш детальних, стадіях проектування (зокрема на стадіях "Проект" та "Робоча документація"; рідше на стадіях "Техніко-економічне обґрунтування" та "Робочий проект"). Більше того, навіть на стадіях ескізного проектування та техніко-економічного обґрунтування часто виникає потреба у тому, щоб проаналізувати характер впливу різних типів навантажень (як зосереджених, так і розподілених за наперед заданими закономірностями) на результуючу форму досліджуваних криволінійних поверхонь гладкого сполучення. Це потрібно для того, щоб оцінити характер та міру деформування відповідних оболонок під дією різноманітних зовнішніх природних та техногенних впливів, представлених механічними силами.

2. МЕТА РОБОТИ

Запропонувати порядок і відповідні математичні інструменти спрощеної побудови обчислювальних шаблонів та рівнянь рівноваги вузлів гладких дискретно представлених поверхонь на основі алгоритмічного визначення вузлових коефіцієнтів при усіх змінних.

3. ОСНОВНА ЧАСТИНА

Для того, щоб математичні моделі досліджуваних криволінійних оболонок володіли механічними властивостями їхніх фізичних аналогів слід застосовувати такі методи моделювання, які базуватимуться на аналізі статичної рівноваги відповідних оболонок під дією зовнішніх сил. Одним із таких методів є статико-геометричний метод прикладної геометрії [1], що передбачає геометричне формоутворення дискретних моделей сітчастих структур на основі зв'язування їх геометричних і фізичних параметрів, а саме довжин ланок та внутрішніх зусиль що виникають під дією зовнішніх навантажень, прикладених до вільних вузлів. Даний метод дозволяє не лише формоутворювати дискретно представлені поверхні, але й управляти їхньою формою шляхом задання їх диференціальних характеристик та за рахунок накладання додаткових функціональних умов та обмежень на процес моделювання [2]. У роботі [3] було запропоновано спосіб, який на основі параметричного зв'язування зовнішнього формоутворюючого навантаження дає змогу отримувати дискретні образи криволінійних поверхонь гладкого

сполучення різних фрагментів огорожувальних конструкцій. Функція зв'язування параметрів (якщо умовно позначити координати вузлів $(x, y$ та $z)$ літерою s) мала наступний вид:

$$-n \cdot P_{s_i} + \sum_{j=1}^n P_{s_j} = 0 \quad (1)$$

де: P_{s_i} – це формоутворююче зосереджене вузлове навантаження, що діє на деякий довільний i -й вузол, який у свою чергу сполучається із n іншими вузлами (як вільними, так і фіксованими), на які, слідуючи принципу зрівноваженості суміжних зусиль, діють навантаження P_{s_j} .

Вирази для визначення зовнішніх формоутворюючих навантажень P_{s_i} можуть бути отримані з наступної системи рівнянь рівноваги для кожного i -го вільного вузла безмоментної сітчастої структури у проєкціях на координатні осі:

$$\left(-\sum_{j=1}^n k_{i,j} \right) \cdot s_i + \sum_{j=1}^n (k_{i,j} \cdot s_j) = P_{i_s} \quad (2)$$

де: $k_{i,j}$ – це коефіцієнти пропорційності внутрішніх зусиль у стрижнях $R_{i,j}$ до їх довжин $\delta_{i,j}$:

$$k_{i,j} = R_{i,j} / \delta_{i,j} \quad (3)$$

При формоутворенні дискретно представленого образу серед усіх варіантів розподілу зусиль може існувати такий, при якому усі коефіцієнти пропорційності $k_{i,j}$ рівні між собою та становлять k :

$$k_{i,j} = k = const \quad (4)$$

В цьому випадку рівняння (2) набуває наступної, ще більш спрощеної, форми:

$$-n \cdot s_i + \sum_{j=1}^n s_j = P_{i_s} / k \quad (5)$$

Звідси випливає, що значення зовнішніх формоутворюючих навантажень P_{s_i} у разі виконання тотожності коефіцієнтів пропорційності $k_{i,j}$ (4) може бути виражене через наступну формулу:

$$P_{i_s} = k \cdot \left(-n \cdot s_i + \sum_{j=1}^n s_j \right) \quad (6)$$

Називатимемо досліджуваній i -й вузол, для якого й будеться обчислювальний шаблон, центральним вузлом цього шаблону. Нехай центральний вузол сполучається із n суміжними вузлами. Нехай кожен j -й суміжний із i -м центральним вузлом вузол сполучається загалом із m_j суміжними вузлами і є другорядним. Тоді, значення зовнішнього формоутворюючого навантаження P_{s_j} на кожен j -й суміжний із центральним вузлом вузол по аналогії з (6) визначатимуться за формулою:

$$P_{j_s} = k \cdot \left(-m_j \cdot s_j + \sum_{l=1}^{m_j} s_l \right) \quad (7)$$

Підставляючи (6) та (7) до (1) одержимо рівняння рівноваги вузлів дискретно представленого поверхні гладкого сполучення будь-яких фрагментів огорожувальних конструкцій. Дане рівняння, після скорочення коефіцієнтів пропорційності k , матиме вид:

$$-n \cdot \left(-n \cdot s_i + \sum_{j=1}^n s_j \right) + \sum_{j=1}^n \left(-m_j \cdot s_j + \sum_{l=1}^{m_j} s_l \right) = 0 \quad (8)$$

Як зазначалося у [2] та [3], отриманню рівнянь рівноваги може передувати побудова обчислювальних шаблонів, які є більш наочними та інтуїтивно простішими для сприйняття. З їх допомогою, побудова рівнянь рівноваги вузлів стає ще простішою та значно швидшою, оскільки обчислювальні шаблони є графічною формою відображення відповідних рівнянь. Отже, якщо виокремити із дискретного образу

поверхні усі вузли, координати яких фігурують у рівнянні рівноваги деякого i -го вузла, а також усі ланки, які ці вузли сполучають, то ми тримаємо каркас шаблону, процес заповнення якого представляє собою записування коефіцієнтів при невідомих координатах вершин одержаного шаблону.

На основі аналізу рівняння (8) можна прийти до наступних висновків та математичних формул для визначення вузлових коефіцієнтів відповідного рівняння та його обчислювальних шаблонів (тут у множині, так як дане рівняння може приймати безліч форм, залежно від топології дискретного образу поверхні).

Кожен j -й вузол, окрім досліджуваного i -го центрального вузла (оскільки він завжди входить до кожної із множин m_j), буде суміжним із $(m_j - 1)$ додатковими вузлами, так як кількість суміжних із j -м вузлом вузлів зменшується на 1 за рахунок суміжності із центральним досліджуваним i -м. Тоді коефіцієнт λ при центральному i -му вузлі дорівнюватиме добутку кількості суміжних n вузлів та збільшеній на 1 кількості цих же вузлів $(n + 1)$. Це ілюструється наступним виразом:

$$\lambda = (-n) \cdot (-n) + n = n^2 + n, \text{ або } \lambda = n \cdot (n + 1) \quad (9)$$

Коефіцієнт η_j кожного із суміжних з досліджуваним центральним i -м вузлом другорядних вузлів дорівнюватиме кількості приєднаних до такого другорядного вузла ланок m_j помноженій на (-1) , збільшеній на кількість сполучень із іншими другорядними вузлами r_j , а також зменшеній на кількість власне другорядних вузлів n :

$$\eta_j = (-1) \cdot m_j - n + r_j = -m_j - n + r_j, \text{ або } \eta_j = r_j - (m_j + n) \quad (10)$$

Коефіцієнти решти вузлів – крайових – відповідатимуть кількості другорядних вузлів, суміжних із даними крайовими вузлами.

4. ВИСНОВКИ

Продемонстрований підхід дозволяє отримувати рівняння рівноваги та обчислювальні шаблони для вузлів як регулярних, так і нерегулярних сіток дискретних поверхонь, що дає можливість урізноманітнити топологію моделей. Окрім того, застосування описаного підходу спрощує побудову систем рівнянь рівноваги, а також робить більш зрозумілим та наочним процес формоутворення в цілому.

Список літератури

- [1] Ковальов, С. М. Формування дискретних моделей поверхонь просторових архітектурних конструкцій. Дис. ...д.т.н., 05.01.01. – М. : МАІ. 1986. 348 с.
- [5] Скочко В.І. Методи інтерпретаційного геометричного моделювання сітчастих структур та їх застосування: Дис. ...д.т.н., 05.01.01. – К. : КНУБА; 2021. 590 с. URL: <https://uacademic.info/ua/document/0521U101735>
- [3] Посікера А., Скочко В., Широков А., Спіридонов В. Геометричне моделювання гладкого сполучення фрагментів дискретно представлених поверхонь. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К. : КНУБА; Том 1 № 106 (2024): с. 221-240. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2024.106.221-240>

*Роботу виконано під керівництвом, д.т.н., проф., професора кафедри архітектурних конструкцій Скочка Володимира Ігоровича