МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ПРОГРАМНІ КОМПЛЕКСИ ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКІВ

Методичні вказівки та завдання
до виконання лабораторних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 193 «Геодезія та землеустрій»

Київ 2025

УДК 504
П78

Укладач Ю. В. Медведський, канд. техн. наук, доцент

Рецензент О. В. Адаменко, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск Р. А. Дем'яненко, канд. техн. наук, доцент

Затверджено на засіданні кафедри інженерної геодезії, протокол № 9 від 13 березня 2023 року.

В авторській редакції.

Програмні комплекси інженерних розрахунків [Електронний
П78 ресурс]: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт / уклад.: Ю. В. Медведський. – Київ: КНУБА, 2025. – 28 с.

Містять зміст, порядок оформлення, приклади вирішення лабораторних задач з дисципліни та вихідні дані .

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 193 «Геодезія та землеустрій».

© КНУБА, 2025

Зміст

Загальні положення 4

Завдання 1. Основні задачі математичної статистики. Знаходження середнього та дисперсії, знаходження медіани, обчислення кореляції 5

Завдання 2. Середня квадратична, гранична та відносна похибки 13

Завдання 3. Оцінка точності функцій виміряних величин 17

Завдання 4. Обробка результатів низки рівноточних вимірювань однієї величини 20

Завдання 5. Побудова інтервальних оцінок 24

Завдання 6. Відображення даних 25

Варіанти вихідних даних до завдань 26

Список літератури 27

Загальні положення

Методичні вказівки охоплюють виконання лабораторних завдань з дисципліни "Програмні комплекси інженерних розрахунків". Загалом, у матеріалі представлено 6 основних типів задач, що передбачають виконання основних математичних операцій статистичного аналізу геодезичних спостережень за допомогою мови програмування Python.

Метою лабораторних робіт є закріплення і практичне опрацювання лекційного матеріалу, вирішення задач знаходження середнього та дисперсії, знаходження медіани, обчислення кореляції, оцінки точності функцій виміряних величин, обробки результатів низки рівноточних вимірювань однієї величин за допомогою високорівневої мови програмування Python.

Робота виконується індивідуально кожним здобувачем.

Результати виконання лабораторних робіт подаються у вигляді архіву з файлами, що містять: файл word з відповідями у вигляді знімків екрану з результатами розрахунків у відповідності до змісту даних методичних вказівок, файли програм до відповідних завдань.

Завдання 1. Основні задачі математичної статистики. Знаходження середнього та дисперсії, знаходження медіани, обчислення кореляції

Виконання геодезичних робіт пов'язане з виконанням вимірювань різних величин - відстаней, перевищень, кутів тощо. Вимірювання можуть виконуватися безпосереднім порівнянням величини з одиницею міри (прямі вимірювання) і за допомогою її обчислень як функції інших безпосередньо виміряних величин (непрямі вимірювання).

Досвід показує, що результати вимірювань завжди містять деякі похибки. Це проявляється, наприклад, у разі багаторазового вимірювання однієї й тієї самої величини - одержувані результати завжди дещо різняться між собою, а отже, неминуче відрізняються від істинного значення вимірюваної величини, тобто містять похибки вимірювань.

Похибки поділяють на грубі, систематичні та випадкові. Вимірювання, що містять грубі похибки, викликані недбалістю спостерігача або несправністю приладів, виявляють і відкидають, бракують.

Систематичні похибки, які під час повторних вимірювань залишаються постійними або змінюються за певним законом, намагаються виключити, вводячи в результати вимірювань поправки, юстуючи (регулюючи) прилади, застосовуючи правильну методику вимірювань.

Випадкові похибки під час повторних вимірювань змінюються випадковим чином. Вони неминучі й виключити їх із результатів вимірювань неможливо, тому під час виконання й обробки вимірювань прагнуть лише послабити їхній вплив. Шляхи до такого послаблення вказує теорія помилок (похибок) вимірювань. Надалі будемо вважати, що результати вимірювань вільні від грубих і систематичних похибок і містять тільки випадкові.

Похибкою Δ вимірювання називають відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини:

$$\Delta = l - X, \tag{1}$$

де l - результат вимірювання;

X - істинне, точне значення вимірюваної величини.

У переважній більшості випадків випадкові похибки, будучи наслідком дії багатьох чинників (недосконалості приладів, змін в умовах вимірювань, недосконалості органів чуття спостерігача), підпорядковуються так званому закону нормального розподілу. При цьому малі за абсолютною величиною похибки трапляються частіше за великі,

позитивні похибки трапляються так само часто, як і негативні, а середнє арифметичне з випадкових похибок під час зростання їхнього числа прагне до нуля.

У статистиці **середнє**, **мода** та **медіану –** називають мірами центральної тенденції. Вони показують загальні характеристики розподілу даних за певною змінною, дозволяють виявити одне значення (або кілька значень – якщо мода в розподілі не одна, але про це детальніше згодом), що описує весь розподіл. Можна також сказати, що середнє, мода та медіана – це окремі значення що представляють весь набір даних, типові для всіх значень у групі.

Міри центральної тенденції потрібні з наступних міркувань:

1. Щоб отримати загальну картину розподілу. Ми не можемо запам'ятати кожен факт, що стосується сфери дослідження.

2. Щоб отримати чітку картину щодо досліджуваної сфери для розуміння та отримання потрібних висновків.

3. Щоб отримати чіткий опис групи в цілому та мати змогу порівнювати дві або більше груп у термінах типової «поведінки».

Середнє (Mean)

Найвідомішою мірою центральної тенденції — і найбільш вживаною в повсякденному побуті — є середнє, або ж просте середнє, або ж арифметичне середнє (arithmetic mean) — просто середнє значення ряду даних.

Для його обчислення досить скласти разом всі значення в розподілі, і поділити на кількість спостережень. В Екселі чи Google Spreadsheets для цього є функція MEAN. Є різні математичні способи підрахунки середнього, але в усіх сучасних електронних таблицях та спеціальних програмних пакетах для роботи з даними і статистикою є ця функція, тож ми не будемо зупинятися на математичних викладках.

Є певні загальні правила для використання середнього, зокрема:

1. Середнє — це «центр тяжіння» розподілу, і кожне значення дає внесок у визначення середнього значення, коли поширення значень є симетричними довкола центральної точки.

2. Середнє значення більш стабільне, ніж медіана чи мода. Тому, коли потрібно знайти найбільш стабільну міру центральної тенденції, використовують середнє.

Переваги середнього:

1. Середнє визначене дуже жорстко, тому не виникає питань чи нерозуміння щодо його значення та суті.
2. Це найбільш поширена міра центральної тенденції, оскільки її легко зрозуміти.
3. Середнє легко підрахувати.
4. Враховує всі значення розподілу.

Обмеження чи недоліки середнього:

1. На значення середнього впливають екстремальні значення (відомий іронічний жарт про «середню температуру по лікарні»).
2. Часом середнім є значення, що не присутнє в розподілі.
3. Часом результатом можуть бути абсурдні значення. Наприклад, маємо 41, 44, та 42 учнів у 5а, 5б та 5в класах якоїсь школи. Виходить, що середня кількість учнів у 5 класах школи – 42,3(3). А так не буває.

Медіана (Median)

Медіану можна визначити як точку на ряді розподілу (впорядкований набір значень змінної для різних спостережень — наприклад від найменшого до найбільшого значення) — до цієї точки розташовано половина всіх значень, і після цієї точки теж половина значень. Тобто, медіана, це значення, що ділить впорядкований ряд навпіл. Якщо кількість значень непарна, то береться одне зі значень — те, що стоїть у розподілі рівно по центру.

Коли значень парна кількість, то беруть два центральні значення, і знаходять їхнє середнє.

Для чого використовують медіану?

1. Коли потрібно знайти точну середню точку, точку на «півдорозі» від найменшого значення до найбільшого.
2. Коли екстремальні значення впливають на середнє — медіана є найкращою мірою центральної тенденції.
3. Медіану використовують коли потрібно, щоб певні значення впливали на центральну тенденцію, але все, що про них відомо — що вони «нижче» або «вище» медіани

Переваги медіани:

1. Легко вирахувати та зрозуміти.
2. Для підрахунку медіани не потрібні всі значення в розподілі.
3. Екстремальні значення розподілу не впливають на медіану.

4. Її можна визначити і для «відкритих» категорій / класів інтервалів.

Обмеження медіани:

1. Вона не так жорстко визначена як середнє, оскільки її значення не так вираховується, як знаходиться (серед значень в розподілі).
2. Не враховує всі спостереження (значення для всіх спостережень).
3. З медіаною потім не можна робити алгебраїчні перетворення так, як із середнім.
4. Потребує впорядкування значень або класів інтервалів у висхідному чи спадному порядку.
5. Часом медіаною може бути значення, не присутнє у самому розподілі.

Мода (Mode)

Третя міра центральної тенденції — це **мода** — значення, що найчастіше зустрічається в розподілі. Як правило, вона представляє найбільш типове значення. На моду ніколи не впливають екстремальні значення в розподілі, а впливають – екстремальні частоти значень, наскільки часто те чи інше значення змінної зустрічається в розподілі.

Мода використовується:

1. Коли нам треба швидка і приблизна міра центральної тенденції.
2. Коли потрібна міра центральної тенденції, що має бути типовим значенням.

Переваги моди:

1. Мода показує найбільш поширене значення в розподілі.
2. На моду не впливають екстремальні значення – так як на середнє.
3. Моду можна визначити для відкритих інтервалів / категорій.
4. Допомагає аналізувати якісні дані.
5. Моду можна виявити просто побудувавши графік розподілу чи стовпчасту діаграму.

Обмеження:

1. Не включає до визначення / розрахунку всі спостереження розподілу, а лише концентрацію частот.
2. Подальші алгебраїчні перетворення неможливі – на відміну від середнього.
3. Буває важко визначити моду у випадку багатомодального чи бімодального розподілу

Порівняння змінних і кореляція

Найбільш наглядний приклад показати зв'язок між двома кількісними змінними – це діаграма розсіювання (рис. 1). На відміну від гістограм, які ми розглядали раніше – під час аналізу одномірних розподілів, на осі у показують не частоту того чи іншого значення змінної по осі х, а значення іншої змінної. Крапка на діаграмі означає одночасно значення двох змінних для одного спостереження («рядок» в таблиці даних).

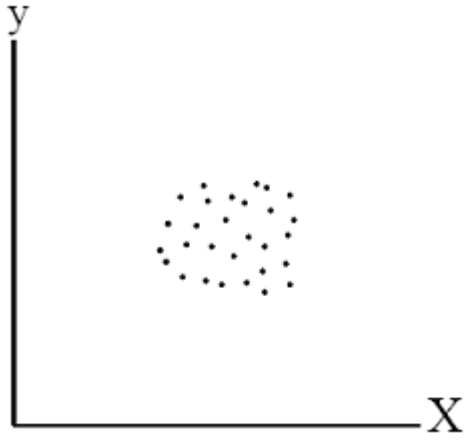

Рис. 1. Діаграма розсіювання

У кореляції є дві властивості – сила і напрям. Сила кореляції визначається числовим значенням, а напрям – тим, чи кореляція позитивна чи негативна.

Позитивна кореляція: обидві змінні міняються у тому ж напрямі. Тобто, якщо одна змінна зростає, друга зростає теж. Якщо одна спадає, то друга спадає так само. Наприклад, рівень освіти – скільки років людина навчалася (в нормальних країнах) та річний заробіток корелюють між собою позитивно.

Негативна кореляція: змінні рухаються у протилежних напрямках. По мірі того, як одна змінна спадає, інша росте, і навпаки. Наприклад – кількість годин, проведених людиною уві сні та кількість годин неспання – корелюють негативно (що очевидно – чим більше спиш – тим менше часу лишається на яві, і навпаки).

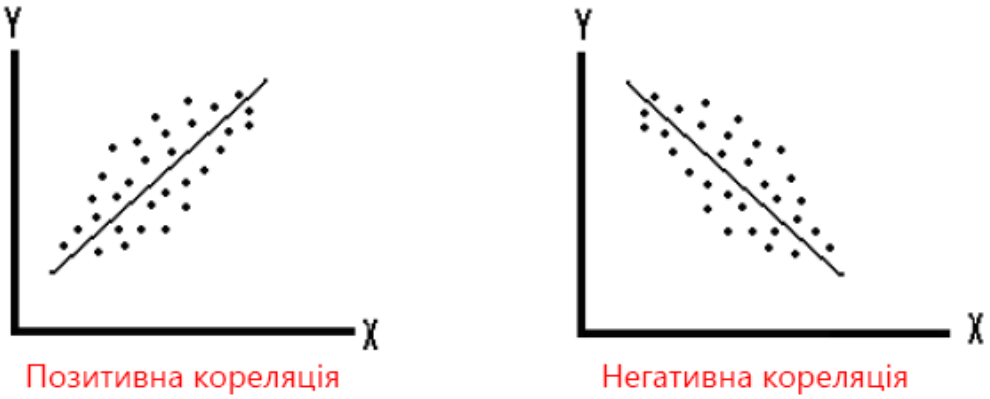

Рис. 2. Приклад позитивної і негативної кореляції змінних

Коефіцієнт кореляції показує ступінь, до якого дві змінні пов'язані (наскільки спільно чи подібно змінюються їх значення для різних спостережень) – тобто якої сили між ними може бути зв'язок. Значення коефіцієнта кореляції може бути від -1.0 до 1.0. Якщо вирахувана кореляція більша за 1 або менша за -1 – значить десь у підрахунках сталася помилка, адже 1 – означає абсолютну пряму (позитивну) кореляцію, а -1 – абсолютну зворотну (негативну) кореляцію.

Як підраховується коефіцієнт кореляції? Дорівнює сумі добутків відхилень, поділеній на добуток їх стандартних відхилень

Що означає, коли ми кажемо, що між двома змінними нема кореляції? Це означає, що між двома змінними немає прямого зв'язку. Наприклад, немає прямої кореляції між розміром взуття та зарплатою. Тобто, великі значення розміру взуття мають такі ж шанси зустрітися серед людей з високою зарплатою, як із низькою (рис. 3).

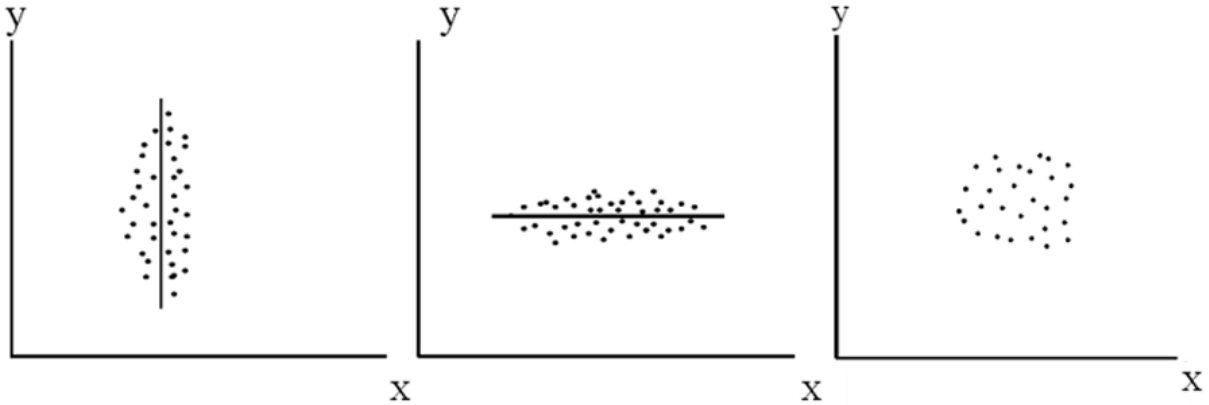

Рис. 3. Випадки дуже малої або відсутньої кореляції змінних

Кореляція і причинно-наслідковий зв'язок. Навіть якщо дві змінні виглядають пов'язаними між собою, це не значить, що одна спричинила іншу. Класичний приклад – це кореляція між ростом злочинності та

споживанням морозива протягом літніх місяців у США. Дві змінні є пов'язані між собою, але жодне явище не є причиною іншого. Насправді, обидва явища спричинені підвищенням температури повітря, а не одне одним.

Важливо також пам'ятати, що кореляція – це міра лінійного зв'язку. При цьому, кореляція не говорить нам, яка змінна впливає на яку – кореляція лише показує наявність зв'язку, але впливу. Вимірюючи кореляцію, не можна сказати – це А впливає на Б, чи Б впливає на А.

Діаграма розсіяння для двох змінних може виглядати так, як показано на рис. 4

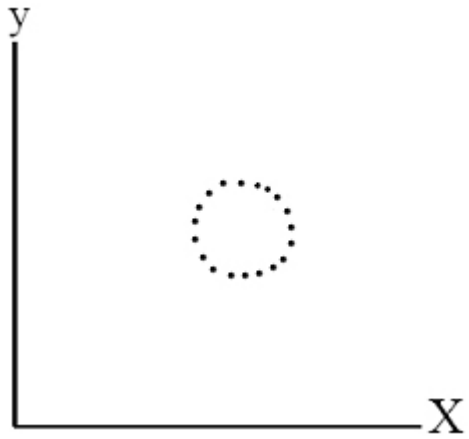

Рис. 4. Діаграма розсіяння для двох змінних

Для цих двох змінних кореляція буде дорівнювати нулю. Але це ще не означає, що зв'язку між змінними немає — просто він може бути не лінійним.

Задача 1. Знаходження середнього та дисперсії

```
import numpy as np

# Завантажимо набір даних
data = np.loadtxt('name.txt', skiprows = 0, delimiter = ',', dtype = 'f' )

# Обчислюємо середнє та дисперсію
mean = np.mean(data)
var = np.var(data)

print(f"Середнє: {mean:.2f}")
print(f"Дисперсія: {var:.2f}")
```

Задача 2. Знаходження медіани та стандартного відхилення.

```
import numpy as np

# Завантажимо набір даних
data = np.loadtxt('name.txt', skiprows = 0, delimiter = ',', dtype = 'f' )

# Обчислюємо медіану
median = np.median(data)

print(f"Медіана: {median:.2f}")
```

Задача 3. Обчислення кореляції

У цьому прикладі ми генеруємо 100 випадкових пар чисел з нормального розподілу

```
import numpy as np
import pandas as pd

# Згенеруємо випадкові дані
data = np.random.normal(loc=10, scale=2, size=(100, 2))

# Створимо DataFrame з даними
df = pd.DataFrame(data, columns=["X", "Y"])

# Обчислимо кореляцію між змінними
corr = df.corr()

print(corr)
```

Завдання 2. **Середня квадратична, гранична та відносна похибки**

Вимірювання, що виконуються, в однакових умовах, однаковими приладами, вважають рівноточними. У результаті багаторазових вимірювань одержувані значення вимірюваної величини можуть бути як більшими, так і меншими за її істинне значення.

Оцінка величини допущеної похибки є неодмінною частиною кожного вимірювання, оскільки дає змогу судити, наскільки отриманий результат близький до істинного значення величини. Вимірювання прийнято вважати точним і закінченим за умови зазначення допущеної помилки. Точність вимірювань характеризується середньою квадратичною похибкою вимірювання, яка визначається формулою Гауса:

$$m = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\left[\Delta^2\right]}{n}}, \qquad (2)$$

де Δ1, Δ2, ...Δn - випадкові похибки вимірювань.

Величина D = т носить назву дисперсії. Формула (2) дає точне значення середньої квадратичної похибки за нескінченно великого числа п вимірювань. За малої кількості вимірювань, унаслідок випадкового характеру похибок Δі, обчислене за формулою (2) значення т має свої похибки. Наближено середню квадратичну похибку визначення за формулою (2) можна оцінити за формулою

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2n}} \qquad (3)$$

Формулою (2) користуються під час дослідження точності геодезичних приладів і методів вимірювань, коли відомо істинне значення вимірюваної величини.

За нормального розподілу і досить великого числа вимірювань: 68,3% усіх похибок за своїм модулем не перевищують середньої квадратичної похибки т. Похибки, що перевищують 2m, зустрічаються рідко, а більші за 3m - ще рідше; при цьому 95,5% усіх похибок

за модулем менше 2m і 99,7% похибок менше 3m. Потроєнуту середню квадратичну похибку називають граничною:

Δпр = 3m.

Вимірювання, що містять помилки, більші за граничну, бракують.

Середня квадратична похибка дає характеристику точності вимірювання за абсолютною величиною і виражається в одиницях вимірюваної величини. Для оцінки ступеня точності вимірювань

користуються відносними похибками, що дорівнюють відношенню похибки до вимірюваної величини, яка виражається у вигляді дробу з одиницею в чисельнику:

$$\frac{m}{l} = \frac{1}{N}.$$

Розрахунок СКП в середовищі python:

```
import numpy as np
from sklearn.metrics import mean_squared_error

# визначаємо істинні та виміряні значення
y_true = np.array([3, -0.5, 2, 7])
y_pred = np.array([2.5, 0.0, 2, 8])

# розраховуємо СКП та виводимо її значення
mse = mean_squared_error(y_true, y_pred)
print(f"Середня квадратична помилка: {mse}")
```

Задача 1. Довжина лінії, виміряна високоточним електронним тахеометром, прийнята за істинну, X = 120,071 м. З метою визначення середньої квадратичної помилки вимірювання відстані раніше відкомпарованою рулеткою виконано 9 вимірювань (табл. 1.)

Таблиця 1

Результати вимірювань і обчислень

Номер вим.	Результати вимірювань l, м	Δ, мм	Δ^2	Обчислення
1	120,03	-41	1 681	$\Delta i = li - X$
2	120,11	39	1 521	$m = \sqrt{\frac{15249}{9}} = 41$мм
3	120,00	-71	5 041	
4	120,08	9	81	
5	120,07	-1	1	
6	120,03	-41	1 681	$\frac{m}{X} = \frac{0,041}{120,071} = \frac{1}{2900}$
7	120,06	-11	121	
8	120,14	69	4761	
9	120,09	19	361	
			15 249	

У табл. 1 середню квадратичну похибку кожного окремого виміру цієї відстані m = 41 мм отримано за формулою (2). Погрішність цього визначення може бути знайдена за формулою (3):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \frac{41}{\sqrt{18}} \approx 10 \text{ мм}.$$

Відноснапохибка вимірюваннялінії для конкретних умов

$$\frac{m}{X} = 1:2900$$

Задача 2. Для оцінки точності вимірювання площ планіметром вимірювалася кілька разів площа кола S = 100 см^2. Знайти середню квадратичну та відносну похибки вимірювань.

Номер вимірювання	Варіанти					
	1	2	3	4	5	6
1	100,21	99,73	100,22	99,86	99,70	100,10
2	99,82	99,98	100,00	99,80	99,85	100,10
3	99,80	99,96	100,12	100,12	99,75	100,10
4	99,85	100,04	99,76	100,22	100,00	100,15
5	99,95	100,22	99,82	100,00	100,06	100,13
6	100,20	100,07	100,23	100,11	100,27	99,98
7	100,06	100,11	99,88	99,88	100,18	99,81
8	100,10	100,26	99,95	99,80	100,04	99,77
9	100,01	99,64	100,02	100,20	100,15	99,84

Задача 3. Кут, виміряний досить точно теодолітом Т1, має значення, що дорівнює 64°34'20". Цей самий кут виміряно рівноточно п'ять разів теодолітом Т2. Знайти середню квадратичну похибку одного вимірювання кута й оцінити точність його визначення.

Номер вимірювання	Варіанти				
	1	2	3	*4*	5
1	64°34'25"	64°34'14"	64°34'15"	64°34'27"	64°34'21"
2	64^0 34'21"	64°34'24"	64°34'17"	64°34'20"	64°34'26"
3	64°34'18"	64°34'22"	64°34'23"	64°34'23"	64°34'14"
4	64^0 34'17"	64°34'23"	64°: 34'27"	64°34'16"	64°34'17"
5	64°34'18"	64°34'16"	64°34'17"	64°34'14"	64°34'24"

Задача 4. З метою оцінки точності вимірювання довжини ліній рулеткою проведено багаторазове вимірювання відстані на базисі дослідження високоточних світлодальномірів, що дорівнює 125,382 м. Знайти абсолютну та відносну похибки вимірювання лінії.

Номер вимірювання	Варіанти					
	1	2	3	4	5	6
1	125,40	125,34	125,36	125,41	125,39	125,42
2	125,41	125,38	125,38	125,34	125,49	125,40
3	125,35	125,44	125,42	125,38	125,34	125,36
4	125,36	125,44	125,43	125,44	125,45	125,35
5	125,38	125,34	125,44	125,42	125,45	125,38
6	125,35	125,36	125,40	125,40	125,32	125,42
7	125,43	125,34	125,34	125,35	125,34	125,40
8	125,36	125,42	125,34	125,33	125,38	125,34
9	125,40	125,34	125,34	125,35	125,35	125,33

Завдання 3. **Оцінка точності функцій виміряних величин**

Нехай для визначення значення деякої величини *i* виміряно інші величини *x*, *y*, *z*..., з якими визначувана величина пов'язана функціональною залежністю

$$u = f(x, y, z,...).$$

Якщо середні квадратичні похибки виміряних величин дорівнюють *mx*, *my*, *mz*..., то середня квадратична похибка визначуваної величини виражається формулою

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 m_z^2 + \dots \ . \tag{4}$$

У табл. 2 наведено конкретні варіанти формули (4) для окремих випадків функції *i*.

Таблиця 2

Перехід до СКП для окремих випадків функції

№	Функція	Середня квадратична помилка
1	U = k·x, де k – безпомилкове постійна величина; x – незалежна змінна	$mu = k \cdot mx$
2	U = x + y	$m_u = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$
3	U = x-y	$m_u = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$
4	U = k1·x+k2·y+…+kn·w	$m_u = \sqrt{k_1^2 \cdot m_x^2 + k_2^2 \cdot m_y^2 + \dots + k_n^2 \cdot m_w^2}$
5	U = x·y	$m_u = \sqrt{m_x^2 \cdot y^2 + m_y^2 \cdot x^2}$
6	U = x/y	$m_u = \sqrt{\left(m_x^2 \cdot y^2 + m_y^2 \cdot x^2 \right) / y^4}$

Розглянемо приклади оцінки точності функцій виміряних величин.

Задача 1. Довжину лінії d виміряно по частинах. Відрізок, d_1 = 215,46 м виміряно із середньою квадратичною похибкою m_1 = 0,11 м, а відрізок d_2 = 113,25 з m_2 = 0,04 м. Необхідно оцінити точність вимірювання довжини всієї лінії $d = d_1 + d_2$ = 328,71 м.

Рішення. Середня квадратична похибка визначиться за формою (2) табл. 2:

$$m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = \sqrt{0{,}11^2 + 0{,}04^2} = 0{,}12\,\text{м}.$$

Відносна похибка результату вимірювань:

$$\frac{m_d}{d} = \frac{0{,}12}{328{,}71} = \frac{1}{2700}.$$

Задача 2. *За* допомогою нитяного далекоміра відстань визначається за формулою $d = c \cdot n$, де c = 100 - коефіцієнт далекоміра. Оцінити точність виміряної відстані, якщо відлік по рейці n = 952 мм узято із середньою квадратичною похибкою m_n = 3 мм.

Рішення. За формулою (1) табл. 2 знаходимо d = 100 · 0,952 = 95,2 м; m_d = 100 · 3 = 300 мм = 0,3 м.

Відносна похибка вимірювання:

$$\frac{m_d}{d} = \frac{0{,}3}{95{,}2} = \frac{1}{317}.$$

Задача 3. Під час геометричного нівелювання з односторонніми рейками перевищення h обчислюють як різницю відліків a і b за рейками. Визначити середню квадратичну похибку перевищення, якщо $m_a = m_b$ = 2 мм.

Рішення. За формулою (3) табл. 2 знаходимо:

$$m_h = \sqrt{m_a^2 + m_b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2{,}8 \text{ мм}.$$

Задача 4. Лінія d виміряна 20-метровою рулеткою. Її довжина виявилася рівною 500 м. Середня квадратична похибка відкладення однієї рулетки $m1$ = 0,02 м. Визначити точність вимірювання ліній.

Рішення. Середню квадратичну похибку вимірювання лінії знаходимо за формулою (2) табл. 2:

$$m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2}\,, \text{ при } m_1 = m_2 = m_n = m_l$$

$$m_d = \sqrt{m_l^2 + m_l^2 + \ldots + m_l^2} = m_l\sqrt{n}\,,$$

де n - число відкладень рулетки, n = 500:20 = 25;

$$m_d = 0{,}02 \cdot \sqrt{25} = 0{,}10 \text{ м.}$$

Відносна похибка вимірювання:

$$\frac{m_d}{d} = 0{,}10/500 = 1:5000.$$

Задача 5. Сторони прямокутника a = 120 м і b = 80 м виміряно із середніми квадратичними похибками m_a = 0,10 м і m_b = 0,04 м. Потрібно знайти середню квадратичну похибку обчислення площі $S = a \cdot b$ = 120 м·80 м = 9600 м^2 .

Рішення. Середня квадратична похибка площі визначиться з формули (5) табл. 2:

$$m_s = \sqrt{(a \cdot m_b)^2 + (b \cdot m_a)^2} = \sqrt{(120 \cdot 0{,}04)^2 + (80 \cdot 0{,}10)^2} = 9{,}3 \text{ м}^2.$$

Задача 6. Визначити середню квадратичну похибку вимірювання перевищення методом тригонометричного нівелювання за виміряною відстанню d = 124,16 м і кутом нахилу ν = -2°16', якщо m_d = 0,06 м; а m_ν = 1'. Формула визначення перевищення має вигляд:

$$h = d \cdot tg\nu + k - l, \tag{5}$$

де k і l - висоти приладу і точки наведення, виміряні зі знехтуваними похибками.

Диференціюючи за змінними d і ν і використовуючи формулу загального вигляду (4), отримаємо:

$$\frac{\partial h}{\partial d} = \text{tg}\nu; \quad \frac{\partial h}{\partial \nu} = \frac{d}{\cos^2 \nu}; \quad m_h^2 = (\text{tg}\nu \cdot m_d)^2 + \left(\frac{d}{\cos^2 \nu} m_\nu\right)^2.$$

Підставляючи в отриману формулу вихідні дані, знаходимо:

$$m_h^2 = (0{,}0396 \cdot 0{,}06)^2 + \left(\frac{126{,}16}{0{,}999} \cdot \frac{1'}{3438}\right)^2 = 0{,}00131 \text{ м}^2,$$

де 3438' - число хвилин у радіані.

Остаточно m_h = 0,036 м.

Завдання 4. Обробка результатів низки рівноточних вимірювань однієї величини

Рівноточними називають вимірювання, виконані приладами однакової точності, рівним числом прийомів, в однакових умовах, однаково досвідченими спостерігачами. Якщо для визначення деякої величини X виконано низку рівноточних вимірювань і отримано результати l1, l2,..., ln, то за остаточне значення приймають величину, що обчислюється як середнє арифметичне з усіх результатів:

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}. \qquad (6)$$

За кількості вимірювань n, що прагне до нескінченності, середнє арифметичне L прагне до істинного значення X вимірюваної величини.

Середня квадратична похибка кожного окремого вимірювання визначається за формулою:

$$m = \sqrt{\frac{[\upsilon^2]}{n-1}}, \qquad (7)$$

де $\upsilon = l - L$ - відхилення від середнього арифметичного.

Середньоквадратичну похибку арифметичної середини $m_L = M$ визначають за формулою

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (8)$$

Крім оцінки точності виконаних вимірювань, формула (8) може бути використана для розрахунку кількості вимірювань, необхідної для досягнення заданої точності M. Записуючи формулу (8) відносно n, отримаємо

$$n = \frac{m^2}{M^2}. \qquad (9)$$

Задача 1. Під час дослідження мірної стрічки одна й та сама лінія виміряна 15 разів. Результати вимірювань наведено в табл. 3. Обчислити середнє значення довжини лінії й оцінити точність вимірювань.

Рішення. Обчислимо середнє значення виміряної лінії, для чого складемо і розділимо на 15 десяті та соті частки метрів.

$$L = 156 + \frac{3,75}{15} = 156 + 0,25 = 156,25 \text{ м.}$$

Обчислимо відхилення υ і складемо їх. Їхня сума має бути близькою до нуля (з точністю округлень). Знайдемо суму квадратів відхилень і за формулою (7) визначимо середню квадратичну похибку одного вимірювання:

$$m = \sqrt{\frac{340}{15-1}} = 4,9 \text{ см.}$$

Похибка результату вимірювань (середнього арифметичного) визначимо за формулою (8):

$$M = \frac{4,9}{\sqrt{15}} = 1,3 \text{ см.}$$

Відносна похибка одного вимірювання:

$$\frac{m}{L} = \frac{4,9}{15625} = 1:3200,$$

середнього арифметичного

$$\frac{M}{L} = \frac{1,3}{15625} = 1:12000.$$

Таблиця 3

Результати вимірювань для завдання 1

Номер вимірювання	Результати li вимірювань, м	υi = li - L , см	υ^2, i
1	156,34	9	81
2	156,24	-1	1
3	156,19	-6	36
4	156,23	-2	4
5	156,29	4	16
6	156,27	2	4
7	156,17	-8	64
8	156,24	-1	1
9	156,26	1	1
10	156,30	5	25
11	156,22	-3	9
12	156,30	5	25
13	156,28	3	9
14	156,25	0	0
15	156,17	-8	64
	L = 156,25	[υ] = 0	[υ^2]= 340

Задача 2. Скільки необхідно виконати прийомів для вимірювання кута теодолітом Т30 із середньою квадратичною похибкою 10"?

Рішення. Теодоліт Т30 дозволяє виміряти кут одним прийомом із середньою квадратичною похибкою m = 30". Для досягнення точності, що характеризується середньою квадратичною похибкою M = 10", необхідно виконати:

$$n = \frac{m^2}{M^2} = 30^2 / 10^2 = 9 .$$

Задача 3. Визначити середню квадратичну та відносну похибки результату чотириразового вимірювання лінії.

Вимірювання	Варіанти					
	1	2	3	4	5	6
1	284,34	136,44	95,66	158,63	356,15	468,39
2	284,38	136,52	95,60	158,48	356,29	468,15
3	284,42	136,50	95,56	158,60	356,37	468,45
4	284,38	136,38	95,58	158,57	356,31	468,37

Задача 4. Кут виміряно теодолітом п'ятьма прийомами. Визначити найімовірніше значення кута та його середню квадратичну похибку.

Вимірю-вання	Варіанти				
	1	2	3	4	5
1	37°39'31"	65°37,5'	24°15'30"	115°35'32"	75°46'48"
2	37°39'29"	65°36,0'	24°15'10"	115°35'42"	75°46'32"
3	37°39'35"	65°35,5'	24°15'20"	115°35'39"	75°46'37"
4	37°39'32"	65°36,0'	24°15'45"	115°35'51"	75°46'56"
5	37°39'23"	65°35,0'	24°15'15"	115°35'36"	75°46'47"

Задача 5. Середня квадратична похибка вимірювання кута одним прийомом дорівнює 20". Визначити число прийомів, яким потрібно його виміряти, щоб отримати середню квадратичну похибку арифметичної середини 10".

Задача 6. Планіметром було зроблено чотири вимірювання площі ділянки (см^2). Обчислити найімовірніше значення й середні квадратичні похибки окремого вимірювання та найімовірнішого значення за такими даними.

Вимірю-вання	Варіанти							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	41,0	41,4	41,0	40,5	41,0	40,8	41,6	40,0
2	41,1	41,6	41,5	41,0	40,7	38,3	40,8	42,3
3	40,8	41,1	41,8	39,6	41,2	39,7	40,5	41,7
4	41,1	41,5	41,3	38,9	41,1	41,2	41,1	42,0

Завдання 7. Яким числом прийомів потрібно виміряти кут, щоб середня квадратична похибка його дорівнювала 5", якщо середня квадратична похибка кута, виміряного одним прийомом, дорівнює 15"?

Задача 8. Лінію завдовжки 200 м виміряно з відносною похибкою 1:1000. Скільки разів потрібно повторити вимірювання, щоб відносна похибка середнього арифметичного з усіх вимірів становила 1:2000?

Завдання 5. Побудова інтервальних оцінок

Інтервальна оцінка є інструментом математичної статистики, що дозволяє встановлювати діапазон можливих значень параметру генеральної сукупності з визначеною ймовірністю.

Для прикладу розглянемо інтервальну оцінку середнього значення генеральної сукупності на основі вибірки.

Спочатку згенеруємо вибірку з нормального розподілу з відомими параметрами:

```
import numpy as np
np.random.seed(42)
sample = np.random.normal(loc=10, scale=2, size=100)
```

Тут ми використали функцію numpy.random.normal для генерації вибірки з нормального розподілу з параметрами loc=10 та scale=2, що відповідають середньому значенню та стандартному відхиленню генеральної сукупності.

Далі обчислимо середнє значення та стандартну похибку вибірки:

```
sample_mean = np.mean(sample)
sample_std = np.std(sample, ddof=1)
std_error = sample_std / np.sqrt(len(sample))
```

Тут ми використали функції numpy.mean та numpy.std для обчислення середнього значення та стандартного відхилення вибірки, а також обчислили стандартну похибку за формулою std_error = sample_std / sqrt(n), де n - розмір вибірки.

Далі обчислимо довірчий інтервал для середнього значення генеральної сукупності з довірчою ймовірністю 95%:

```
from scipy.stats import t
alpha = 0.05
t_critical = t.ppf(1 - alpha/2, df=len(sample)-1)
ci_low = sample_mean - t_critical * std_error
ci_high = sample_mean + t_critical * std_error
print(f"95% confidence interval: ({ci_low:.2f}, {ci_high:.2f})")
```

Тут ми використали функцію scipy.stats.t.ppf для обчислення критичного значення статистики t з рівнем довіри 95% та ступенями свободи `df=len(sample)-1

Завдання 6. **Відображення даних**

Відображення набору даних з координатами GPS (широта, довгота) для різних точок на земній поверхні. Кожна точка на графіку відповідає геодезичній точці на земній поверхні.

Варіант 1. Використовуючи numpy

```
import numpy as np
latitude = np.array([50.4501, 49.8397, 49.9808, 48.9226, 46.4825])
longitude = np.array([30.5234, 24.0297, 36.2328, 24.7111, 30.7233])

mean_latitude = np.mean(latitude)
mean_longitude = np.mean(longitude)
print(f"Середня широта: {mean_latitude}, Середня довгота:
{mean_longitude}")

# Візуалізація даних за допомогою scatter plot
plt.scatter(df['Longitude'], df['Latitude'])
plt.title('Геодезичні дані')
plt.xlabel('Довгота')
plt.ylabel('Широта')
plt.show()
```

Варіант 2. Використовуючи pandas

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

# Створення DataFrame з даними GPS
data = {'Latitude': [50.4501, 49.8397, 49.9808, 48.9226, 46.4825],
        'Longitude': [30.5234, 24.0297, 36.2328, 24.7111, 30.7233]}
df = pd.DataFrame(data)

# Візуалізація даних за допомогою scatter plot
plt.scatter(df['Longitude'], df['Latitude'])
plt.title('Геодезичні дані')
plt.xlabel('Довгота')
plt.ylabel('Широта')
plt.show()
```

Варіанти вихідних даних до завдань

Завдання	Задача	Вихідні дані
1	1	data = np.random.normal(loc=№в, scale=2-sin(№в), size=100)
	2	data = np.random.normal(loc=№в*2, scale=2+sin(№в), size=100)
	3	data = np.random.normal(loc=10+(№в*0,5), scale=3+(№в*0,5), size=(100, 2))
2	1	X = 120,071+ №в*0,02
	2	S = 100 +5*sin(№в)
	3	Кут 64°34'20" + 10" *sin(№в)
	4	Відстань 125,382 + 0,05 *cos(№в)
3	1	d_1 = 215,46 + 0,05 *cos(№в) m_1 = 0,11 + 0.005*№в d_2 = 215,46 - 0,05 *cos(№в) m_2 = 0,11 - 0.005*№в
	2	$n = 952$+5 *cos(№в) $c = 100+2$*№в
	3	m_a = 5 * cos(№в) m_b =5 * sin(№в)
	4	d = 2*№в l = 500 + 5*№в
	5	a = 120 + №в b = 80 + 2*№в
	6	d = 100 + 50* cos(№в) ν = -2°16' + cos(№в) '
4	1	В 5 та 10 значення виміряної величини додати 0,02*№в
	2	СКП 10"+ 5 *cos(№в)
	3	В друге вимірювання лінії додати 0,01*№в
	4	В третій кут додати №в"
	5	СКП одним прийомом = 20"+ 10 *cos(№в)
	6	В друге вимірювання лінії додати 0,01*№в
	7	СКП одним прийомом = 15"+ 10 *cos(№в)
	8	Довжина лінії 200 м + 10*№в
5	1	data = np.random.normal(loc=№в*2, scale=2+sin(№в), size=100)
6	1	Оберіть 10 місць в яких ви хотіли б побувати, координати широти та довготи використайте в роботі. Можна використати сервіс https://geojson.io/

Список літератури

1. Маттес Ерік. Пришвидшений курс Python : практичний, проєктно-орієнтований вступ до програмування / Ерік Маттес ; з англійської переклала Ольга Бєлова. – Львів : Вид-во Старого Лева, 2021. – 556 с.
2. Васильєв О. М. Програмування мовою Python / О.М. Васильєв. – Тернопіль : Вид-во "Навчальна книга-Богдан", 2021. – 503 с.
3. Learn Python [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.c-sharpcorner.com/learn/learn-python
4. Математика: алгебра та початки аналізу. Ч. І: навч. посіб. / О.В.Левчук, Л.С.Яхно, В.М.Кобзар. – Вінниця: ВНАУ, 2019. – 320 с.

Навчально-методичне видання

ПРОГРАМНІ КОМПЛЕКСИ ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКІВ

Методичні вказівки та завдання
до виконання лабораторних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 193 «Геодезія та землеустрій»

Укладач **Медведський** Юрій Вікторович

Комп'ютерне верстання *А. П. Селівестрової*

Ум. друк. арк. 1,63. Обл.-вид. арк. 1,75
Електронний документ. Вид № 97/V-25

Виконавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури
Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.