УДК 531.31

М.В. Гончаренко, канд. техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОН ЗГУЩЕННЯ ОБЛАСТЕЙ НЕСТІЙКОСТІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Досліджується динамічна стійкість пружних систем при стохастичному параметричному навантаженні. Розглядаються два визначення стійкості: по імовірності і відносно моментних функцій. Коротко описуються процедури побудови меж областей динамічної стійкості за цими умовами при стаціонарному випадковому навантаженні. На прикладі задачі про динамічну стійкість кругової циліндричної оболонки при осьовому параметричному навантаженні побудовані області стійкості.

Досліджується вплив стохастичного характеру параметричного навантаження на конфігурацію областей стійкості пружних систем. Це питання являється частиною загальної проблеми аналізу параметричних резонансів в динамічних системах. Параметричні коливання, що часто супроводжують вимушені коливання, схожі з ними за зовнішніми проявами. Між тим в ряді випадків відомі методи депфірування і віброізоляції можуть не знизити рівень впливу, при якому виникають параметричні коливання. Тому вивчення умов виникнення і дослідження інтенсивності параметричних резонансів є актуальною проблемою у машинобудуванні, транспорті і промисловому будівництві. Такі дослідження для гармонічного параметричного навантаження викладені в роботах Н.М.Беляєв[4], Н.М.Крилов, Н.Н.Боголюбов[5], В.В.Болотін [6].

Випадковий характер більшості реальних процесів вимагає стохастичної постановки задачі. Зокрема при вітровому збудженні, навантаженні від промислового неврівноваженого обладнання та інших збудженнях доцільно використовувати модель стаціонарного випадкового впливу. Закінченими можна вважати дослідження, присвячені стійкості параметричних коливань при навантаженні типу білого шуму, оскільки в цьому випадку аналіз базується на теорії марковських процесів. Для випадкових параметричних збуджень із скінченним радіусом кореляції такого універсального підходу немає, розглянуті конкретні задачі, зокрема стійкість циліндричних оболонок [1-3].

Досліджується динамічна стійкість замкненої кругової циліндричної оболонки, шарнірно опертої по контуру. По торцях оболонки прикладене рівномірно розподілене динамічне стохастичне навантаження. Будуються межі динамічної стійкості при випадковому параметричному навантаженні за двома визначеннями: по імовірності і відносно моментних функцій.

Рівняння руху пружної системи при параметричному навантаженні після переходу до системи рівнянь у нормальних координатах мають вигляд

$$\ddot{y}_i(t)+2\xi_i\omega_{0i}\dot{y}_i(t)+\omega_{0i}^2 y_i(t)+\varphi(t)\sum_{k=1}^{n} g_{ik}y_k(t)=0\,,\quad (i,k=1,2,...,n),\quad (1)$$

де $y_i(t)$ – узагальнені координати, ω_{0i} – власні частоти системи, ξ_i – модальні параметри затухання, $\varphi(t)$ – стаціонарний випадковий процес, g_{ik} – компоненти матриці геометричної жорсткості.

Принциповим є той момент, що згідно із загальною теорією усереднення М.М. Боголюбова в рамках першого наближення при дослідженні динамічної стійкості можна розглядати тільки прості головні й комбінаційні резонанси. Відомо [8], якщо в пружній системі власні форми коливань співпадають з формами втрати стійкості при дії статичних навантажень, то $g_{ik}=0$ при $i\neq k$ і система (1) розпадається на незалежні рівняння, кожне з яких описує поведінку однієї з узагальнених координат:

$$\ddot{y}_i(t)+2\xi_i\omega_{0i}\dot{y}_i(t)+\omega_{0i}^2 y_i(t)+\varphi(t)g_{ii}y_i(t)=0\,,\quad (i=1,2,...,n)\,.\quad (2)$$

Відомо [6], що при гармонічному параметричному навантаженні прості резонанси знаходяться біля частот

$$\nu=\frac{2\omega_i}{m}\,,\qquad \begin{pmatrix} i=1,2...n \\ m=1,2... \end{pmatrix},\quad (3)$$

і межі таких зон визначаються виразом

$$\nu\approx 2\omega_i\left(1\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\mu^2\left(k_{ii}^g\right)^2-4\xi_i^2}\right).\quad (4)$$

Досліджується динамічна стійкість циліндричної оболонки в зоні цих же частот при стаціонарному стохастичному параметричному навантаженні. Випадковий вплив моделюється процесом з прихованою періодичністю, кореляційна функція якого має вигляд

$$\left\langle f(t) f(t+\tau) \right\rangle = \left[\cos\left(\theta_\alpha |\tau|\right) + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin\left(\theta_\alpha |\tau|\right)\right] \sigma^2 \exp\left(-\alpha|\tau|\right). \tag{5}$$

Спектральна щільність такого процесу описується виразом:

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha\theta^2}{\left(\omega^2 - \theta^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad \theta^2 = \theta_\alpha^2 + \alpha^2, \tag{6}$$

де θ - прихована частота, σ^2 - дисперсія, α - радіус кореляції.

При дослідженні динамічної стійкості при стохастичному навантаженні виникає проблема вибору визначення стійкості. Розглядаються два найбільш поширені визначення стійкості: стійкість відносно моментних функцій та стійкість по імовірності.

За першим визначенням для оцінки стійкості системи складаються рівняння відносно моментних функцій. Цей метод дозволяє звести дослідження стійкості рішень стохастичних диференціальних рівнянь до дослідження стійкості детерміністичних диференціальних рівнянь, що описують еволюцію моментних функцій. При дослідженні параметричних резонансів рішення системи (2) зводиться до дифузійного марківського процесу. Система диференціальних рівнянь будується методом усереднення, що ґрунтується на теоремі Стратоновича-Хасьмінського. Дослідження динамічної стійкості пружної системи зводиться до дослідження стійкості тривіального розв’язку:

$$\det\begin{bmatrix} \left(-2\xi_i\omega_i + \frac{1}{2} g_{ii}^2 S(2\omega_i) + \frac{1}{4} g_{ij} g_{ji} S^-\right) - \eta & \frac{1}{4} g_{ij}^2 S^+ \\ \frac{1}{4} g_{ji}^2 S^+ & \left(-2\xi_j\omega_j + \frac{1}{2} g_{jj}^2 S(2\omega_j) + \frac{1}{4} g_{ij} g_{ji} S^-\right) - \eta \end{bmatrix} = 0, \tag{7}$$

де $S^{\pm} = S\left(\omega_i + \omega_j\right) \pm S\left(\omega_i - \omega_j\right)$.

Таким чином, задача дослідження стійкості в середньоквадратичному системи (2) зводиться до задачі на власні значення (7). Обчислюються власні значення η_i при збільшенні інтенсивності випадкового навантаження μg_{ij}. Найменше значення μg_{ij}, при якому серед власних значень η_i з'являється хоча б одне з додатною дійсною частиною, вважається межею області стійкості.

Щоб отримати межу стійкості по імовірності, Ераертнам показав [9], що потрібно дослідити відповідні показники λ:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)\coth\left[\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(\Delta_0)^{1/2}}\alpha_1\right]\right\}+\frac{1}{8}k_{12}k_{21}S^-, \quad (b_1>0), \tag{8}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)\coth\left[\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(-\Delta_0)^{1/2}}\alpha_2\right]\right\}+\frac{1}{8}k_{12}k_{21}S^-, \quad (b_1<0), \tag{9}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)\coth\left[\frac{4(\lambda_1-\lambda_2)}{|k_{12}k_{21}|S^+}\right]\right\}+\frac{1}{8}k_{12}k_{21}S^-, \quad (b_1=0), \tag{10}$$

де прийняті позначення

$$b_1 = \frac{1}{8}\left[(\lambda_1+\lambda_2+\xi\omega_1+\xi\omega_2)-g_{12}g_{21}S(\omega_1+\omega_2)\right],$$

$$\lambda_1 = -\xi\omega_1+\frac{1}{8}g_{11}^2 S(2\omega_1), \quad \lambda_2 = -\xi\omega_2+\frac{1}{8}g_{22}^2 S(2\omega_2), \tag{11}$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arch}\left(\frac{K}{2|g_{12}g_{21}|S^+}\right), \quad \alpha_2 = \arccos\left(\frac{K}{2|g_{12}g_{21}|S^+}\right),$$

$$K = g_{11}^2 S(2\omega_1)+g_{22}^2 S(2\omega_2)\mp 2g_{12}g_{21}S^-, \quad \Delta_0 = \frac{1}{64}\left[K^2-4g_{12}^2 g_{21}^2 (S^+)^2\right].$$

Розглядається алюмінієва циліндрична оболонка [7], що має зону згущення власних частот. Радіус оболонки 44,45 мм, довжина 88,9 мм, відношення радіусу до товщини 400. Найменші власні частоти:

$$\omega_{1,7} = 0{,}706374\cdot 10^4 \text{ рад/с}, \quad \omega_{1,8} = 0{,}714375\cdot 10^4 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{1,9} = 0{,}796671\cdot 10^4 \text{ рад/с}, \quad \omega_{1,6} = 0{,}804672\cdot 10^4 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{1,10} = 0{,}926973 \cdot 10^4 \text{ рад/с},\ \omega_{1,5} = 1{,}053846 \cdot 10^4 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{1,7} = 1{,}091565 \cdot 10^4 \text{ рад/с},\ \omega_{1,12} = 1{,}281303 \cdot x10^4 \text{ рад/с}.$$

Відомо, що найбільш небезпечною є область нестійкості головного резонансу, яка знаходиться біля подвійної власної частоти. Визначаються межі областей нестійкості для кожної власної частоти для навантаження двох типів – гармонічного і стохастичного. Побудовані області нестійкості при різних значеннях радіуса кореляції $\alpha = k\omega_o$.

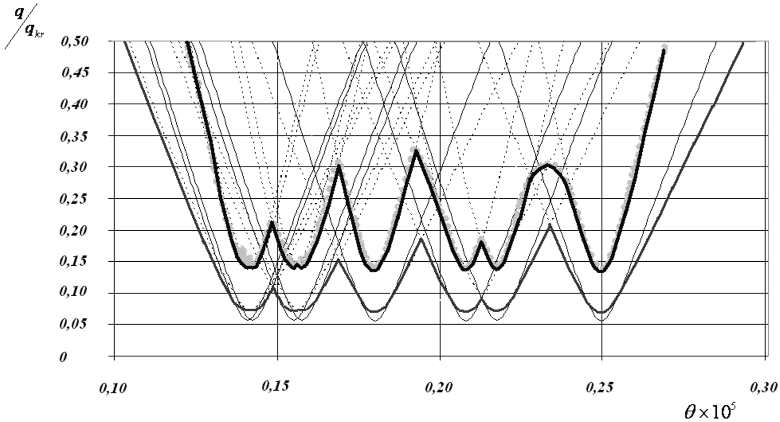

Рис.1. Межі стійкості в зонах простих головних резонансів при k=0,25

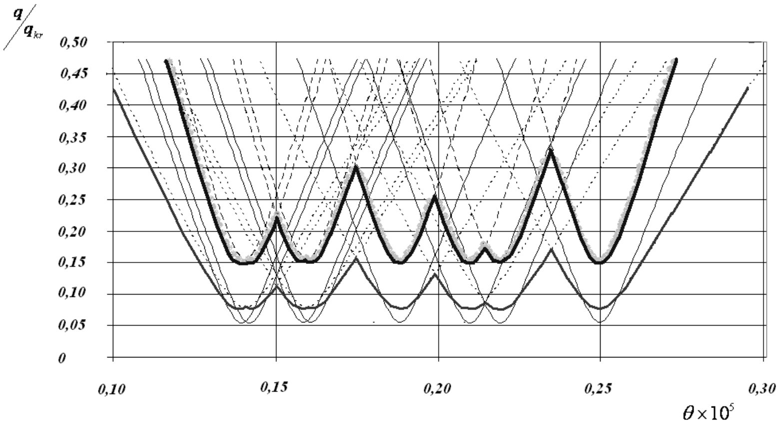

Рис.2. Межі стійкості в зонах простих головних резонансів при k=0,5

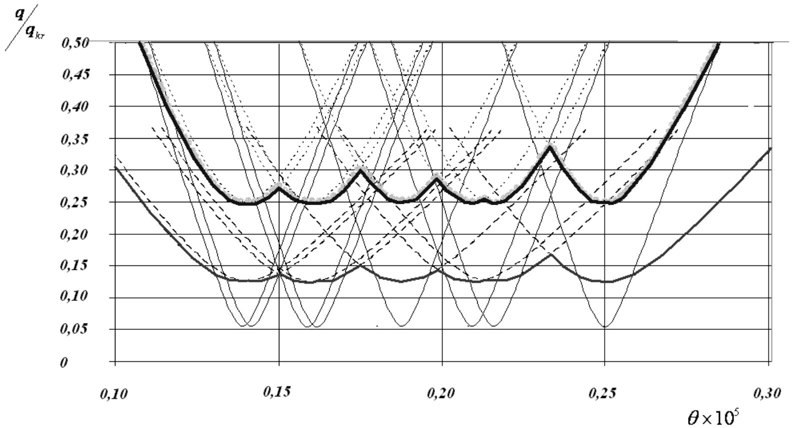

Рис.3. Межі стійкості в зонах простих головних резонансів при k=2,0

На рис. 1 і 2 нижня межа стійкості відповідає гармонічному навантаженню, середня лінія – межа стійкості відносно моментних функцій, верхня – межа стійкості по імовірності. Таким чином умова стійкості відносно момент них функцій є більш жорсткою, різниця складає 40-50%. Для оболонки, що розглядалась, області нестійкості при стохастичному навантаженні розширюються і в зоні згущення власних частоту утворюють загальну область нестійкості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Бусетта М., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В.* Динамічна стійкість пружних систем при стохастичному параметричному збудженні // Опір матеріалів і теорія споруд.– К.: КНУБА. – 2000. – С. 51-59.
2. *Баженов В.А., Бусетта М., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В.* Границі областей динамічної стійкості стиснутих силових елементів конструкцій,що піддаються додатковому поздовжньому випадковому навантаженню // Будівництво України – 2001. – №2. – С. 43-47.
3. *Баженов В.А., Бусетта М., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В.* Стійкість динамічних систем при періодично нестаціонарному параметричному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд – К.: КНУБА, 2002. – Вип. 71. – С. 21-29.
4. *Беляев Н.М.* Устойчивость призматических стержней под действием продольных сил // Инж. сооружения и строит.механика.-М.: Путь, 1924.
5. *Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.* Введение в нелинейную механику.- К.: изд-во АН УССР, 1937. -363с.
6. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред.В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352с.
7. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 314 с.

8. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175с.
9. *Ariaratnam S.T., Wei-Chau Xie.* Lyapunov exponents and stochastic Stability of coupled linear systems under real noise excitation // Journal of applied mechanics. Transactions of the ASME. – 1992. – Vol.59. – P. 664-673.

Отримано 14.09.09.

М.В. Гончаренко

Исследование зон сгущения областей неустойчивости цилиндрической оболочки

Исследуется динамическая устойчивость упругих систем при стохастической параметрической нагрузке. Рассматриваются два определения устойчивости: по вероятности и относительно моментных функций. Коротко изложены процедуры построения границ областей динамической устойчивости при стационарной случайной нагрузке. На примере задачи про динамическую устойчивость круговой цилиндрической оболочки при осевой параметрической нагрузке построены области устойчивости.

M.V. Goncharenko

Investigation of cylindrical shell instability regions concentration

Dynamic stability of elastic systems under stochastic parametric loads is investigated. Two kinds of the stability determination is considered: probability stability and stability about moment functions. The technique for building of dynamic stability regions boundaries under stationary parametric loads is briefly described. Dynamic stability regions is obtained for example of the dynamic stability of a closed circular cylindrical shell subjected to longitudinal compression is investigated.