УДК 539.3

Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук,
Немчинова Л.Ю.,
Отрашевська В.В.

ЗАЛЕЖНІСТЬ КРИТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ ІНТЕНСИВНОСТІ СТОХАСТИЧНОГО ПАРАМЕТРИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ВІД РАДІУСА КОРЕЛЯЦІЇ

Розглядаються питання динамічної стійкості пружних систем при стохастичному навантаженні. Для експоненціально корельованих стохастичних збуджень вивчається залежність критичних значень інтенсивності збудження від його радіуса кореляції, значення якого неперервно змінюються в межах певного діапазона.

Розглядаються питання динамічної стійкості пружних систем при стохастичному навантаженні. Класичні результати в цій області одержані для навантаження, яке є стаціонарним білим шумом, тобто дельта-корельованим випадковим процесом. Дослідження корельованих впливів проводяться шляхом розширення фазового простору за рахунок включення до фазових змінних складових зовнішнього впливу, і представлення його за допомогою рівнянь формуючого фільтра у вигляді реакції на білий шум. Це приводить до нелінійності розглядуваної задачі. В даній роботі використовується підхід, який дозволяє для експоненціально корельованого збудження розширювати фазовий простір без використання формуючих фільтрів і, таким чином, не приводить до нелінійної задачі. Це досягається за рахунок представлення вказаного збудження у вигляді нескінченної суми статистично незалежних сигналів з експоненціальною кореляційною функцією.

Вивчається залежність критичних значень інтенсивності стохастичного збудження від його радіуса кореляці. Така залежність для окремих значень радіуса кореляції досліджувалася в [1]. В даній роботі це питання досліджується при неперервніій зміні радіуса в межах певного діапазону.

Дискретна динамічна модель тонкостінної конструкції представляється рівняннями

$$M\ddot{\bar{u}} + C\dot{\bar{u}} + K\bar{u} + \varphi(t)K_G\bar{u} = 0\,, \qquad (1)$$

де M, G, K, K_G – матриці мас, демпфірування, жорсткості і геометричної жорсткості відповідно, $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)\right)^T$ – n-вимірний вектор динамічних змінних.

Змінне в часі параметричне навантаження задається у вигляді

$$\varphi(t) = \mu z(t)\,, \tag{2}$$

де μ – параметр навантаження, *z(t)* – експоненціально-корельований нормальний випадковий процес із одиничною дисперсією.

При певних значеннях інтенсивності навантаження втрачається стійкість первісного стану розглядуваної динамічної системи. Існують різні означення стійкості стохастичних систем, це може бути стійкість за імовірністю, стійкість у середньому, по сукупності моментних функцій другого порядку, третього порядку і т.д. При аналізі стійкості відносно моментних функцій задача зводиться до дослідження стійкості тривіального розв'язку детерміністичних диференціальних рівнянь. В даній роботі за означення стійкості приймається стійкість відносно моментних функцій другого порядку. Пропоновані методи можуть бути застосовані для дослідження стійкості відносно моментних функцій інших порядків.

Для переходу до рівнянь першого порядку вводяться фазові змінні:

$$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_{2n}(t))^T = \left(\bar{x}_1(t) \oplus \bar{x}_2(t)\right)^T =$$

$$= (u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t), \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), ..., \dot{u}_n(t))^T\,. \tag{3}$$

Щоб дістати рівняння для других моментів фазових координат, складається система рівнянь відносно компонент матриці $\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)$. Після усереднення по реалізаціях процесу *z(t)* враховуючи (2) можна записати систему матричних рівнянь відносно матриці других моментів $\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \right\rangle$:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle = A\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle + \left\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle A^T +$$

$$+ \mu B\left\langle z(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle + \mu\left\langle z(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle B^T\,, \tag{4}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}K_G & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Оскільки матриця $\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)$ розмірності $2n \times 2n$ симетрична, кількість одержуваних рівнянь є надлишковою. Тому за допомогою взаємно-однозначного відображення, описаного у [2], здійснюється перехід із множини симетричних матриць у множину $n(2n+1)$-вимірних векторів, що складаються із елементів матриць, розташованих не нижче головної діагоналі.

Система (4) містить нові змінні $\left\langle zx_i x_j \right\rangle$ (i=1,2,…n, j=1,2,…n, $j \le i$) і незамкнена відносно других моментів. Ці нові змінні є кореляціями процесу $z(t)$ із компонентами вектора розв‘язку задачі $\bar{x}(t)$. Ця типова для динамічних систем із стохастичним параметричним збудженням проблема в даній роботі вирішується у випадку, коли $z(t)$ є експоненціально-корельованим нормальним процесом із кореляційною функцією

$$K(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \tag{6}$$

де α – параметр кореляції, який пов‘язаний з радіусом кореляції ρ цього процесу співвідношенням $\rho = \dfrac{1}{\alpha}$. Таким чином, стохастична складова параметричного збудження $\mu z(t)$ має дисперсію μ^2. Для такого процесу вказана проблема розв‘язується шляхом розширення фазового простору, у якому розглядається розв‘язок. Це досягається за рахунок апроксимації параметричного збудження $z(t)$ скінченною сумою статистично незалежних телеграфних сигналів ([3]):

$$z(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) + ... + \xi_N(t), \tag{7}$$

де взаємно-кореляційна матриця телеграфних процесів має вигляд

$$< \xi_i(t)\xi_i(t+\tau) >= \sigma_{ij} \frac{\sigma_0^2}{N} e^{-\alpha|\tau|}. \tag{8}$$

Відомо, що при $N \to \infty$ $z_N(t) \to z(t)$.

Якщо замінити в (2) $z(t)$ на $z_N(t)$, то, як показано в [3] і [2], застосовуючи операцію усереднення, для дослідження стійкості можна скласти послідовність детерміністичних рівнянь відносно моментних функцій:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{m}_{02}(t) = \left\langle x_i(t) x_j(t) \right\rangle, \\
\boldsymbol{m}_{12}(t) = \left\langle \xi_1(t) x_i(t) x_j(t) \right\rangle, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{m}_{k2}(t) = \left\langle \xi_1(t)\xi_2(t)...\xi_k(t) x_i(t) x_j(t) \right\rangle, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{m}_{N2}(t) = \left\langle \xi_1(t)\xi_2(t)...\xi_N(t) x_i(t) x_j(t) \right\rangle.
\end{gathered} \tag{9}$$

Ця система має вигляд

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_{02} \\ \boldsymbol{m}_{12} \\ \vdots \\ \boldsymbol{m}_{N2} \end{pmatrix} = S_1 \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_{02} \\ \boldsymbol{m}_{12} \\ \vdots \\ \boldsymbol{m}_{N2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_{02} \\ \boldsymbol{m}_{12} \\ \vdots \\ \boldsymbol{m}_{N2} \end{pmatrix}^T \times S_2 , \qquad (10)$$

де S_1 і S_2 блокові тридіагональні матриці з коефіцієнтами, що не залежать від t [2].

Стійкість тривіального розв′язку автономної системи (10) визначається характеристичними показниками λ, які є коренями алгебричного рівняння

$$\det(R^* - \lambda E^*) = 0 , \qquad (11)$$

де E – одинична матриця, а матриця R утворена із матриць S_1 і S_2. Тривіальний розв‘язок буде асимптотично стійким, якщо всі характеристичні показники мають від‘ємну дійсну частину і асимптотично нестійким, якщо серед характеристичних показників є хоча б один з додатньою дійсною частиною.

В даній роботі залежність критичних значень інтенсивності стохастичного параметричного навантаження від радіуса кореляції досліджується на прикладі тривіального розв‘язку рівняння Мат‘є-Хілла:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0 \left[1 + \varphi(t)\right] u = 0 . \qquad (12)$$

Розглядається питання про вплив радіуса кореляції ρ параметричного збудження на стійкість стохастичної системи. Дослідження проводилися для таких значень параметра загасання ε: 0,05; 0,02 і $\frac{\delta}{2\pi}$ ($\delta = 0{,}05$).

На рис. 1 зображені границі областей стійкості, побудовані при вказаних значеннях ε. З наведених графіків видно, що залежність критичних значень μ від радіуса кореляції, взагалі кажучи, не є монотонною, монотонність порушується із зменшенням значення ε.

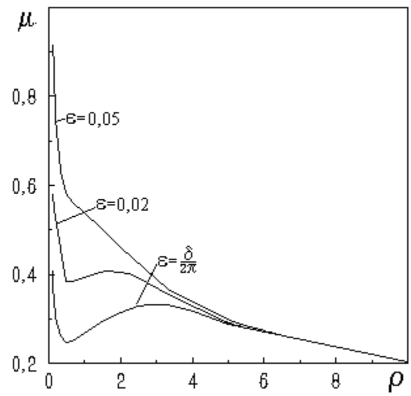

Рис. 1

Зокрема, при $\varepsilon = \frac{\delta}{2\pi}$ із збільшенням радіуса кореляції спочатку спостерігається досить різке спадання до значення $\mu = 0.249$ при $\rho = 0.5$, потім значення μ дещо збільшується і досягає значення $\mu = 0.333$ при $\rho = 0.286$, а далі монотонно спадає. Такий же характер залежності, але із меншими коливаннями зберігається при $\varepsilon = 0.02$, а вже при $\varepsilon = 0.05$ критичний рівень стохастичного навантаження тільки спадає із зростанням радіуса кореляції.

1. *Дехтярюк Є.С., Немчинова Л.Ю., Отрашевська В.В.* Вплив радіуса кореляції стохастичного навантаження на структуру областей стійкості пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.: КНУБА. 2004. – Вип. 74. - С. 48-59.
2. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В., Гончаренко М.В.* Стабілізація стійкості сталих коливальних режимів динамічних систем при комбінованому збудженні.//Авиационно-космическая техника и технология. Харьков “ХАИ”. – 2004.- С.51-58.
3. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 336 с.

Надійшла до редколегії 31.10.2005 р.