МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

**О. В. Горда**

# ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

***Конспект лекцій***
для студентів спеціальностей
122 «Комп'ютерні науки» та
126 «Інформаційні системи і технології»

У двох частинах
Частина 2

Київ 2024

УДК 517 (07)
Г67

Рецензент С. Д. Бушуєв, д-р техн. наук, професор

*Затверджено на засіданні навчально-методичної ради КНУБА, протокол № 3 від 24 жовтня 2023 року.*

**Горда О. В.**

Г67 Теорія прийняття рішень : конспект лекцій / О. В. Горда. – Київ : КНУБА, 2024. – 144 с.

Містить теоретичний і довідковий матеріал, ілюстрований конкретними прикладами, контрольні запитання, список літератури. Розглянуто основні етапи вирішення задач прийняття рішень із використанням існуючих математичних методів та алгоритмів.

У другій частині конспекту лекцій розглянуті методи експертних оцінок, прийняття рішень в умовах ризиків і невизначеності, пов’язані з ними проблеми й сучасні інтелектуальні підходи та методи їх вирішення.

Призначено для студентів, які навчаються за спеціальностями 122 «Комп’ютерні науки», 126 «Інформаційні системи і технології».

УДК 517 (07)

**Зміст**

Вступ……..………………………………………………………...5

**Лекція 9.** Методи експертних оцінок

9.1. Сутність методу експертних оцінок……...…………………………6

9.2. Вибір експертів………………………………………………………9

9.3. Організація опитування експертів…………………...…………….12

9.4. Обробка експертних оцінок…………………………...…………13

9.4.1. Побудова узагальненої оцінки об’єктів………………......….13

9.4.2. Обробка результатів оцінювання групою експертів...…………16

9.4.3. Оцінка узгодженості думок експертів…………………………..20

Контрольні запитання….……………………………………………..26

**Лекція 10.** Прийняття рішень в умовах ризиків і невизначеності

10.1. Основні поняття..…………………………………………………27

10.2. Методи прогнозування...…………………………………………29

10.2.1. Прогнозування на основі ковзного середнього…...…………….30

10.2.2. Експоненціальне згладжування...……………………………...33

10.3. Матриця рішень і матриця ризиків...……………………………......33

10.4. Основні підходи прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності…………………………………………….……….35

10.5. Класичні критерії прийняття рішень……………………………..38

10.5.1. Базові критерії…………………………………………………..38

10.5.2. Похідні критерії………………………………………………….42

Контрольні запитання.……………………………………………..46

**Лекція 11.** Імовірнісні методи прийняття рішень в умовах ризиків і невизначеності

11.1. Поняття ризику. Класифікація та управління ризиками...………...47

11.2. Аналіз ризику……………………………………………………….48

11.3. Постановка задачі прийняття рішення в умовах ризику…………..49

11.4. Основні критерії прийняття рішень в умовах ризиків……………..51

11.5. Прийняття рішення на основі дерева рішень…...…………………..58

11.6. Задачі прийняття рішень на основі марківських процесів...………63

Контрольні запитання…………………………………………………..71

**Лекція 12.** Елементи теорії ігор

12.1. Поняття теорії ігор...……………………………………………….72

12.2. Матричні ігри...……………………………………………………..73

12.3. Визначення оптимальної стратегії в матричній грі...……………...75
12.4. Чисті та змішані стратегії……………………………………78
12.5. Вирішення матричних ігор у змішаних стратегіях...………………81
12.6. Зведення гри до задачі лінійного програмування...………………..87
12.7. Наближені методи розв’язання матричних ігор...…………………91
Контрольні запитання……………………………………………..92
**Лекція 13.** Позиційні ігри
13.1. Позиційні ігри. Загальні відомості...…………………………..92
13.2. Задання позиційної гри у вигляді дерева...………………………95
13.3. Позиційна гра з повною інформацією...……………………………98
13.4. Приведення гри до нормальної форми...…………………………..100
13.5. Нескінченні антагоністичні ігри...………………………………102
Контрольні запитання……………………………………………106
**Лекція 14.** Сучасні інтелектуальні методи прийняття рішень
14.2. Поняття генетичного алгоритму...………………………………109
14.3. Порядок застосування генетичного алгоритму...…………………115
14.4 Приклади постановки завдань для генетичного алгоритму
Задача компонування……………………………………………..116
14.5 Приклади застосування генетичного алгоритму до задач
прийняття рішень……..………………………………………...119
Контрольні запитання……………………………………………122
**Лекція 15.** Застосування нечітких множин до задач прийняття рішень
15.1. Поняття нечіткої множини та способи її задання...………………123
15.2. Операції над нечіткими множинами...……………………………124
15.3. Застосування теорії нечітких множин до задач теорії
прийняття рішень………………………………………………...125
15.4. Нечіткі виведення…………………………………………………...126
15.5. Алгоритм нечіткого виведення……………………………………127
15.6. Нечіткі цілі, обмеження та рішення...…………………………..127
15.7. Нечіткий багатокритеріальний аналіз варіантів…………………130
15.8. Приклади застосування нечітких множин у теорії
прийняття рішень…….…………………………………………...132
Контрольні запитання……………………………………………143
Список літератури………………………………………………...144

**Вступ**

Теорія прийняття рішень (ТПР) є міждисциплінарним курсом. Термін «прийняття рішень» зустрічається в різних наукових дисциплінах, таких як штучний інтелект, економіка, когнітивна психологія, політологія, дослідження операцій та ін.

Дисципліна «Теорія прийняття рішень» входить до навчальних планів усіх комп'ютерних, а також ряду природничо-наукових і спрямованих на бізнес спеціальностей широкого профілю. Це викликано вимогами науково-технічного прогресу, у процесі якого людство йде шляхом використання все більш складних технічних та інформаційних засобів, а також використання складних природних об'єктів або систем.

Метою конспекту лекцій є формування та впорядкування знань у сфері теорії прийняття рішень. У процесі вивчення дисципліни студенти повинні знати:

– основні поняття теорії прийняття рішень;

– основні методи прийняття рішень; умови їх застосування та практичні обмеження;

– базові поняття, пов'язані з прийняттям рішень і системним аналізом;

– класифікацію та суть математичних моделей і методів для формалізації та оптимізації задач прийняття рішень;

– етапи процесу прийняття рішень.

Конспект лекцій складається з двох частин. У другій частині конспекту лекцій розглянуто методи експертних оцінок, прийняття рішень в умовах ризиків і невизначеності. Також приділено увагу сучасним інтелектуальним підходам і методам розв'язання складних задач ТПР.

В основу конспекту лекцій покладено основні роботи та публікації вітчизняних і зарубіжних авторів, де викладено теоретичні основи, методи й алгоритми прийняття рішень.

Матеріал викладений у доступній формі для його сприйняття студентами старших курсів і молодими науковцями. Наведено багато прикладів, які ілюструють основні поняття та положення завдань із прийняття рішень.

# *Лекція 9.* Методи експертних оцінок

## 9.1. Сутність методу експертних оцінок

Сутність методу експертних оцінок полягає в проведенні експертами інтуїтивно-логічного аналізу проблеми з кількісною оцінкою суджень і формальною обробкою результатів. Отримана за результатами обробки думка експертів приймається як вирішення проблеми. Комплексне використання інтуїції (неусвідомленого мислення), логічного мислення й кількісних оцінок з їх формальної обробкою дає змогу в багатьох випадках отримати ефективне рішення проблеми.

У випадках досить складної проблеми або її новизни та недостатності наявної інформації, неможливості математичної формалізації процесу вирішення звертаються до рекомендацій компетентних фахівців (експертів), які добре знають проблему або відповідну предметну сферу. Таке вирішення завдання, аргументація, формування кількісних оцінок з їх подальшою обробкою формальними методами отримали назву методу експертних оцінок.

Для застосування методу експертних оцінок у процесі прийняття рішень потрібно розглянути питання підбору експертів, проведення опитування й обробки його результатів.

Виділяють дві групи експертних оцінок:

- індивідуальні оцінки, які ґрунтуються на використанні думки окремих експертів, незалежних один від одного;
- колективні оцінки, що ґрунтуються на використанні колективної думки експертів.

Існуючі види експертних оцінок можна класифікувати за різними ознаками.

1. За формою участі експертів: очна, заочна. Очний метод дає змогу зосередити увагу експертів на розв’язуваної проблеми, що підвищує якість результату, проте заочний метод може бути дешевшим.
2. За кількістю ітерацій (повторів процедури для підвищення точності): однокрокові, багатокрокові.
3. За важливістю справ: генеруючі рішення, оцінка варіантів.
4. За типом відповіді: описові і ранжуючі, що оцінюють об’єкт за відносною або абсолютною (чисельною) шкалою.

5. За способом обробки думок експертів: безпосередні й аналітичні.

6. За кількістю залучених експертів: без обмеження і з обмеженнями. Зазвичай залучається 5–12 експертів.

Експерти повинні мати досвід у відповідних сферах. Під час підбору експертів слід враховувати момент особистої зацікавленості, який може стати суттєвою перешкодою для отримання об’єктивного судження.

Характерними особливостями методу експертних оцінок як наукового інструменту вирішення складних неформалізованих проблем є, по-перше, науково обґрунтована організація проведення всіх етапів експертизи, що забезпечує найбільшу ефективність роботи на кожному з етапів, і, по-друге, застосування кількісних методів – як під час організації експертизи, так і для оцінки суджень експертів і формальної групової обробки результатів.

Множину погано формалізованих проблем умовно можна розділити на два класи. До першого класу належать проблеми, щодо яких є достатній обсяг інформації, який дає змогу успішно вирішувати ці проблеми. Основні труднощі у вирішенні проблем першого класу в процесі експертної оцінки полягають у реалізації існуючого інформаційного потенціалу шляхом підбору експертів, побудови раціональних процедур опитування та застосування адекватних методів обробки його результатів. При цьому методи опитування та методи обробки ґрунтуються на використанні принципу «хорошого» вимірювача. Цей принцип означає, що виконуються такі гіпотези:

1) експерт є сховищем великого обсягу раціонально обробленої інформації і тому може розглядатися як якісне її джерело;

2) групова думка експертів близька до справжнього розв’язання проблеми.

До другого класу належать проблеми, щодо яких інформаційний потенціал знань недостатній для впевненості в справедливості зазначених гіпотез. Для вирішення проблем цього класу експертів уже не можна розглядати як «хороших вимірників». Тому потрібно дуже обережно проводити обробку результатів експертизи. Застосування методів осереднення, справедливих для «хороших вимірників», у цьому випадку може призвести до значних помилок. Наприклад, думка одного експерта сильно відрізняється від думок інших експертів. У зв’язку із цим для проблем другого класу переважно повинна застосовуватися якісна обробка. Сфера застосування методу експертних оцінок досить широка.

Метод експертних оцінок застосовується для вирішення проблем прогнозування, планування та розробки програм діяльності, нормування праці, вибору перспективної техніки, оцінки якості продукції та ін. Перерахуємо типові завдання, які вирішуються методом експертних оцінок:

1) складання переліку можливих подій у різних сферах за певний проміжок часу;

2) визначення найбільш імовірних інтервалів часу звершення сукупності подій;

3) визначення цілей і завдань управління з упорядкуванням їх за ступенем важливості;

4) визначення альтернативних (варіантів вирішення завдання) з оцінкою їх переваги;

5) альтернативний розподіл ресурсів для вирішення завдань з оцінкою їх переваги;

6) альтернативні варіанти прийняття рішень у певній ситуації з оцінкою їх переваги.

У процесі прийняття рішень експерти виконують інформаційну й аналітичну роботу з формування та оцінки рішень. Задачі, які вирішуються експертами, можна звести до таких типів:

- формування об’єктів;
- визначення характеристик об’єктів;
- визначення оцінок характеристик об’єктів;
- оцінка об’єктів за їх характеристиками за заданою шкалою оцінок.

Для застосування методу експертних оцінок у процесі прийняття рішень потрібно розглянути такі питання:

- підбір експертів;
- проведення опитування;
- обробка результатів.

Щодо групових експертних оцінок слід зазначити, що в обробку результатів входить не тільки визначення кращої альтернативи, а й оцінка узгодженості думок експертів. Якщо думки експертів сильно відрізняються, то виникає питання стосовно правомірності прийнятого рішення.

## 9.2. Вибір експертів

Підбір кількісного та якісного складу експертів здійснюється на основі аналізу широти проблеми, необхідної достовірності оцінок, характеристик експертів і витрат ресурсів.

Широта вирішуваної проблеми визначає, чи це буде ОПР, чи група експертів, причому в групу можуть залучатися спеціалісти різного профілю. Отже, мінімальна кількість експертів визначається кількістю різних аспектів, напрямів, які потрібно враховувати під час вирішення проблеми.

Достовірність оцінок групи експертів залежить від рівня знань окремих експертів і кількості членів. Якщо припустити, що експерти є досить точними вимірювачами, то, очевидно, що зі збільшенням числа експертів достовірність експертизи зростає.

Але витрати ресурсів для проведення експертизи пропорційні кількості експертів. Зі збільшенням числа експертів збільшуються часові та фінансові витрати, пов’язані з формуванням групи, проведенням опитування й опрацюванням результатів. Отже, для визначення кількості експертів доцільно виходити з наявних ресурсів, виділених на експертизу. Для підбору групи експертів найбільш поширений метод Шари, коли один експерт, найбільш шанований фахівець, рекомендує ряд інших і далі по ланцюжку, доки не буде підібрано відповідний колектив.

Характеристики групи експертів визначаються з урахуванням індивідуальних характеристик експертів: компетентності, креативності, ставлення до експертизи, конформізму, конструктивності мислення, колективізму, самокритичності.

Перелічені показники переважно оцінюються якісно. Для ряду характеристик є спроби ввести кількісні оцінки.

*Компетентність* – ступінь кваліфікації експерта у визначеній галузі знань. Компетентність може бути визначена на основі аналізу плідної діяльності фахівця, рівня й широти знайомства з досягненнями науки та техніки, розуміння проблем і перспектив розвитку.

Для кількісної оцінки ступеня компетентності використовується коефіцієнт компетентності, з урахуванням якого зважується думка експерта. Коефіцієнт компетентності визначається за апріорними й апостеріорними даними.

Існує ряд методик визначення коефіцієнта компетентності за апріорними даними. Найбільш простою є методика оцінки відносних коефіцієнтів компетентності за результатами висловлювання спеціалістів про склад експертної групи. Відповідно до цієї методики, ряду фахівців пропонується висловити судження про включення осіб до експертної групи для вирішення певної проблеми. Якщо до цього списку потрапляють особи, які не ввійшли до початкового списку, їм також пропонується назвати фахівців для участі в експертизі. Провівши кілька турів опитування, можна скласти досить повний перелік кандидатів у експерти. За результатами проведеного опитування складається матриця з елементів $x_{i,j}$, де:

$x_{i,j} = 1$, якщо *j*-й експерт назвав *i*-го експерта,

$x_{i,j} = 0$, якщо *j*-й експерт не назвав *i*-го експерта.

Причому кожен експерт може мати або не мати експертну групу. За даними матриці обчислюються коефіцієнти компетентності як відносні ваги експертів за формулою:

$$k_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}}, \; i = \overline{1,n},$$

де n – кількість експертів. Коефіцієнти компетентності нормовані так, що їх сума дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^{n} k_i = 1$.

*Креативність* – це здатність вирішувати творчі завдання. У цей час оцінюється лише на основі якісних суджень, заснованих на вивченні діяльності експертів.

*Конформізм* – це схильність до впливу авторитетів. Думка авторитетів придушує думку осіб, які мають високий рівень конформізму. Особливо сильно конформізм може проявитися під час проведення експертизи як відкритих обговорень.

*Ставлення до експертизи* є дуже важливою характеристикою якості експерта під час вирішення проблеми. Негативне чи пасивне ставлення фахівця до вирішення проблеми, велика зайнятість та інші чинники суттєво впливають на виконання експертами своїх функцій.

Тому участь в експертизі має розглядатись як планова робота. Експерт повинен виявляти інтерес до аналізованої проблеми.

*Конструктивність мислення* – це прагматичний аспект мислення. Експерт повинен давати рішення, які мають властивість практичності.

*Колективізм* має враховуватися під час проведення відкритих дискусій. Етика поведінки людини в колективі часто істотно впливає на створення позитивного психологічного клімату і тим самим на успішність вирішення проблеми.

*Самокритичність* експерта проявляється під час самооцінки ступеня своєї компетентності, а також у разі врахування думок інших експертів та ухваленні рішення щодо розглянутої проблеми.

Зазвичай частина показників експерта оцінюються позитивно, а частина – негативно. Виникає проблема узгодження характеристик і вибору експертів з урахуванням суперечливості його якостей. Причому чим більше характеристик береться до уваги, тим важче прийняти рішення про те, що важливіше і що допустимо для експерта. Для усунення зазначеної проблеми потрібно сформулювати узагальнену характеристику експерта, яка враховує його найважливіші якості й допускає безпосереднє її вимірювання. Такою характеристикою можна вважати достовірність суджень експерта, яка визначає його як «вимірювальний пристрій». Однак застосування такої узагальненої характеристики потребує інформації про минулий досвід участі експерта у вирішенні проблем.

Достовірність оцінок $i$-го експерта кількісно оцінюють за формулою:

$$d_i = \frac{N_i}{N},$$

де $N_i$ – кількість випадків, коли експерт дав прийнятне рішення, що підтвердилося практикою, $N$ – загальна кількість випадків участі експерта в експертних групах.

Внесок кожного експерта у достовірність оцінок усієї групи визначається за формулою: $D_i = \frac{n \cdot d_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i}$, де $n$ – загальна кількість експертів у групі.

## 9.3. Організація опитування експертів

Опитування експертів є заслуховуванням і фіксацією у змістовній та кількісній формі суджень експертів щодо вирішуваної проблеми. На цьому етапі виконуються такі процедури:

- організаційно-методичне забезпечення опитування;
- постановка завдання і пред’явлення питань експертам;
- інформаційне забезпечення роботи експертів.

До основних видів опитування належать: анкетування й інтерв’ювання, мозковий штурм, метод Дельфи, дискусія, нарада, оперативна гра, сценарій. Кожний із цих видів експертного оцінювання має свої переваги й недоліки, що визначають їх сферу застосування. У багатьох випадках найбільший ефект дає комплексне застосування декількох видів експертизи. Анкетування і сценарій припускають індивідуальну роботу експерта. Інтерв’ювання може здійснюватися як індивідуально, так і з групою експертів. Інші види експертизи припускають колективну участь експертів у роботі.

*Анкетування* є опитуванням експертів у письмовій формі за допомогою анкет.

*Інтерв’ювання* – це усне опитування, яке проводиться у формі бесіди-інтерв’ю. Під час підготовки розмови інтерв’юер розробляє питання експерту. Особливістю цих питань є можливість швидкої відповіді на них експертом, оскільки він практично не має часу на обмірковування.

*Метод Дельфи* є багатотуровою процедурою анкетування з обробкою та повідомленням результатів кожного туру експертам, які працюють інкогніто стосовно один одного. Метод названий за імені грецького міста, у якому в давнину жив знаменитий оракул.

У першому турі опитування методом Дельфи експертам пропонуються питання, на які вони дають відповіді без аргументування. Отримані дані обробляються з метою виділення середньої або медіани та крайніх значень оцінок. Експертам повідомляються результати першого туру опитування із зазначенням розташування оцінок кожного експерта. Якщо оцінка експерта сильно відхиляється від середнього значення, то його просять аргументувати свою думку чи змінити оцінку.

У другому турі експерти аргументують чи змінюють свою оцінку з поясненням причин коригування. Результати опитування обробляються та повідомляються експертам. Якщо після першого туру проводилося коригування оцінок, результати обробки другого туру містять нові середні і крайні значення оцінок експертів. У разі сильного відхилення індивідуальних оцінок від середніх експерти повинні аргументувати чи змінити свої судження, пояснивши причини коригування.

Проведення наступних турів здійснюється за аналогічною процедуру. Зазвичай після третього чи четвертого туру оцінки експертів стабілізуються, як і є критерієм припинення подальшого опитування. Ітеративна процедура опитування з повідомленням результатів обробки після кожного туру забезпечує найкраще узгодження думок експертів. Під час проведення опитування за методом Дельфи зберігається анонімність відповідей експертів стосовно один одного. Це унеможливлює вплив конформізму.

*Мозковий штурм* є груповим обговоренням із метою отримання нових ідей, варіантів вирішення проблеми.

*Дискусія* проводиться як відкрите колективне обговорення проблеми, основним завданням якого є всебічний аналіз всіх факторів, позитивних і негативних наслідків, виявлення позицій та інтересів учасників. Під час дискусії дозволяється критика.

## 9.4. Обробка експертних оцінок

Залежно від цілей експертного оцінювання під час обробки результатів опитування вирішують такі основні задачі:

- побудова узагальненої оцінки об’єктів;
- визначення відносних ваг об’єктів і визначення кращого;
- визначення узгодженості думок експертів;
- оцінка надійності результатів експертизи.

### *9.4.1. Побудова узагальненої оцінки об’єктів*

Побудова узагальненої оцінки об’єктів виконується кожним експертом окремо. Для цього складається таблиця, стовпчиками якої є об’єкти, що порівнюються, а рядками – характеристики (параметри), за якими виконується порівняння. Кожна характеристика може мати свій рівень важливості для конкретного завдання порівняння, тому в таблиці додається стовпчик із визначенням вагового коефіцієнта (важливості) для кожного параметра (табл. 9.1).

*Таблиця 9.1*

Таблиця визначення узагальнених оцінок об’єктів

| № | Параметр | Вага | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | … | $O_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $П_1$ | $g_1$ | $o_{11}$ | $o_{12}$ | $o_{13}$ | | $o_{1m}$ |
| 2 | $П_2$ | $g_2$ | $o_{21}$ | $o_{22}$ | $o_{23}$ | | $o_{2m}$ |
| 3 | $П_3$ | $g_3$ | $o_{31}$ | $o_{32}$ | $o_{33}$ | | $o_{3m}$ |
| 4 | … | … | | | | | |
| 5 | $П_n$ | $g_n$ | $o_{n1}$ | $o_{n2}$ | $o_{n2}$ | | $o_{nm}$ |
| Сума | | 1 | | | | | |

**Приклад.** Застосування експертної оцінки *одним експертом* для порівняння декількох об’єктів.

1. Вибираємо об’єкт для експертної оцінки – порівнюємо літаки Boeing, АН, Airbus, Bombardier.

2. Вибираємо параметри для порівняння. Параметрів бажано вибирати не менше 4 і не більше 7, тому що більша кількість параметрів тягне до розсіювання й відсутності чіткого розуміння результату. Те саме і з кількістю порівнюваних об’єктів – від 4 до 7.

3. Визначаємо вагу кожного параметра таким чином, щоб у сумі вони дорівнювали 1, причому кожен параметр варіюється в діапазоні від 0,015 до 0,3.

4. Задаємо порівняльну шкалу. Об’єкти за параметром «Максимальна дальність» порівнюються за 10-бальною шкалою. Максимальне значення 10 балів присвоюється, якщо (можливі варіанти):

а) літак пролітає без дозаправки понад 5000 км;

б) літак із дозаправкою пролітає понад 10 000 км;

в) якщо цей літак має максимальну дальність безпосадочного перельоту у своєму класі.

Зі зменшенням відстані перельоту за цим параметром на кожні 500 км знімається 1 бал.

Параметр «Вартість експлуатації» (найважливіший параметр, йому присвоєна максимальна вага). Літаку присвоюється 10 балів, якщо:

а) вартість експлуатації за квартал не більше ніж 100 000 доларів;

б) вартість експлуатації не перевищує 10 % від номінальної вартості літака.

І так далі за всіма параметрами.

5. Порівнюємо. Бали множимо на вагу відповідного параметра. В останній стовпець «Е» ставиться максимальне значення в рядку. У рядку «Сума» записуємо суму значень параметрів для кожного літака. Серед отриманих чисел обираємо максимальне число. Воно і буде відповідати кращому літаку (табл. 9.2)

*Таблиця 9.2*

Порівняння характеристик літаків

| № | Параметр | Вага | А (Boeing) | Б (АН) | В (Airbus) | Г (Bombardier) | Е |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Магістральна дальність | 0,2 | 9 x 0,2 = 1,8 | 6 x 0,2 = 1,2 | 10 x 0,2 = 2 | 8 x 0,2 = 1,6 | 2 |
| 2 | Місткість | 0,15 | 7 x 0,15 = 1,1 | 10 x 0,15 = 1,5 | 10 x 0,15 = 1,5 | 6 x 0,15 = 0,9 | 1,5 |
| 3 | Витрати палива V | 0,25 | 8 x 0,25 = 2 | 7 x 0,25 = 1,75 | 9 x 0,25 = 2,25 | 9 x 0,25 = 2,25 | 2,25 |
| 4 | Максимальна швидкість | 0,15 | 10 x 0,15 = 1,5 | 8 x 0,15 = 1,2 | 9 x 0,15 = 1,35 | 8 x 0,15 = 1,2 | 1,5 |
| 5 | Вартість експлуатації | 0,25 | 6 x 0,25 = 1,5 | 8 x 0,25 = 2 | 9 x 0,25 = 2,25 | 10 x 0,25 = **2,5** | 2,5 |
| Сума | | **1** | **7,9** | **7,65** | **9,35** | **8,46** | |

Отже, літак В виявився найефективнішим. Далі ми вже аналізуємо, чи треба нам купувати літак В, який виявився ефективним, або, наприклад, схилитися в бік літака Г з найменшими експлуатаційними витратами, оскільки саме цей параметр ключовий.

Узагальнена оцінка може виставлятися також за ранговою або бальною шкалою.

### *9.4.2. Обробка результатів оцінювання групою експертів*

Після оцінки об'єктів кожним експертом складається зведена таблиця оцінок (табл. 9.3).

*Таблиця 9.3*

Зведена таблиця оцінок

| Експерти ($m$) | Об'єкти ($n$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | … | $n$ | $\sum$ |
| 1 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | | $x_{1n}$ | |
| 2 | $x_{21}$ | $x_{22}$ | | $x_{2n}$ | |
| … | | | | | |
| $m$ | $x_{m1}$ | $x_{m2}$ | | $x_{m2}$ | |
| $\sum_i x_i$ | | | | | $X =$ |

Для визначення кращого об'єкта існують спеціально розроблені методи. Зупинимося лише на одному з найпростіших методів – методі середніх балів, який може реалізовуватися у двох видах – методі середніх арифметичних рангів і методі медіан рангів.

Також потрібно знайти й інші оцінки, передбачені для групи експертів.

1. Оцінити узгодженість думок експертів (конкордацію). За відсутності значимої узгодженості оцінок експертів потрібно виявити причини неузгодженості (нікчемні результати експертизи). Для оцінки узгодженості застосовуються статистичні методи – критерій Спірмена та Кенделла про рангову кореляцію.

2. Оцінити помилку дослідження.

3. На основі відповідей експертів побудувати модель властивостей об'єкта (для аналітичної експертизи).

4. Підготувати звіт із результатами експертного оцінювання. У звіті вказується мета дослідження, склад експертів, отримана оцінка і статистичний аналіз результатів.

***Метод середніх балів.*** Розглянемо найпростіший спосіб експертного оцінювання альтернатив – бальні оцінки. Членів сформованої групи експертів просять виставити бали об’єктам, на основі яких розраховують середні бали й розглядають їх як інтегральні оцінки, виставлені колективом експертів, як результат роботи «мультирозуму».

При цьому виникає питання: якими формулами користуватися для обчислення середніх величин? Адже видів середніх величин дуже багато. За традицією застосовують середнє арифметичне. Фахівці стверджують, що такий спосіб є коректним, оскільки бали зазвичай вимірюються за порядковою шкалою. Як середній бал також обґрунтованим є використання медіани. Тому доцільно використовувати одночасно обидва методи – і метод середніх арифметичних рангів (балів), і метод медіанний рангів. Така рекомендація відповідає концепції стійкості: використання різних методів для обробки тих самих даних зі метою отримання більш достовірних оцінок.

Визначимо кращого спортсмена за середнім арифметичним і медіаною.

***Метод середньоарифметичного*** полягає у визначенні для кожного об’єкта середньоарифметичної оцінки за всіма експертами.

***Метод медіан рангів.*** Потрібно нагадати, що відповіді експертів виміряні за порядкової шкалою, а тому для них не цілком правомірно проводити усереднення методом середніх арифметичних. Кращим є використання методу медіан.

Це означає, що треба взяти відповіді експертів, що відповідають одному з об’єктів, і знайти медіану оцінок (оцінку, що ділить упорядкований ряд оцінок навпіл). Візьмемо, наприклад, спортсмена під номером 2. Це ранги 2, 1, 3, 2, 3. Потім їх треба розташувати в порядку зростання. Отримаємо послідовність: 1, 2, 2, 3, 3. На центральному місці (третьому) стоїть цифра 2. Отже, медіана дорівнює 2. Якщо кількість експертів парна, то береться середнє значення рангів, що стоять на центральних місцях.

**Приклад 9.1.** Нехай п’ять суддів виставляються оцінки семи спортсменам, визначаючи зайняте ними місце. Розглянемо вибір кращого спортсмена за середнім арифметичним значенням (с. а.) та медіаною рангів (табл. 9.4). Зрозуміло, що чим менше значення рангу, тим оцінка краща.

*Таблиця 9.4*

Зведена таблиця оцінок спортсменів

| Експерти ($m$) | Спортсмени $(n)$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Σ |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 4 | 6 | 5 | 7 | |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 4 | 5 | 7 | 6 | |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | 7 | 6 | |
| 5 | 1 | 3 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| $\sum_i x_i$ | 6 | 11 | 13 | 21 | 25 | 31 | 33 | 140 |
| с. а. $\sum_i x_i / m$ | 1,2 | 2,2 | 2,6 | 4,2 | 5 | 6,2 | 6,6 | |
| Ранг за с. а. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| Медіани | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |

Оскільки оцінюються узгодженість думок експертів і для цього застосовується критерії рангової кореляції, доцільно оцінки перевести в рангову шкалу. Розглянемо випадок, коли експерт поставив різним об’єктам однакові оцінки.

**Приклад 9.2.** Припустимо, що експерт поставив об’єктам дослідження такі бали: 100, 90, 90, 90, 80, 60, 50, 50, 40. Тоді займані місця кожного напряму згідно з кількістю балів становлять: 1; 2–4; 5; 6; 7–8; 9. Використовуючи правила визначення стандартизованих рангів, отримаємо такі їх значення: 1; 3; 3; 3; 5; 6; 7,5; 7,5; 9, де 3 = (2 + 3 + 4) : 3; 7,5 = (7 + 8) : 2.

Нехай результати опитування представлені зведеною таблицею оцінок (табл. 9.5).

*Таблиця 9.5*

Зведена таблиця балів

| Експерти | Об'єкти | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 100 | 90 | 90 | 90 | 70 | 80 | 50 | 50 | 40 | 60 |
| 2 | 100 | 100 | 80 | 70 | 90 | 60 | 60 | 60 | 50 | 50 |
| 3 | 90 | 80 | 100 | 70 | 70 | 60 | 40 | 30 | 20 | 10 |
| 4 | 80 | 100 | 90 | 70 | 50 | 50 | 50 | 40 | 0 | 20 |

Перетворимо її у рангову шкалу та визначимо середні оцінки. Також розрахуємо середню вагу кожного об'єкта (нормовану оцінку). Середня вага обчислюється за формулою:

$$W_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_{i,j}}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_{,j}}, \text{ де } w_{i,j} = \frac{x_{i,j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}},$$

де $m$ – кількість експертів, $n$ – кількість об'єктів.

За даними табл. 9.5 отримаємо:

$$w_{1,1} = 100/(100+90+90+90+70+80+50+50+40+60) = 0{,}139,$$

$$w_{2,1} = 90/(100+90+90+90+70+80+50+50+40+60) = 0{,}125$$

і так далі (табл. 9.6).

*Таблиця 9.6*

Відносні значення об'єктів

| Експ. | Об'єкти | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 0,139 | 0,125 | 0,125 | 0,125 | 0,097 | 0,111 | 0,069 | 0,069 | 0,056 | 0,083 |
| 2 | 0,139 | 0,139 | 0,111 | 0,097 | 0,125 | 0,083 | 0,083 | 0,083 | 0,069 | 0,069 |
| 3 | 0,164 | 0,145 | 0,182 | 0,127 | 0,091 | 0,109 | 0,073 | 0,055 | 0,036 | 0,018 |
| 4 | 0,143 | 0,179 | 0,161 | 0,125 | 0,107 | 0,089 | 0,089 | 0,071 | 0,00 | 0,036 |

Обчислимо вагові коефіцієнти об'єктів:

$$W_1 = (0{,}139 + 0{,}139 + 0{,}164 + 0{,}143)/4 = 0{,}146,$$

$$W_2 = (0{,}125 + 0{,}139 + 0{,}145 + 0{,}179)/4 = 0{,}147 \text{ і т. д.}$$

Також визначимо коефіцієнт активності кожного експерта:

$$K_a = \frac{m_j}{m},$$

де $m_j$ – кількість експертів, що взяли участь в оцінюванні $j$-го об'єкта, $m$ – загальна кількість експертів.

Усі результати обчислень наведено в табл. 9.7.

*Таблиця 9.7*

Зведена таблиця рангів

| Експ. | Об'єкти | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 6 | 5 | 8,5 | 8,5 | 10 | 7 |
| 2 | 1,5 | 1,5 | 4 | 5 | 3 | 7 | 7 | 7 | 9,5 | 9,5 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 4 | 6 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 4 | 3 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6,5 | 6,5 | 8 | 10 | 9 |
| $\Sigma$ ранг. | 7,5 | 8,5 | 10 | 16 | 20 | 23,5 | 29 | 31,5 | 38,5 | 35,5 |
| Сер. ранг | 1,875 | 2,125 | 2,50 | 4,0 | 5,0 | 5,875 | 7,25 | 7,875 | 9,625 | 8,875 |
| Сер. бал | 92,5 | 92,5 | 90,0 | 75,0 | 67,5 | 62,5 | 50,0 | 45,0 | 36,667 | 35,0 |
| Сер. вага | 0,146 | 0,147 | 0,145 | 0,119 | 0,105 | 0,098 | 0,079 | 0,07 | 0,04 | 0,052 |
| $K_a$ | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 0,75 | 1,00 |

Застосовуючи методи середніх, можна визначити кращий об'єкт і за ранговою шкалою.

Кращою буде та альтернатива, що має менше значення для середніх рангів. Для нашого випадку це буде перший об'єкт (середній ранг дорівнює 1,875).

### *9.4.3. Оцінка узгодженості думок експертів*

Після отримання оцінок потрібно визначити коефіцієнт конкордації. Якщо думки експертів погано узгоджені, то їх не можна брати до уваги. Порядок застосування методу.

Складається зведена таблиця, до якої додаються рядки оцінки відхилень від середніх значень (табл. 9.8), де $X = \sum_i x_i$ – сума рангів для кожного об'єкта, $\overline{X} = X / n$ – середнє арифметичне суми рангів, $X_i - \overline{X}$ – відхилення суми рангів від середньої арифметичної суми, $S = \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ – квадрат відхилення.

*Таблиця 9.8*

Рядки обчислення відхилень

| Експерти ($m$) | Об'єкти ($n$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | … | $n$ | $\sum$ |
| Відхилення $X_i - \overline{X}$ | $\widehat{X}_1$ | $\widehat{X}_2$ | | $\widehat{X}_n$ | $\widehat{X}$ |
| $S = \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ | $S_1$ | $S_2$ | | $S_n$ | $S$ |

За критерієм, наприклад, Кендалла визначається коефіцієнт конкордації:

$$K = \frac{S}{S_{\max}} = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot \left(n^3 - n\right)},$$

де $n$ – кількість об'єктів порівняння, $m$ – кількість експертів.

Бувають випадки, коли експерт ставить однакові оцінки декільком об'єктам. Такі оцінки називаються зв'язними. У випадку існування зв'язних оцінок коефіцієнт конкордації обчислюється а формулою:

$$K = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot \left(n^3 - n\right) - m \cdot \sum_{i=1}^{m} T_i},$$

де $T_i = \sum_{l=1}^{L} \left(t^3 - t\right)$, $L$ – кількість груп зв'язаних рангів, $t$ – кількість зв'язаних рангів у групі.

Залежно від ступеня важливості думок експертів коефіцієнт конкордації лежить в межах від 0 (за повної відсутності узгодженості) до 1 (за абсолютного одностайного голосування експертів).

**Приклад 9.3.** Для прикладу 9.1, наведеному вище, оцінимо коефіцієнт конкордації. Порядок обчислень (табл. 9.9):

1. Заповнимо зведену таблицю оцінок експертів.
2. Обчислимо суму рангів, отриманих кожним спортсменом.
3. Обчислимо середню арифметичну суму рангів: $\overline{X} = 140/7 = 20$.
4. Розрахуємо відхилення і квадрат відхилення суми рангів кожного спортсмена від середньої арифметичної суми рангів.
6. Визначимо коефіцієнт конкордації:

$m = 5$ – кількість суддів, $n = 7$ – кількість спортсменів,

$$K = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot \left(n^3 - n\right)} = \frac{12 \cdot 642}{5^2 \cdot \left(7^3 - 7\right)} = \frac{12 \cdot 642}{25 \cdot (343 - 7)} = \frac{7704}{25 \cdot 336} = 0{,}92 .$$

Коефіцієнт конкордації досить близький до 1, отже, можна вважати, що думки експертів щодо техніко-тактичної майстерності спортсменів цілком узгоджені.

*Таблиця 9.9*

Зведена таблиця оцінок спортсменів

| Експерти | Спортсмени $(n)$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(m)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\Sigma$ |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 4 | 6 | 5 | 7 | |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 4 | 5 | 7 | 6 | |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | 7 | 6 | |
| 5 | 1 | 3 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| $\sum_i x_i$ | 6 | 11 | 13 | 21 | 25 | 31 | 33 | 140 |
| $X_i - \overline{X}$ | –14 | –9 | –7 | 1 | 5 | 11 | 13 | |
| $S = \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ | 196 | 81 | 49 | 1 | 25 | 121 | 169 | 642 |

Статистичне значення коефіцієнта конкордації (істотність або значущість) перевіряється за критерієм Пірсона $\left(\chi^2\right)$ (див. курс «Математична статистика та випадкові процеси»).

**Приклад.** Розглянемо випадок обчислення коефіцієнта конкордації, коли є зв’язані оцінки (табл. 9.10) (приклад 2).

*Таблиця 9.10*

Зведена таблиця оцінок зі зв’язаними оцінками

| Експерти ($m$) | Об’єкти | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 6 | 5 | 7,5 | 7,5 | 10 | 7 |
| 2 | 1,5 | 1,5 | 4 | 5 | 3 | 7 | 7 | 7 | 9,5 | 9,5 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 4 | 6 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 4 | 3 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6,5 | 6,5 | 8 | 10 | 9 |
| $\sum_i x_i$ | 7,5 | 8,5 | 10 | 16 | 20 | 23,5 | 29 | 31,5 | 38,5 | 35,5 |
| $X_i - \overline{X}$ | –14,5 | –13,5 | –12 | –6 | –2 | 1,5 | 7 | 9,5 | 16,5 | 13,5 |
| $S$ | 210,25 | 182,25 | 144 | 36 | 4 | 2,25 | 49 | 90,25 | 272,25 | 182,25 |

Сума всіх рангів: $X = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 220{,}0$,

що в середньому становлять $\overline{X} = X / n = 22{,}0$.

Сума квадратів відхилень: $S = 1172{,}5$.

Можна побачити, що в першому рядку таблиці є дві групи зв’язаних оцінок: значення 3 повторюється три рази, а 8,5 – два рази. У другому рядку – три групи: 1,5 повторюється два рази, 7 – три рази, 9,5 – два рази. У четвертому рядку є одна група – 6,5 повторюється два рази. Виконаємо обчислення для зв’язаних оцінок:

$$\sum_{l=1}^{L} T_l = \left(3^3 - 3\right) + \left(2^3 - 2\right) + \left(2^3 - 2\right) + \left(3^3 - 3\right) + \left(2^3 - 2\right) + \left(2^3 - 2\right) = 72.$$

Тоді коефіцієнт конкордації становитиме:

$$K = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot \left(n^3 - n\right) - m \cdot \sum_{i=1}^{m} T_i} = \frac{12 \cdot 1172{,}5}{4^2 \cdot \left(10^3 - 10\right) - 4 \cdot 72} = 0{,}905.$$

Для оцінки узгодженості думок експертів важливо визначити, якою мірою кожний експерт впливає на узагальнену оцінку групи. Для цього послідовно вибуває один експерт із групи й обчислюється коефіцієнт конкордації без врахування його думки (табл. 9.11).

*Таблиця 9.11*

Коефіцієнт конкордації з послідовним виключенням експертів

| Вибуває експерт | Значення | |
|---|---|---|
| | Коефіцієнт конкордації | Значущість коефіцієнта конкордації |
| 0 | 0,905 | 32,569 |
| 1 | 0,929 | 25,082 |
| 2 | 0,930 | 25,104 |
| 3 | 0,908 | 24,522 |
| 4 | 0,894 | 24,136 |

Із даних таблиці видно, що вибуття першого або другого експерта підвищує рівень узгодженості, а отже, і достовірність оцінки. Вибуття третього експерта майже не впливає на загальну оцінку, а четвертого – знижує загальну узгодженість. Отже, для покращення значення коефіцієнта конкордації можна замінити в групі або першого, або другого експерта.

Розкид думок екскретів, крім коефіцієнта конкордації, можна оцінити за допомогою інших статистичних показників, у тому числі:

а) дисперсія оцінок *j*-го об’єкта:

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{m_j - 1} \sum_{i=1}^{m} \left(x_{i,j} - M_j\right)^2,$$

де $m_j$ – кількість експертів, що брали участь в оцінюванні *j*-го об’єкта, $M_j$ – середня оцінка *j*-го об’єкта.

Для прикладу 2 розрахуємо дисперсію оцінок для 1-го об’єкта ($M_j = 92{,}5$):

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{4-1}\left[(100-92{,}5)^2 + (100-92{,}5)^2 + (90-92{,}5)^2 + (90-92{,}5)^2\right] = 91{,}667.$$

б) коефіцієнт варіації оцінок *j*-го об’єкта:

$$V_j = \frac{\sqrt{\sigma_j^2}}{M_j} \cdot 100\%.$$

Для прикладу 9.2 для 1-го об’єкта коефіцієнт варіації оцінок становитиме:

$$V_1 = \frac{\sqrt{91{,}667}}{92{,}5} \cdot 100\% = 10{,}35\%;$$

в) загальна дисперсія оцінок:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(M_j - M\right)^2,$$

де $M = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} x_{i,j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} m_j}$ – загальне середнє (математичне сподівання);

г) загальна дисперсія рангів:

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(S_j - S\right)^2, \quad S = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} R_{i,j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} m_j},$$

де $S_j$ – середня оцінка рангів *j*-го об’єкта, $S$ – загальне середнє рангів.

Загальна дисперсія оцінок і рангів відображає узагальнену характеристику узгодженості думок експертів за всіма об’єктами.

У табл. 9.12 наведено результати розрахунків дисперсії оцінок і коефіцієнтів варіації оцінок за всіма об’єктами для прикладу 9.2. Результати обчислень округлені до 2-го знака.

*Таблиця 9.12*

Показники дисперсії

| П. | Об'єкти | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $\sigma_j$ | 91,67 | 91,67 | 66,67 | 100 | 91,67 | 158,33 | 66,67 | 166,67 | 603,7 | 466,67 |
| $V_j$ | 10,35 | 10,35 | 9,07 | 11,33 | 25,30 | 20,13 | 16,33 | 28,69 | 67,01 | 68,01 |

Степінь збігу думок двох експертів визначається за допомогою коефіцієнта парної рангової кореляції між оцінками двох будь-яких експертів.

Експертні оцінки залежать від кількості експертів. Зменшення їх кількості перебільшує роль кожного з них, а за дуже великої кількості експертів важко домогтися узгодженої думки. Вважається, що оптимальна кількість експертної групи повинна дорівнювати 15–20 фахівців.

Ми розглянули найпростіший приклад експертного оцінювання варіантів рішення. На практиці використовуються складніші й досконаліші методи, їх підтримка здійснюється за допомогою інформаційних систем підтримки прийняття рішень СППР.

**Контрольні запитання**

1. Які існують основні групи експертних оцінок?

2. Перерахуйте основні класифікаційні ознаки експертного оцінювання.

3. У чому полягає принцип «хорошого оцінювання» експертами?

4. Назвіть типові завдання, для яких застосовують методи експертного оцінювання.

5. Перерахуйте основні етапи застосування методів експертного оцінювання.

6. Які фактори потрібно враховувати для підбору групи експертів?

7. Як визначається коефіцієнт компетентності експерта?

8. Яким основним вимогам повинен відповідати експерт?

9. Які процедури виконуються на етапі опитування експертів?

10. Які існують типи опитування експертів?

11. Які задачі вирішуються на етапі обробки результатів опитування експертів?

12. У чому полягає сутність методу «середніх балів»?

13. У чому полягає сутність методу медіан рангів?

14. Як оцінюється степінь узгодженості думок експертів?

15. Які оцінки застосовують для оцінювання роботи групи експертів?

# *Лекція 10.* Прийняття рішень в умовах ризиків і невизначеності

## 10.1. Основні поняття

У теорії прийняття рішень існують три типи моделей рішень, що залежить від ступеня визначеності можливих наслідків чи виходів:

- прийняття рішень в умовах визначеності. У разі прийняття цього типу рішень існує 100%-ва імовірність появи наслідків прийнятих рішень;
- прийняття рішень в умовах ризику. Прийняття рішень в умовах ризику ґрунтується на тому, що для кожної ситуації розвитку подій може бути задана ймовірність його здійснення. Це дає змогу зважити кожне із значень ефективності й вибрати для реалізації ситуацію з найменшим рівнем ризику;
- прийняття рішень в умовах невизначеності. Прийняття рішень в умовах невизначеності засноване на тому, що ймовірності різних варіантів розвитку подій невідомі.

Невизначеність – властивість об’єкта прийняття рішення, що виражається в його необґрунтованості, неясності, яка призводить до недостатньої можливості аналізу, розуміння, визначення його теперішнього та майбутнього стану.

Ризик – це можлива небезпека, дія наугад, що вимагає, з одного боку, сміливості в надії на щасливе завершення, а з іншого – врахування матеріального обґрунтування ступеня ризику (відсутність 100%-ї впевненості).

Теорія прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності ґрунтується на таких вихідних положеннях:

- об’єкт прийняття рішення чітко детермінований, і відомі основні з можливих факторів ризику. У фінансовому менеджменті такими об’єктами є окрема фінансова операція, конкретний вид цінних паперів, група взаємовиключних реальних інвестиційних проєктів тощо;
- за об’єктом прийняття рішення вибрано показник, який найкраще характеризує ефективність цього рішення. За короткостроковими фінансовими операціями таким показником зазвичай обирається сума або рівень чистого прибутку, а за довгостроковими – чистий наведений дохід або внутрішня ставка прибутковості.
- за об’єктом прийняття рішення вибрано показник, що характеризує рівень його ризику. Фінансовий ризик характеризується зазвичай ступенем можливого відхилення очікуваного показника ефективності (чистого прибутку, чистого наведеного доходу тощо) від середньої чи очікуваної його величини;
- є скінченна кількість альтернатив прийняття рішення (скінченна кількість альтернативних реальних інвестиційних проєктів, конкретних цінних паперів, способів здійснення певної фінансової операції тощо);
- існує скінченна кількість ситуацій розвитку події під впливом зміни факторів ризику. У фінансовому менеджменті кожна з таких ситуацій характеризує один із можливих майбутніх станів зовнішнього фінансового середовища під впливом змін окремих факторів ризику. Число таких ситуацій у процесі прийняття рішень має бути детерміновано в діапазоні від украй сприятливих (найоптимістичніша ситуація) до вкрай несприятливих (найпесимістичніша ситуація);
- за кожним поєднанням альтернатив прийняття рішень і ситуацій розвитку події може бути визначений скінченний показник ефективності рішення (конкретне значення суми чистого прибутку, чистого наведеного доходу тощо, що відповідає цьому поєднанню);
- щодо кожної із ситуації можлива чи неможлива оцінка ймовірності її реалізації. Можливість здійснення оцінки ймовірності поділяє всю систему ризикових рішень, що приймаються, на раніше

розглянуті умови їх обґрунтування («умови ризику» або «умови невизначеності»);

- вибір рішення здійснюється за найкращою з розглянутих альтернатив.

Для прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності застосовують методи прогнозування, спеціально розроблені критерії, теорію ігор.

## 10.2. Методи прогнозування

Для прийняття рішення бажано мати інформацію про майбутній розвиток події (наприклад, інформацію про попит на відповідну продукцію або про стан зовнішнього середовища об’єкта, стосовно якого це рішення приймається). Якщо ми можемо зібрати необхідну інформацію стосовно об’єкта або процесу дослідження, то на її основі можна побудувати математичну модель, застосувавши екстраполяцію, до якої можна робити прогноз або застосувати спеціальні методи прогнозування.

Знаючи певну множину вхідних і відповідних вихідних даних системи, математичну модель можна побудувати, застосовуючи методи апроксимації (наприклад, інтерполяцію, МНК), а у стохастичному випадку – кореляційний аналіз або, знаючи стани системи і маючи статистичні дані для побудови матриці перехідних імовірностей – теорію марківських процесів (рис. 10.1). Ці методи докладно розглядались у дисциплінах «Чисельні методи» та «Математична статистика і випадкові процеси». Крім уже відомих нам методів, розглянемо декілька поширених спеціалізованих методів прогнозування.

На вибір відповідного методу прогнозування (планування) впливають такі фактори:

– необхідна форма прогнозу. У процесі прогнозування проводиться оцінка очікуваних значень показників на майбутнє, а також оцінка варіації помилки прогнозування або проміжку, на якому зберігається ймовірність передбачення реальних майбутніх значень показників. Цей проміжок називається передбачуваним інтервалом. Однак у деяких випадках не так важливе передбачення конкретних значень прогнозованої змінною, як передбачення змін у її поведінці;

– період і горизонт прогнозування. Період прогнозування – це основна одиниця часу, на яку робиться прогноз. Горизонт прогнозування – це кількість періодів у майбутньому, які охоплює прогноз;

– доступність даних;

– необхідна точність;

– поведінка прогнозованого процесу;

– обмеження;

– складність ситуації, що досліджується.


Рис. 10.1 Методи прогнозування

### *10.2.1. Прогнозування на основі ковзного середнього*

В основі методики лежить положення, що часовий ряд (значення проіндексовані в хронологічному порядку) є стійким і його члени є реалізацією такого випадкового процесу:

$$y_t = b + \varepsilon_t, \tag{10.1}$$

де $b$ – невідомий постійний параметр, який оцінюється на підставі існуючої інформації, $\varepsilon_t$ – випадкова похибка з нульовим математичним сподіванням.

Також вважається, що дані для різних часових періодів не корельовано і останні $n$ спостережень є рівнозначно важливими для оцінки параметра $b$. Тоді значення для моменту часу $t+1$ знаходяться за формулою:

$$y_{t+1} = \frac{y_{t-n+1} + y_{t-n+2} + \ldots + y_t}{n}.$$

Потрібно зазначити, що для вибору $n$ не існує чіткого правила. Якщо спостереження на досить великому часовому проміжку задовольняють моделі (10.1), то $n$ може бути великим, а якщо спостереження відповідають моделі на малому часовому проміжку, то краще для $n$ брати малі значення. На практиці для величини $n$ зазвичай беруть значення від 2 до 10.

**Приклад 10.1.** За даними, наведеними в табл. 10.1 проаналізувати прибуток підприємства за 11 місяців і скласти прогноз на 12 місяців.

*Таблиця 10.1*

Прибуток підприємства по місяцях

| Місяць | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | **12** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Прибуток (тис.) | 7,6 | 8,2 | 8,46 | 8,2 | 7,9 | 7,6 | 7,7 | 8,3 | 8,9 | 9,36 | 9,5 | **?** |

Обчислимо ковзне середнє для $n = 2, 3, 4$:

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-1} + y_n}{2},\ y_{n+1} = \frac{y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{3},$$

$$y_{n+1} = \frac{y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{4},$$

а також абсолютні відхилення (табл. 10.2) (рис. 10.2).

*Таблиця 10.2*

Значення ковзного середнього

| Місяць | Прибуток | Ковзне середнє | | | Абс. відхилення | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 м-ці | 3 м-ці | 4 м-ці | 2 м-ці | 3 м-ці | 4 м-ці |
| 1 | 7,6 | | | | | | |
| 2 | 8,2 | | | | | | |
| 3 | 8,46 | 7,9 | | | | | |

*Продовження таблиці 10.2*

| Місяць | Прибуток | Ковзне середнє | | | Абс. відхилення | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 м-ці | 3 м-ці | 2 м-ці | 3 м-ці | 2 м-ці | 3 м-ці |
| 4 | 8,2 | 8,33 | 8,087 | | | | |
| 5 | 7,9 | 8,33 | 8,287 | 8,115 | 0,43 | 0,387 | 0,215 |
| 6 | 7,6 | 8,05 | 8,187 | 8,190 | 0,45 | 0,587 | 0,590 |
| 7 | 7,7 | 7,75 | 7,900 | 8,040 | 0,50 | 0,200 | 0,340 |
| 8 | 8,3 | 7,65 | 7,733 | 7,850 | 0,65 | 0,567 | 0,450 |
| 9 | 8,9 | 8,0 | 7,867 | 7,875 | 0,90 | 1,033 | 1,025 |
| 10 | 9,36 | 8,6 | 8,300 | 8,125 | 0,76 | 1,060 | 1,235 |
| 11 | 9,5 | 9,13 | 8,853 | 8,565 | 0,37 | 0,647 | 0,935 |
| 12 | | 9,43 | 9,253 | 9,015 | 0,516 | 0,640 | 0,684 |

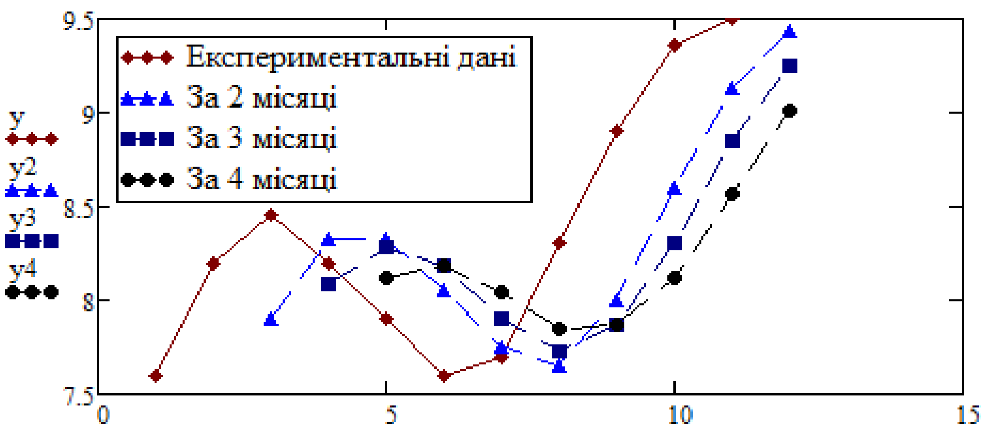


Рис. 10.2. Графік прогнозу прибутку за ковзним середнім

Для $n = 2, 3, 4$ знайдемо середньоквадратичне відхилення, і для 12 місяця обчислимо відносну похибку (табл. 10.3):

*Таблиця 10.3*

Відносна та середньоквадратичні оцінки

| Час | Відносна похибка (%) | | |
|---|---|---|---|
| | 2-й місяць | 3-й місяць | 4-й місяць |
| 12 | 6,0 % | 7,4 % | 7,84 % |
| | Середньоквадратична похибка | | |
| | 2-й місяць | 3-й місяць | 4-й місяць |
| За 12 місяців | 0,5778 | 0,7035 | 0,7711 |

За даними розрахунків видно, що найкращий результат дає прогноз, якщо $n = 2$ (найменші значення похибок).

### *10.2.2. Експоненціальне згладжування*

В основі методу експоненціального середнього лежить така сама модель, що і в методі ковзного середнього (10.1) але, якщо в методі ковзного середнього всі значення вважаються рівноцінними, то в методі експоненціального згладжування останнім значенням $y_t$ надається більший ваговий коефіцієнт:

$$y_{t+1} = \alpha \cdot y_t + \alpha(1-\alpha) \cdot y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 \cdot y_{t-2} + \ldots,$$

де $\alpha \in (0, 1)$ – константа згладжування. Видно, що більші значення константи $\alpha$ визначають більші ваги останнім спостереженням.

## 10.3. Матриця рішень і матриця ризиків

Головна небезпека ризиків і невизначеності полягає в можливості виникнення збитків.

Методологія прийняття рішення в умовах ризику і невизначеності передбачає побудову в процесі обґрунтування ризикових рішень так званої матриці рішень, яка має такий вигляд (табл. 10.4).

*Таблиця 10.4*

«Матриця рішень», що будується в процесі прийняття рішення в умовах ризику або невизначеності

| Варіанти альтернатив прийняття рішення | Варіанти ситуацій розвитку подій | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $C_1$ | $C_2$ | … | $C_n$ |
| $A_1$ | $E_{11}$ | $E_{12}$ | … | $E_{1n}$ |
| $A_2$ | $E_{21}$ | $E_{22}$ | … | $E_{2n}$ |
| … | … | … | … | … |
| $A_n$ | $E_{n1}$ | $E_{n2}$ | … | $E_{nn}$ |

У наведеній матриці значення $A_1$; $A_2$; ..., $A_n$ характеризують варіанти альтернатив прийняття рішення; значення $C_1$; $C_2$; ...; $C_n$ – варіанти ситуації розвитку подій; значення $E_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$ – конкретний рівень ефективності рішення, відповідний певній альтернативі за певної ситуації.

Наведена матриця рішень визначається як «матриця виграшів», оскільки вона розглядає показник ефективності. Можлива також побудова матриці рішень й іншого виду, що позначається як «матриця ризиків», де замість показника ефективності використовується показник фінансових втрат, які відповідають певним сполученням альтернатив прийняття рішень і можливих ситуацій розвитку подій.

***Методика побудови матриці ризику.*** Припустимо, що ОПР розглядає кілька можливих рішень: $i = \overline{1, m}$. Ситуація, у якій діє ОПР, є невизначеною. Відомо лише, що в наявності є якийсь із варіантів: $j = \overline{1, n}$. Якщо буде прийнято *i*-е рішення, а ситуація є *j*-ю, то ОПР отримає дохід $q_{ij}$. Матриця $Q = \left| q_{ij} \right|$ називається матрицею наслідків (можливих рішень). Яке ж рішення потрібно прийняти ОПР? У цій ситуації повної невизначеності можуть бути висловлені лише деякі рекомендації попереднього характеру. Вони не обов’язково будуть прийняті ОПР. Багато залежатиме, наприклад, від її схильності до ризику. Але як оцінити ризик у цій схемі?

Припустимо, треба оцінити ризик, який несе *i*-е рішення. Нам невідома реальна ситуація. Але якби її знали, то вибрали б найкраще рішення, тобто те, що приносить найбільший дохід. Якщо ситуація є *j*-ю, то було б прийнято рішення, що дає дохід $q_{ij}$.

Приймаючи *i*-е рішення, ми ризикуємо одержати не $q_j$ – максимально можливе значення (max значення відповідного стовпчика матриці наслідків), а тільки $q_{ij}$, отже, прийняття *i*-го рішення несе ризик недобрати $r_{ij} = q_j - q_{ij}$. Матриця $R = \left| r_{ij} \right|$ називається матрицею ризиків.

**Приклад 10.2.** Нехай задана матриця наслідків:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Складемо матрицю ризиків. Визначимо відповідні значення $q_j$: $q_1 = 8$, $q_2 = 5$, $q_3 = 8$, $q_4 = 12$ і обчислимо ризики $r_{ij}$:

$$R = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

На основі зазначених матриць розраховується найкраще з альтернативних рішень за обраним критерієм. Методика розрахунку диференціюється для умов ризику і умов невизначеності.

## 10.4. Основні підходи прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності

У разі прийняття рішень в умовах невизначеності та ризиків, коли ймовірності можливих варіантів невідомі, можуть бути використані критерії, вибір кожного з яких, поряд із характером розв'язуваної задачі, поставлених цільових установок і обмежень, залежить також від схильності до ризику ОПР.

1. ***Песимістичний підхід***. Можна виходити з найгіршого випадку. Такий підхід прийнятний у разі розгляду абсолютно безкомпромісного протистояння двох супротивників, що мають протилежні інтереси (наприклад, двох армій воюючих між собою держав). Існує розділ науки – теорія ігор, у якій розглядаються методи оптимальної поведінки в умовах антагоністичного чи іншого конфлікту (наприклад, мінімізація максимально можливого збитку). У більшості випадків це позиція крайнього песимізму, оскільки часто немає підстав вважати зовнішній світ активним свідомим противником організації.

2. ***Підхід оптиміста*** прямо протилежний попередньому підходу. Пропонується виходити із самого сприятливого збігу обставин. З погляду теорії планування такий підхід можна взяти за основу, додавши

можливості корекції плану у випадку несприятливих обставин. Тут приходимо до необхідності гнучкого планування, яке забезпечило б залежно від ситуації свободу управління. Із суто логічного погляду оптимізм не менше і не більше виправданий, ніж песимізм.

3. ***Неперервне прийняття*** рішень. Такий підхід є розвитком попереднього, він фактично передбачає, що доведеться багато разів приймати рішення з аналогічних питань. Це цілком обґрунтовано, коли рішення приймаються досить часто (наприклад, щотижня або щодня). Якщо події відбуваються багато разів, то для прийняття рішень природно використовувати методи імовірнісного моделювання.

4. Підхід, заснований на ***понятті упущеної вигоди***. За такого підходу розглядається зменшення прибутку в разі, коли фактична ситуація виявляється більш сприятливою, ніж було прийнято в рішенні. Цей критерій у загальному випадку суперечить песимістичному підходу.

**Приклад 10.3**. Підприємство вирішує питання: розвивати йому малі потужності (альтернатива $X_1$), середні потужності (альтернатива $X_2$) або великі потужності (альтернатива $X_3$). Прибуток підприємства залежатиме від того, який попит буде в майбутньому на продукцію даного підприємства – низький (НС), середній (СС) або високий (ВС).

Для формального представлення ситуації потрібно вибрати цільову функцію (критерій вибору) і обчислити її значення для кожної альтернативи за всіх можливих значень зовнішніх чинників (рівнів попиту).

Як цільову функцію в цьому випадку можна вибрати річний прибуток підприємства, тобто різницю між доходом від проданої продукції і витратами. Очевидно, найкращим рішенням буде те, якому відповідає максимальний прибуток. Складемо матрицю рішень для цього завдання. Значення цільової функції наведені в умовних одиницях:

| | **НС** | **СС** | **ВС** |
|---|---|---|---|
| **$X_1$** | 100 | 100 | 100 |
| **$X_2$** | 70 | 120 | 120 |
| **$X_3$** | –20 | 30 | 200 |

Однак аналіз альтернатив утруднений наявністю зовнішніх факторів, унаслідок чого в одних умовах (НС) кращою є альтернатива

$X_1$, в інших (СС) – $X_2$, а може бути (ВС) – $X_3$.

Щоб позбутися такого роду невизначеності, можна ввести відповідні оціночні (цільові) функції, призначення яких – поставити у відповідність кожній альтернативі тільки одне число. При цьому матриця рішень $\left\| f_{ij} \right\|$ буде зведена до одного стовпчика, який будемо називати вектором результатів $f_{ir}$: будь-якому варіанту $x_i$ приписується деякий результат $f_{ir}$, що є функцією всіх наслідків цього рішення. Інакше кажучи, кожній альтернативі відповідатиме не рядок результатів у матриці, а один результат – $f_r(x_i)$. Ця функція може мати різний вигляд залежно від позиції ОПР: оптимістичний, песимістичний, позицію компромісу, нейтралітету.

Оптиміст намагається не брати до уваги погані результати, сподіваючись на найбільш сприятливі зовнішні умови. Тому як компонент вектора результатів, що відповідає кожному рішенню, він призначає максимальний результат, тобто максимальне значення рядка: $f_{ir} = \max\limits_{j} f_{ij}$ – це оптимістична позиція, або позиція азартного гравця.

Для песиміста логічно згадати закон Мерфі: «Якщо нещастя може статися, воно трапиться обов’язково». Ця позиція виправдана там, де ризик неприпустимий. Вибираючи рішення відповідно до цієї позиції, ми гарантуємо собі результат не менший, ніж вибраний. А якщо пощастить і реалізуються більш вигідні зовнішні умови, то можна отримати максимальний результат. Вектор результатів записується в такий спосіб: $f_{ir} = \min\limits_{j} f_{ij}$ – це песимістична позиція.

Позиція компромісу враховує як максимальний, так і мінімальний результат рядка: $f_{ir} = \min\limits_{j} f_{ij} + \max\limits_{j} f_{ij}$.

Формуючи бажаний результат у такому вигляді, ми виходимо з компромісу між оптимістичною і песимістичною позиціями.

Позиція нейтралітету враховує всі наслідки прийнятого рішення і тому має такий вигляд: $f_{ir} = \sum\limits_{j=1}^{m} f_{ij}$.

## 10.5. Класичні критерії прийняття рішень

Будь-яке рішення в умовах неповної інформації приймається з урахуванням кількісних характеристик ситуації, у якій воно приймається. Найбільш часто застосовуються такі критерії: Вальда, Севіджа, Байеса, Гурвіца, Ходжа – Лаймона, Гермейера. Відповідно до рішень – мінімаксний критерій, критерій Байеса – Лапласа, критерій із будь-якою оціночною інформацією.

Ці критерії можна використовувати як окремо, так і по черзі, причому після обчислення їх значень серед декількох варіантів доводиться довільним чином вибирати остаточне рішення. Застосування декількох критеріїв дає змогу, по-перше, краще проникнути в усі внутрішні зв’язки проблеми прийняття рішень і, по-друге, послабити вплив суб’єктивного фактора. В організаційних системах рішення зазвичай приймаються в кілька етапів.

### *10.5.1. Базові критерії*

***Мінімаксний критерій (ММ), або критерій Вальда***

ММ-критерій відображає позицію крайньої обережності, або крайнього песимізму. Оціночна функція ММ-критерію:

$$z_{mm} = \max_i \left( \min_j f_{ij} \right).$$

Оціночна функція – це результат, що відповідає кращій альтернативі.

Правило вибору розв’язку відповідно до ММ-критерію:

Матриця рішень доповнюється ще одним стовпчиком із найменших результатів $f_{ir}$ будь-якого рядка. Вибирається варіант (рядок), що відповідає найбільшому значенню $f_{ir}$.

Вибрані таким чином варіанти повністю унеможливлюють ризик. Тобто не можна зіткнутися з результатом гіршим. Тому ММ-критерій вважається одним із фундаментальних, у технічних завданнях він застосовується найчастіше. Однак небажання ризикувати призводить до різних втрат.

**Приклад 10.4.** Нехай розглядається дві альтернативи і для них задана оціночна матриця:

|  | $f_{i1}$ | $f_{i2}$ | $f_{i3}$ | $f_{ir}$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | 100 | 1 | 1 |
| $X_2$ | 1,1 | 1,1 | 1,1 | **1,1** |

За нашим критерієм перевага надається альтернативі $X_2$.

***Критерій Севіджа (S)***

Це критерій відносного песимізму, який оперує поняттям ризику, або залишку: $\Delta_{ij} = \max\limits_j f_j - f_{ij}$ – різниця між максимальним значенням *j*-го стовпчика і результатом у цьому стовпці, що відповідає *i*-й альтернативі. У стовпчик вектора результатів записується максимальне значення ризику для кожної альтернативи:

$$f_{ir} = \max_j \left( \max_i f_j - f_{ij} \right).$$

Оціночна функція вибирається як мінімальне значення ризику серед усіх альтернатив:

$$Z_s = \min_i f_{ir} = \min_i \max_j \left( \max_i f_{ij} - f_{ij} \right).$$

Правило вибору: будь-який елемент матриці рішень віднімається від найбільшого результату відповідного стовпчика. Різниці утворюють матрицю залишків. Ця матриця доповнюється стовпчиком найбільших різниць. Вибирається варіант, де стоїть найменше для цього стовпчика значення.

Вимоги до застосування S-критерію ті самі, що і для ММ.

**Приклад 10.5.** Нехай задана оціночна матриця для 3 альтернатив:

|  | $f_{i1}$ | $f_{i2}$ | $f_{i3}$ | $f_{ir}$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 100 | 100 | 100 | **100** |
| $X_2$ | 70 | 120 | 120 | 70 |
| $X_3$ | -20 | 30 | 200 | -20 |

За критерієм ММ обирається альтернатива $X_1$.

Для застосування критерію Севіджа потрібно побудувати матрицю ризиків, або залишків. Для цього з максимального результату кожного стовпчика віднімемо відповідне значення результату з матриці рішень. У вектор результатів матриці залишків виноситься максимальне значення рядка. Кращій альтернативі відповідає мінімальне значення максимального ризику, пов'язаного з кожною альтернативою.

| | $f_{i1}$ | $f_{i2}$ | $f_{i3}$ | $s_{ir}$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 0 | 20 | 100 | 100 |
| $X_2$ | 30 | 0 | 80 | **80** |
| $X_3$ | 120 | 90 | 0 | 120 |

З позиції критерію Севіджа найкраща альтернатива – $X_2$, їй відповідає мінімальний ризик.

***Критерій Байеса – Лапласа (BL)***

Усі розглянуті вище критерії використовуються в умовах повної невизначеності, тобто в умовах, коли нічого не відомо про можливості настання зовнішніх подій. Зазвичай, якщо в цих умовах вибір утруднений, ОПР нічого не залишається, як шукати додаткову інформацію. Такою додатковою інформацією може бути, наприклад, інформація про ймовірність аналогічних результатів в минулому або оцінка за результатами експертних опитувань можливості настання тієї чи іншої зовнішнього події. Головне, щоб події становили повну групу.

Нехай $p_j$ – імовірність появи зовнішнього стану $j$,. $\sum_j p_j = 1$.

На відміну від розглянутих раніше критеріїв, критерій BL враховує можливі наслідки кожної альтернативи.

Для BL-критерію:

$$f_{ir} = \sum_j f_{ij} \cdot p_j , \qquad Z_{BL} = \max_i f_{ir} = \max_i \sum_j f_{ij} \cdot p_j .$$

Правило вибору: матриця рішень доповнюється ще одним стовпчиком, що містить математичні очікування результатів кожного рядка. Вибираються ті варіанти $X_i$, у рядках яких стоїть найбільше значення $f_{ir}$.

Критерій Байеса – Лапласа використовується, якщо:

– імовірності появи станів відомі й не залежать від часу;

– рішення реалізується нескінченно (теоретично) багато разів;

– для малого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

За досить великої кількості реалізацій значення поступово стабілізується, тому ризик практично наближається до нуля.

Вихідна позиція ОПР, що застосовує критерій BL, є більш оптимістичною, ніж за мінімаксного критерію, проте передбачає більш високий рівень інформованості й досить багато реалізацій.

**Приклад 10.6.** Нехай деякий об'єкт треба піддати перевірці з припиненням його експлуатації. Через це припиняється випуск продукції. Якщо ж вчасно не виявити несправність, то це призведе не тільки до припинення роботи, а й до поломки.

Варіанти вирішення: $X_1$ – повна перевірка; $X_2$ – мінімальна перевірка; $X_3$ – відмова від перевірки.

Стани *j*: $f_{i1}$ – несправностей немає; $f_{i2}$ – є незначна несправність; $f_{i3}$ – є серйозна несправність.

Результати $f_{ij}$ передбачають:

1) витрати на перевірки й усунення несправностей;

2) витрати, пов'язані з втратами у випуску продукції і з поломкою.

Розглянемо мінімаксний (ММ), критерій Севіджа (S) і BL-критерії. Для останнього критерію вважатимемо, що їхні капітали в цьому прикладі рівно вірогідні ($p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$). Нижче наведено матрицю застосування критеріїв Вальда та Байеса – Лапласа:

| | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_{ir} = \min\limits_j f_{ij}$ | $Z_{\min}$ | $\sum f_{ir} \cdot p_j$ | $Z_{BL} = \max\limits_j f_{ir}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | –20 | –22 | –25 | ***–25*** | **–25** | –22,33 | |
| $X_2$ | –14 | –23 | –31 | ***–31*** | | –22,67 | |
| $X_3$ | 0 | –24 | –40 | ***–40*** | | –21,33 | **–21,33** |

Розглянемо *S*-критерій. Матриця залишків матиме вигляд:

| | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_{ir} = \max\limits_j f_{ij}$ | $Z_S = \min\limits_j f_{ir}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 20 | 0 | 0 | 20 | |
| $X_2$ | 14 | 1 | 6 | 14 | **14** |
| $X_3$ | 0 | 2 | 15 | 15 | |

Як бачимо, кожен критерій пропонує своє рішення. Щоб вибрати, яким же критерієм слідувати, найкраще отримати додаткову інформацію про ситуацію.

Якщо прийняте рішення стосується значної кількості машин з однаковими параметрами, то доцільно дотримуватися критерію BL (є хоч якась інформація про зовнішні умови).

Якщо ж число реалізацій невелике, то кращі рішення приймають більш обережні рекомендації критерію Севіджа (S) або мінімаксного (MM) критерію Вальда.

Нехай $p_1 = p_2 = 0{,}25$, а $p_3 = 0{,}5$ (серйозна несправність у 2 рази частіша), тоді для BL: $f_{ir} = (-23; -25; -26)$ і критерій BL також рекомендує повну перевірку ($X_1$). Ми отримали однаковий результат за двома критеріями.

У розглянутих випадках не можна виділити домінуючий варіант, для якого за всіх зовнішніх умов результати кращі, ніж для інших. Тому в кожному окремому випадку слід дуже ретельно обґрунтовувати позицію особи, що приймає рішення.

### *10.5.2. Похідні критерії*

***Критерій Гурвіца (HW)***

Критерій використовується в умовах повної невизначеності. Це позиція компромісу, але максимально врівноважена: $Z_{HW} = \max\limits_i f_{ir}$,

$$f_{ir} = c \cdot \min_j f_{ij} + (1 - c) \cdot \max_j f_{ij},\ c \in (0{,}1).$$

Правило вибору: матриця рішень доповнюється стовпчиком, що містить середньозважену суму найменшого та найбільшого результатів для будь-якого рядка. Вибираються ті варіанти, де стоять найбільші значення $f_{ir}$.

Якщо $c = 1$, критерій Гурвіца перетворюється в мінімаксний критерій і відображає позицію крайнього песимізму, якщо $c = 0$ – позиція граничного оптимізму, або азартного гравця.

Вибрати множник $c$ важко, як і сам критерій. Тому найчастіше застосовують $c = 0{,}5$ (середня точка зору). Однак наступний приклад показує, що цей критерій може виявитися невигідним:

**Приклад 10.7.** Нехай оціночна матриця має такий вигляд:

| | $f_1$ | $f_2$ | $\cdots$ | $f_n$ | $f_{ir}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 10000 | 1 | … | 1 | **10001** |
| $X_2$ | 9999 | 9999 | … | 0.99 | 9999.99 |

У цьому прикладі критерій Гурвіца пропонує вибрати першу альтернативу, хоча аналіз матриці рішень рекомендує використовувати позицію нейтралітету й вибрати альтернативу $X_2$.

Отже, HW використовується, якщо:

– про можливості появи подій нічого не відомо;

– реалізується мала кількість рішень;

– допускається деякий ризик.

***Критерій Гермейера (G)***

Цей критерій орієнтований на величини втрат, а саме на негативні значення всіх $f_{ij}$: $f_{ir} = \min\limits_{j} f_{ij} \cdot p_j$, де $p_j$ – відповідні ймовірності.

Правило вибору: матриця рішень доповнюється ще одним стовпчиком, що містить у кожному рядку найменший добуток наявного в ній результату $f_{ij}$ на ймовірність відповідного стану.

Вибираються ті варіанти, де стоїть максимальне значення цього стовпчика. Критерій *G* узагальнює критерій ММ. Якщо $p_j = 1$, ці критерії ідентичні.

Критерій *G* застосовується, якщо:

– імовірності появи подій $f_{ij}$ відомі;

– результати $f_{ij}$ негативні;

– потрібно враховувати появу різних подій;

– допускається деякий ризик;

– рішення можуть реалізуватися один або багато разів.

Якщо ймовірності $p_j$ відомі не дуже надійно, а число реалізацій мале, то за G-критерієм отримують невиправдано великий ризик.

**Приклад 10.8.** Нехай задана матриця корисності:

| Альтернативи | Дохід: | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
| $X_1$ | 5 | 4 | 3 | 3 |
| $X_2$ | 6 | 2 | 6 | 4 |
| $X_3$ | -3 | 6 | 2 | 12 |
| $X_4$ | 3 | 9 | 1 | 5 |
| $X_5$ | 7 | 1 | 5 | 3 |
| $p$ | 0,1 | 0,7 | 0,15 | 0,05 |

Розглядаються чотири випадкові події та аналізуються п’ять альтернативних рішень, з яких потрібно вибрати найкраще. При цьому додатково задані суб’єктивні оцінки для ймовірностей зазначених вище подій. Вони представлені в матриці корисності.

Звернемо увагу, що не всі елементи цієї матриці корисності є негативними. Тож для реалізації *G*-критерію її потрібно «модифікувати на негативність». Це можна зробити, наприклад, аналізуючи кінцевий економічний результат щодо деякої ідеальної події, яка наперед є нереальною (у сенсі недосяжною за показниками доходу). Фактично це означає, що до кожного елемента матриці корисності додається деяке (те саме) негативне число, причому таке, що всі результати будуть негативними.

Наприклад, у нашій ситуації відповідний аналіз дає можливість за зазначеної модифікації до кожного елемента матриці додати число –13 (після такої операції її елементи будуть негативними). Тоді отримуємо нову «виправлену» матрицю корисності:

| Альтернативи | «Виправлені» значення доходу подій | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ |
| $X_1$ | –8 | –9 | –10 | –10 |
| $X_2$ | –7 | –11 | –7 | –9 |
| $X_3$ | –16 | –7 | –11 | –1 |
| $X_4$ | –10 | –4 | –12 | –8 |
| $X_5$ | –6 | –12 | –8 | –10 |
| $p$ | 0,1 | 0,7 | 0,15 | 0,05 |

Для знаходження оптимального або найкращого альтернативного рішення за критерієм Гермейера допишемо додатково до цієї матриці один стовпець, координати якого $f_{ir}$ будуть добутками елементів рядка на ймовірність відповідної події, яка матиме найбільше за модулем значення серед аналізованих за рядком виразів вказаного типу. За найбільшим таким показником (відповідно до найменшого за модулем значенням серед усіх елементів зазначеного додаткового стовпця) і буде вибрано найкраще (оптимальне) альтернативне рішення в рамках критерію Гермейера:

| Альтернативи | «Виправлені» значення доходу подій | | | | «Виправлені» значення доходу подій |
|---|---|---|---|---|---|
| | $f_1$ | $f_1$ | $f_1$ | $f_1$ | |
| $X_1$ | –8 | –9 | –10 | –10 | –9 x 0,7 = –6,3 |
| $X_2$ | –7 | –11 | –7 | –9 | –11 x 0,7 = –7,7 |
| $X_3$ | –16 | –7 | –11 | –1 | –7 x 0,7 = –4,9 |
| $X_4$ | **–10** | **–4** | **–12** | **–8** | **–4 x 0,7 = –2,8** |
| $X_5$ | –6 | –12 | –8 | –10 | –12 x 0,7 = –8,4 |
| $p$ | 0,1 | 0,7 | 0,15 | 0,05 | |

Найкращий показник відповідає альтернативі $X_4$.

Бачимо, що для вибору критеріїв і обґрунтування позиції є свобода для суб’єктивних дій, яка полягає у виборі позиції ОПР. Однак, якщо вибрана альтернатива досить стійка для широкого діапазону позицій ОПР, надійність цього вибору більша.

Якщо ж ситуація нестійка, тобто різним позиціям ОПР відповідають різні альтернативи, то вихід один – шукати додаткову інформацію про ситуацію. Якщо вибір було зроблено в умовах повної невизначеності, то наступний рівень інформованості – шукати інформацію про можливості настання тих чи інших зовнішніх умов. Якщо ж відомі ймовірності, то постановка спеціальних експериментів може привести або до точного знання, яка саме зовнішня умова настане, або до непрямих свідчень на користь тієї чи іншої умови.

**Контрольні запитання**

1. Дайте значення поняттям невизначеності та ризику.
2. На яких положеннях ґрунтується прийняття рішень в умовах ризиків і невизначеності?
3. Які методи застосовуються для прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності?
4. Що таке методи прогнозування? Які методи прогнозування ви знаєте?
5. У чому полягає метод ковзного середнього?
6. У чому полягає метод експоненціального згладжування?
7. Що таке матриця рішень і матриця ризиків? За якими процедурами будуються ці матриці?
8. Які основні підходи виділяють для прийняття рішень в умовах ризиків і невизначеності?
9. Які ви знаєте базові критерії прийняття рішень в умовах ризиків ф неповної визначеності й особливості їх застосування?
10. У чому полягає сутність критеріїв Вальда, Севіджа, Байеса – Лапласа?
11. Опишіть критерій Гурвіца для прийняття рішень в умовах ризиків і невизначеності.
12. У чому полягає сутність критерію Гермейера?

# *Лекція 11.* Імовірнісні методи прийняття рішень в умовах ризиків і неповної визначеності

## 11.1. Поняття ризику. Класифікація та управління ризиками

В економічній літературі використовується багато різних визначень ризику.

У найбільш загальному вигляді під ризиком розуміють імовірність виникнення збитків або недоотримання доходів порівняно з прогнозованим варіантом.

Ризики підрозділяються на два типи — динамічний і статичний. Найчастіше ці типи ризиків виділяють у комерційній діяльності.

Динамічний – це ризик непередбачених змін вартості основного капіталу (унаслідок прийняття управлінських рішень) або ринкових, політичних умов, що можуть призвести як до втрат, так і до додаткових доходів.

Статичний – це ризик втрат реальних активів через нанесення збитку власності, а також втрат доходу через недієздатність організації. Цей ризик приводить тільки до втрат.

***Класифікація ризику*** ґрунтується на широкому спектрі ознак:

– причина виникнення (суб’єктивна, об’єктивна);

– ризики, властиві певним видам діяльності (виробництво, фінанси, послуги, соціальна сфера, інвестиції);

– об’єкт ризику;

– масштаби наслідків ризику (локальний ризик, галузевий, регіональний та ін.);

– можливість прогнозування (з великою точністю оцінки ймовірності, важко прогнозований, непрогнозований тощо).

***Управління ризиком*** можна охарактеризувати як сукупність методів, прийомів, заходів, що дають змогу певною мірою прогнозувати настання ризикових подій і вживати заходів для унеможливлення або зниження негативних наслідків настання подій.

У практиці управління ризиком вироблено ряд правил, за якими здійснюється вибір способу (прийому) управління ризиком і варіантів рішень. Основними з них є:

– максимум виграшу,

– оптимальне поєднання виграшу і величини ризику,

– оптимальна ймовірність результату.

Правило максимуму виграшу полягає в тому, що з можливих варіантів рішень, що містять ризик, вибирається той, який забезпечує максимальний результат за мінімального або прийнятного ризику.

У другому правилі оптимального поєднання виграшу й величини ризику з усіх варіантів, що забезпечують прийнятний для підприємця ризик, вибирається той, у якого відношення доходів і втрат є найбільшим.

У третьому правилі оптимальної імовірності результату з усіх варіантів, що забезпечують прийнятну для підприємця ймовірність отримання позитивного результату, вибирається той, у якого виграш максимальний.

## 11.2. Аналіз ризику

Управління ризиком здійснюється за результатами аналізу ризику. Кількісний аналіз ризику передбачає чисельне визначення окремих ризиків і загального ризику. Визначається ймовірність настання ризикових подій і їх наслідків, здійснюється кількісна оцінка ступеня ризику, визначається допустимий рівень ризику.

Оцінка ризику може бути якісною (атрибутивною, словесною) і кількісною. Кількісна оцінка об’єктивніша, але отримати її досить важко. Більш просто встановлюються атрибутивні оцінки (наприклад, високий, середній, низький рівні ризику). Такі оцінки більш часто використовуються для прийняття рішень, хоча вони і менш об’єктивні.

Для кількісної оцінки ризику досить приблизних оцінок, які повинні мати зрозумілий зміст. Такий характеристикою може бути тільки ймовірність, тобто кількісна міра можливості настання випадкової події. Об’єктивна ймовірність розраховується на основі фактичних даних (бухгалтерська, статистична звітність) математичними методами. Суб’єктивна ймовірність виходить на основі експертної інформації із застосуванням байєсівського підходу.

***Прийняття рішень*** в умовах ризику засноване на тому, що для кожної можливої ситуації розвитку подій може бути задана певна ймовірність його здійснення. Це дає змогу зважити кожне з конкретних значень ефективності за окремими альтернативами на значення ймовірності й отримати на цій основі інтегральний показник рівня ризику, відповідний кожній з альтернатив прийняття рішень. Порівняння цього інтегрального показника за окремими альтернативами дає змогу вибрати для реалізації ту з них, яка призводить до вибраної мети (заданого показника ефективності) з найменшим рівнем ризику.

Оцінка ймовірності реалізації окремих ситуацій розвитку подій може бути отримана експертним шляхом.

Виходячи з матриці рішень, побудованої в умовах ризику з урахуванням імовірності реалізації окремих ситуацій, розраховують інтегральний рівень ризику за кожною з альтернатив прийняття рішень. Оцінка ймовірності реалізації окремих ситуацій розвитку подій може бути отримана експертним шляхом.

У практиці прийняття ризикованих рішень дотримуються шкали припустимого ризику, що відбиває вид ризику і величину зв'язаних з ним втрат (табл. 11.1).

*Таблиця 11.1*

Кількісна шкала оцінки ризиків

| **Вид ризику** | **Величина (коефіцієнт) ризику, %** |
|---|---|
| Незначний | до 5 |
| Малий | 5–10 |
| Середній | 11–20 |
| Підвищений | 21–30 |
| Високий | понад 30 |

Зазвичай більшості ризикованих рішень відповідає середня величина ризику — у межах 20 %, хоча з урахуванням специфіки ситуації вибір керівника може бути й іншим.

## 11.3. Постановка задачі прийняття рішення в умовах ризику

Кожна стратегія управління в умовах ризику пов'язана з множиною можливих результатів, причому кожен результат має певну ймовірність появи, заздалегідь відому людині, що приймає рішення.

Для оптимізації рішення в подібній ситуації стохастичну задачу прийняття рішення зводять до детермінованої. При цьому широко використовують такі два принципи: штучне зведення до детермінованої схеми й оптимізація в середньому.

У разі заміни ймовірнісної картини явища на детерміновану всі випадкові фактори, що беруть участь у завданні, приблизно замінюються їх невипадковими характеристиками (переважно їх математичними сподіваннями).

Цей прийом використовується у грубих, орієнтовних розрахунках, а також у тих випадках, коли діапазон можливих значень випадкових величин порівняно малий. Після виконання детермінації можуть бути використані будь-які методи, які застосовуються для вирішення статичних детермінованих задач.

Постановка задачі прийняття рішення в умовах ризику передбачає:

– $d_i$, $i = \overline{1,m}$ – можливі варіанти рішень;

– $s_j$, $j = \overline{1,n}$ – можливі стани середовища;

– $p(s_j)$ – ймовірність реалізації стану $s_j$;

– $e(d_i, s_j)$ – користь від прийнятого рішення $d_i$ в разі реалізації стану $s_j$.

Вихідні дані завдання прийняття рішення в умовах ризику можна представити у вигляді таблиці (матриці корисності) і ймовірностей реалізації станів (табл. 11.2).

*Таблиця 11.2*

Таблиця вхідних даних задачі прийняття рішень в умовах ризику

| Рішення | Стани | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $s_1$ | $s_2$ | … | $s_n$ |
| $d_1$ | $e(d_1, s_1)$ | $e(d_1, s_2)$ | … | $e(d_1, s_n)$ |
| $d_2$ | $e(d_2, s_1)$ | $e(d_2, s_2)$ | … | $e(d_2, s_n)$ |
| … | … | … | … | … |
| $d_m$ | $e(d_m, s_1)$ | $e(d_m, s_2)$ | … | $e(d_m, s_n)$ |
| Імовірності | $p(s_1)$ | $p(s_2)$ | … | $p(s_n)$ |

Також для відшукання кращого рішення можна оцінити ризики. Для цього на основі матриці корисності будується матриця ризиків (див. лекцію 10).

### 11.4. Основні критерії прийняття рішень в умовах ризиків

Для обґрунтування господарських рішень в умовах ризику застосовуються такі критерії:

– критерій математичного очікування (критерій Байєса);
– критерій стандартного відхилення;
– критерій Бернулі;
– критерій Лапласа;
– критерій Гурвіца (див. лекцію 10).

***Критерій Байєса***

Кожне можливе рішення $d_i$ може бути оцінено з погляду його очікуваної корисності $E(d_i)$, яка знаходиться як математичне сподівання за формулою:

$$E(d_i) = \sum_{j=1}^{n} e(d_i, s_j) p(s_j).$$

Задачу прийняття рішення в умовах ризику можна поставити як завдання максимізації очікуваної корисності прийнятого рішення:

$$\max_{d_i, i=\overline{1,m}} E(d_i) = E(d^*)$$

або як завдання мінімізації очікуваних витрат:

$$\min_{d_i, i=\overline{1,m}} E(d_i) = E(d^*).$$

Рішення $d^*$ називається оптимальним рішенням ЗПР в умовах ризику за критерієм очікуваного значення.

***Зауваження 1.*** Очікувану корисність (витрати) рішення $E(d_i)$ часто позначають $EMV(d_i)$ – expected monetary value (очікуване значення виграшу).

***Зауваження 2.*** Оптимальне рішення ЗПР в умовах ризику, знайдене за допомогою критерію очікуваного значення, називається оптимальною стратегією Байеса.

**Приклад 11.1.** На підприємстві планується розпочати випуск нового виду продукції. Керівництву підприємства потрібно вирішити, яку кількість продукції слід виробляти впродовж місяця, щоб отримувати максимальний прибуток і мінімізувати ризик.

Прогнозований попит на нову продукцію відповідно до виробничої потужності може становити 4, 5, 6, 7 або 8 т на день. Ціна 1 т продукції прогнозується на рівні 6 тис. грн. Витрати на виробництво і збут 1 т продукції дорівнюватимуть 4,5 тис. грн. Якщо продукція не буде реалізована, вона зіпсується й підприємство зазнає збитків, які дорівнюватимуть собівартості продукції. Також надані значення ймовірності попиту на продукцію: $p_1 = 0{,}129$, $p_2 = 0{,}290$, $p_3 = 0{,}387$, $p_4 = 0{,}129$, $p_5 = 0{,}065$, $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.

*Розв'язок.* Складемо матрицю прибутку:

| Виробництво | Попит | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 6,0 | 6,0 | 6,0 | 6,0 | 6,0 |
| 5 | 1,5 | 7,5 | 7,5 | 7,5 | 7,5 |
| 6 | –3,0 | 3,0 | | | 9,0 |
| 7 | –7,5 | –1,5 | 4,5 | 10,5 | 10,5 |
| 8 | –12,5 | –6,0 | 0,0 | 6,0 | 12,0 |
| $p_i$ | 0,129 | 0,290 | 0,387 | 0,129 | 0,065 |

Якщо ми виробили 4 т продукції, то наші витрати становлять: $4{,}5 \cdot 4 = 18$ тис. грн. Незалежно від попиту ми можемо реалізувати лише 4 т і отримати за реалізацію $4 \cdot 6 = 24$, отже, наш прибуток може становити $24 - 18 = 6$ Якщо виробництво становить 5 т, а попит лише 4 т, то прибуток становитиме $4 \cdot 6 - 5 \cdot 4{,}5 = 1{,}5$ тис. грн і т. д.

Обчислимо математичне сподівання прибутку за варіантами рішення:

$M(4) = 6{,}0$,

$M(5) = 1{,}5 \cdot 0{,}129 + 7{,}5 \cdot (1 - 0{,}129) = 6{,}73$,

$$M(6) = -3{,}0 \cdot 0{,}129 + 3{,}0 \cdot 0{,}290 + 9{,}0 \cdot (0{,}387 + 0{,}129 + 0{,}065) = 5{,}71\,,$$
$$M(7) = -7{,}5 \cdot 0{,}129 - 1{,}5 \cdot 0{,}29 + 4{,}5 \cdot 0{,}387 + 10{,}5 \cdot (0{,}129 + 0{,}065) = 2{,}38\,,$$
$$M(8) = -12{,}0 \cdot 0{,}129 - 6{,}0 \cdot 0{,}29 + 0 + 6{,}0 \cdot 0{,}129 + 12 \cdot 0{,}065 = 1{,}73\,.$$

Отже, найбільший середній очікуваний прибуток (6,73 тис. грн.) забезпечить варіант виробництва 5 т продукції на день. Тому цей варіант є найвигіднішим.

За даними матриці ризиків обчислюють середньозважені значення можливих втрат (збитків, недоотриманого прибутку) за варіантами рішення. Оптимальний варіант рішення визначають за мінімальним середньозваженим значенням збитків. Такий варіант передбачає мінімізацію втрат під час реалізації рішення.

Мінімальну середньозважену величину можливих збитків (недоотриманих прибутків) називають ***байєсівським ризиком рішення***.

Побудуємо для нашого прикладу матрицю ризиків:

| Виробництво | Попит | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 0 | 1,5 | 3,0 | 4,5 | 6,0 |
| 5 | 4,5 | 0 | 1,5 | 3,0 | 4,5 |
| 6 | 9,0 | 4,5 | 0 | 1,5 | 3,0 |
| 7 | 13,5 | 9,0 | 4,5 | 0 | 1,5 |
| 8 | 18,5 | 13,5 | 9,0 | 4,5 | 0 |
| $p_i$ | 0,129 | 0,290 | 0,387 | 0,129 | 0,065 |

Обчислимо математичне сподівання збитків за варіантами рішення:

$$M(4) = 0 \cdot 0{,}129 + 1{,}5 \cdot 0{,}29 + 3 \cdot 0{,}387 + 4{,}5 \cdot 0{,}129 + 6 \cdot 0{,}065 = 2{,}567,$$
$$M(5) = 4{,}5 \cdot 0{,}129 + 0 \cdot 0{,}29 + 1{,}5 \cdot 0{,}387 + 3 \cdot 0{,}129 + 4{,}5 \cdot 0{,}065 = 1{,}841,$$
$$M(6) = 9 \cdot 0{,}129 + 4{,}5 \cdot 0{,}29 + 0 \cdot 0{,}387 + 1{,}5 \cdot 0{,}129 + 3 \cdot 0{,}065 = 2{,}855,$$
$$M(7) = 13{,}5 \cdot 0{,}129 + 9 \cdot 0{,}29 + 4{,}5 \cdot 0{,}387 + 0 \cdot 0{,}129 + 1{,}5 \cdot 0{,}065 = 6{,}191,$$
$$M(8) = 18 \cdot 0{,}129 + 13{,}5 \cdot 0{,}29 + 9 \cdot 0{,}387 + 4{,}5 \cdot 0{,}129 + 0 \cdot 0{,}065 = 10{,}301\,.$$

Отже, за умови прийняття рішення про виробництво 5 т продукції на день середня очікувана величина збитків (1,841 тис. грн) буде мінімальною. Цей варіант є найменш ризикованим, і його можна рекомендувати як оптимальний за цим критерієм.

Критерій Байєса враховує всі можливі стани економічного середовища, отже, він є досить інформативним.

**Приклад.** Розглянемо наступну ЗПР. Є 100 урн, у кожній по 10 куль. При цьому урни бувають двох типів: в урні типу I містяться 5 чорних і 5 білих куль, а в урні типу II – 8 чорних і 2 білих кулі.

Відомо, що урн типу I – 70 штук, а урн типу II – 30 штук. Граючий підходить до випадково вибраної урни й повинен сказати, якого вона типу або відмовитися від гри. Якщо він називає тип I і вона дійсно цього типу, то він виграє \$500, якщо вона типу II, то він програє \$200. Якщо гравець називає тип II і урна дійсно цього типу, то він виграє \$1000, якщо ж вона типу I, то він програє \$150. Яке рішення повинен прийняти гравець?

*Розв'язок.* Множина варіантів рішення має вигляд:

– $d_1$ – назвати урну типу I;

– $d_2$ – назвати урну типу II;

– $d_3$ – відмовитися від гри.

Множина станів середовища:

$s_1$ – урна типу I, $s_2$ – урна типу II.

На основі початкових даних про кількість урн можна оцінити ймовірності відповідних станів $p_1, p_2$. Тоді матриця виграшів (користі) має вигляд:

| Рішення | Стани | |
|---|---|---|
| | $s_1$ | $s_2$ |
| $d_1$ | 500 | –200 |
| $d_2$ | –150 | 1000 |
| $d_3$ | 0 | 0 |
| Ймовірності $p_i$ | 0,7 | 0,3 |

Обчислимо очікувану користь кожного рішення:

$E(d_1) = 500 \cdot 0{,}7 + (-200) \cdot 0{,}3 = 290$,

$E(d_2) = (-150) \cdot 0{,}7 + 1000 \cdot 0{,}3 = 195$,

$E(d_3) = 0$.

Використовуючи критерій очікуваної корисності, гравець повинен назвати урну типу І.

Якщо використовувати критерій дисперсії корисності, то оптимальним рішенням буде відмова від гри.

***Критерій стандартного відхилення***

Використання **критерію стандартного відхилення** передбачає оцінку ступеня розсіяння (коливання) окремих значень того чи іншого узагальнюючого показника для рішення, що приймається, навколо його середнього значення. Чим більший розкид навколо його середнього значення, тим більша величина стандартного відхилення. Тож більшою є невизначеність стосовно того, що цей показник набуватиме очікуваного значення, отже, є і більший ризик.

Стандартне відхилення обчислюється за формулою:

$$\sigma(d_i) = \sqrt{D(d_i)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[e(d_i, s_j) - E(d_i)\right]^2 p(s_j)}$$

Найменш ризикованим вважається той варіант рішення, за яким значення стандартного відхилення є мінімальним: $\min\limits_{\underline{d_i, i=1,m}} D(d_i) = D(d^*)$.

**Приклад 11.2.** За даними для прикладу 1 знайдемо математичне середньоквадратичне відхилення для кожного варіанта:

$\sigma(4) = 0$,

$\sigma(5) = \sqrt{(1{,}5 - 6{,}73)^2 \cdot 0{,}129 + (7{,}5 - 6{,}73)^2 \cdot (1 - 0.129)} = 2{,}011$,

$\sigma(6) = 4{,}267$, $\sigma(7) = 5{,}612$, $\sigma(8) = 6{,}326$

Отже, найменший розкид окремих значень очікуваного прибутку навколо середнього значення отримано за варіантом виробництва 4 т продукції на день, тобто цей варіант є найменш ризиковим, але й найменш прибутковим. Зі збільшенням обсягу виробництва ризик зростатиме. Тому можна порекомендувати вибрати рішення про виробництво 5 т продукції на день, яке є найприбутковішим і пов’язане з невеликим ризиком.

***Критерій Бернуллі***

Використання критерію Бернуллі передбачає, що значення математичних сподівань і моментів ризику цільових функцій (наприклад, вартості капіталу) замінюються значеннями очікуваної корисності (вигоди). Замість монетарних цільових функцій використовують корисність, і ОПР пов'язує її з очікуваним ступенем досягнення цілей з урахуванням ставлення до ризику.

Відповідно до цього критерію виходять із того, що ОПР може оцінити корисність різних варіантів рішення та вибрати такий, що забезпечує максимум «морального» очікування, яке обчислюється за формулою:

$$MpO = \sum_{i=1}^{n} f\left(К\Pi_i\right) \cdot p_i ,$$

де $f\left(К\Pi_i\right)$ – функція корисності від вартості капіталу $i$-го стану економічного середовища $К\Pi_i$, $p_i$ – імовірність настання $i$-го стану економічного середовища.

За результатами розрахунку цього показника оптимальним варіантом рішення вважається той, за яким середня зважена величина корисності результатів є максимальною. Отже, з позицій суб'єкта управління вибраний варіант рішення матиме найбільшу корисність.

Позитивною рисою цього критерію є те, що він враховує весь спектр можливих станів економічного середовища, а також містить оцінку ставлення до ризику суб'єкта управління. За умови, що суб'єкт управління має нейтральне ставлення до ризику, використання критеріїв Бернуллі та Байєса приводить до однакових висновків.

***Критерій Лапласа***

Критерій Лапласа використовується у випадку, коли можна припустити, що кожний із можливих станів економічного середовища є не більш імовірним, ніж інші. Тоді можна припустити, що всі можливі варіанти стану економічного середовища мають однакову ймовірність, що становить сутність принципу «недостатнього обґрунтування», запропонованого Байєсом у 1763 р. та узагальненого Лапласом у 1812 р.

Відповідно до критерію Лапласа вибір рішення здійснюється за мінімумом середньозваженого показника ризику (R), який обчислюється за формулою:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} E_{ij} p_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{E_{ij}}{n}, \; i = \overline{1,m},$$

де n – кількість варіантів стану економічного середовища;

$p_j$ – імовірність *j-го* стану економічного середовища.

$E_{ij}$ – втрати (недоотриманий прибуток) за *i*-го варіанта рішення та *j*-го варіанта стану економічного середовища.

Вихідні дані для розрахунку отримують із матриці ризику. За кожним варіантом рішення, що аналізується, розраховуються середньозважені оцінки можливих збитків (недоотриманого прибутку). Отже, критерій Лапласа дає змогу мінімізувати можливі втрати підчас реалізації рішення.

Критерій Лапласа передбачає врахування ймовірностей всіх можливих станів економічного середовища, що свідчить на користь цього критерію.

Зазначимо, що критерій Лапласа може використовуватися як в умовах ризику, коли ймовірності станів економічного середовища відомі, так і в умовах невизначеності, коли інформація про ймовірності станів середовища відсутня. У першому випадку значення критерію Лапласа збігатиметься зі значенням критерію Байєса (байєсівським ризиком). Але висновки щодо варіанта рішення в умовах ризику та в умовах невизначеності можуть відрізнятися.

**Приклад 11.3.** Розглянемо на прикладі випадок, коли платіж є функцією альтернативних рішень. Для цього випадку представлення задачі у вигляді «дерева» не є доцільним.

Нехай у транспортній компанії працює 20 машин. Компанія планує проведення профілактичного ремонту, після якого ймовірність пошкоджень протягом *n* місяців наведена в табл. 11.5.

*Таблиця 11.5*

Імовірності пошкодження машин

| Місяць *n* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\geq 10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Імовірність *p* | 0,05 | 0,07 | 0,10 | 0,13 | 0,18 | 0,23 | 0,33 | 0,43 | 0,50 | 0,55 |

Запланований профілактичний ремонт коштує 50 гр. од., а ремонт випадкового пошкодження – 200 гр. од. Потрібно визначити оптимальний проміжок часу між проведенням профілактичного ремонту.

*Розв'язок.* Позначимо через $N$ шукану кількість місяців між профілактичними ремонтами. Протягом цього проміжку часу мають місце два види витрат:

1) витрати на профілактичний ремонт $V_p = 50 \cdot 20 = 1000$ \$;
2) витрати на усунення випадкових пошкоджень протягом перших $N-1$ місяців.

Другий тип витрат визначатиметься середньою кількістю машин, що вийшли з ладу протягом $N-1$ місяця: $20 \cdot p_t$. Отже, загальні витрати на початок $N$-го місяця можна визначити таким чином:

$$V_z = V_p + V_{N-1} = 1000 + 20 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} p_i .$$

Тоді витрати за один місяць, які ми хочемо мінімізувати, можна обчислити за формулою:

$$V_m(N) = \frac{V_z}{N} = \frac{1000 + 20 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} p_i}{N},$$

звідки потрібно визначити значення $N$. Знайти мінімум функції у явному вигляді неможливо, тому для вирішення задачі будується таблиця (табл. 11.6).

*Таблиця 11.6*

Розрахунок витрат на різних часових періодах

| $N$ | $p_N$ | $\sum_{i=1}^{N-1} p_i$ | $V_m(N)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,05 | 0 | 1000,00 |
| 2 | 0,07 | 0,05 | 600,00 |
| 3 | 0,10 | 0,12 | 493,33 |
| **4** | **0,13** | **0,22** | **470,00** |
| 5 | 0,18 | 0,35 | 480,00 |
| 6 | 0,23 | 0,53 | 520,00 |

З розрахунків видно, що мінімальні витрати відповідають четвертому рядку, отже, профілактичний ремонт рекомендується проводити через кожні чотири місяці.

### 11.5. Прийняття рішення на основі дерева рішень

Дерево рішень, з одного боку, являє собою спосіб зображення процесу прийняття рішення, з іншого – це спосіб знаходження оптимального рішення, коли сам процес прийняття рішення досить складний.

Дерево рішень являє собою орієнтований граф, що виходить з однієї вершини (корінь дерева), відповідної вихідної точки процесу прийняття рішення. Цей граф складається з 3 типів вузлів:

– вузли прийняття рішення (на графі зображуються квадратами);

– випадкові вузли (на графі зображуються кружками);

– термінальні вузли (на графі зображуються трикутниками).

З термінальних вузлів (кінцевих вершин дерева) не виходять ніякі ребра. Час відвідування таких сайтів відповідають кількісні оцінки варіанта рішення (корисності). З інших вузлів обов’язково виходять ребра. Усі ребра дерева рішень орієнтовані в напрямі прийняття рішення. Підстава дерева може бути як вузлом прийняття рішень, так і випадкової вершиною.

З вузлів прийняття рішень виходять ребра, відповідні можливих альтернатив рішення в цій вершині.

З випадкових вершин виходять імовірнісні ребра (відповідні наслідків випадкових подій). На цих ребрах вказуються ймовірності наслідків випадкового події.

Метод знаходження оптимального рішення з використанням дерева рішень складається з 3 етапів: побудова дерева рішень, його оцінка і знаходження оптимального рішення.

Етапи виконуються в наведеному порядку:

1. Будується дерево рішень у напрямі прийняття рішення. При цьому на граф наносяться всі відомі числові характеристики (корисності результатів, імовірності випадкових подій).

2. Оцінюється дерево рішень послідовно крок за кроком у зворотному напрямі, починаючи з термінальних вершин. Під час оцінювання дерева рішень послідовно обчислюються математичні

очікування випадкових подій (якщо вершина випадкова) або оцінки кращих альтернатив (якщо вершина відповідає прийняттю рішення). Дані оцінки приписуються відповідній вершині дерева. Процес оцінювання закінчується, коли оцінка приписана основі дерева.

3. Останній етап – це визначення оптимального рішення. Для знаходження оптимального рішення «дерево» ще раз проглядається в прямому напрямі.

Для розглянутої вище задачі про вибір урн дерево рішень наведено на рис. 11.1.

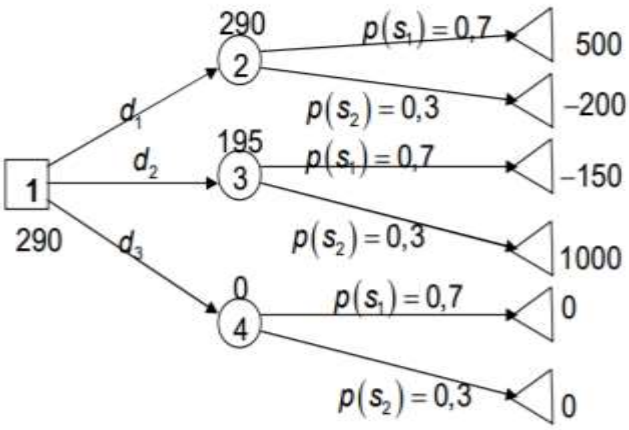


Рис. 11.1 Дерево прийняття рішень задачі вибору урни

**Приклад 11.4.** Банк вирішує питання, чи перевіряти конкурентоспроможність клієнта, перед тим як видавати позику. Аудиторська фірма бере з банку ₴80 за перевірку. Тож перед банком постають дві проблеми: перша проводити чи ні перевірку, друга – видавати після цього позику чи ні. Вирішуючи першу проблему, банк перевіряє правильність відомостей, що видаються аудиторською фірмою. Для цього вибираються 1000 осіб, які були перевірені та яким видавалися позики (табл. 11.4).

*Таблиця 11.4*

Рекомендації аудиторської фірми та повернення позики

| Рекомендації після перевірки кредитоспроможності | Фактичний результат | | Усього |
|---|---|---|---|
| *Позика* | повернена | не повернена | |
| Давати позику | 735 | 15 | 750 |
| Не давати позику | 225 | 25 | 250 |
| $\sum$ | 960 | 40 | 1000 |

Постає питання: яке рішення повинен прийняти банк?

*Розв'язок.* Використовуючи дані табл. 11.4, обчислимо ймовірність кожного результату:

$p_1$(клієнт позику поверне; фірма рекомендувала) = 7,35/750 = 0,98;

$p_2$(клієнт позику не поверне; фірма рекомендувала) = 15/750 = 0,02;

$p_3$(клієнт позику поверне; фірма не рекомендувала) = 225/250 = 0,9;

$p_4$(клієнт позику не поверне; фірма не рекомендувала) = 25/250 = 0,1.

Побудуємо дерево прийняття рішення, обчисливши та проставивши для кожного вузла грошові результати. Будь-які витрати, що зустрічаються, віднімаємо з очікуваних доходів. Таким чином, підраховуємо все «дерево». Після того як пройдено квадрати «рішень», вибирається «гілка», що веде до найбільшого з можливих за цього рішення очікуваного доходу. Інша «гілка» закреслюється, а очікуваний прибуток проставляється над квадратом рішення.

Спочатку подивимося на кружечки результатів *B* і *C*, які є наслідком квадрата 2 (чи видавати позику клієнту?). Дохід, очікуваний від результату *B*: $E(B) = 17250 \cdot 0{,}98 + 0 \cdot 0{,}02 = 16905$,

чистий очікуваний дохід: $NE(B) = 16905 - 15000 = 1905$.

Дохід, очікуваний від результату *C*: $E(C) = 16350 \cdot 1 = 16350$,

чистий очікуваний дохід: $NE(C) = 16350 - 15000 = 1350$.

Припустимо, що зараз перебуваємо у квадраті 2. Максимальний очікуваний дохід 1905 ₴ у кружечку B, тому приймаємо рішення видати позику.

Прийнявши рішення, коригуємо «дерево», проставивши чистий очікуваний дохід 1905 ₴ над квадратом 2. «Гілка» – не давати позику – закреслюється (рис. 11.3).

Те саме з кружками результатів *D* і *E* – результатами рішення 3. Очікуваний дохід від ситуації *D*: $E(D) = 17250 \cdot 0{,}9 + 0 \cdot 0{,}1 = 15525$,

чистий очікуваний дохід: $NE(D) = 15525 - 15000 = 525$.

Аналогічно для ситуації *E*: $E(E) = 16350 \cdot 0{,}1 = 16350$,

чистий очікуваний дохід: $NE(E) = 16350 - 15000 = 1350$.

Якщо ми у квадраті 3, то максимальний очікуваний дохід дорівнював би 1350 ₴ і можна було б ухвалити рішення не видавати позику. Тепер скоригуємо цю частину схеми: над квадратом 3 пишемо чистий очікуваний прибуток і приймаємо рішення видати позику.

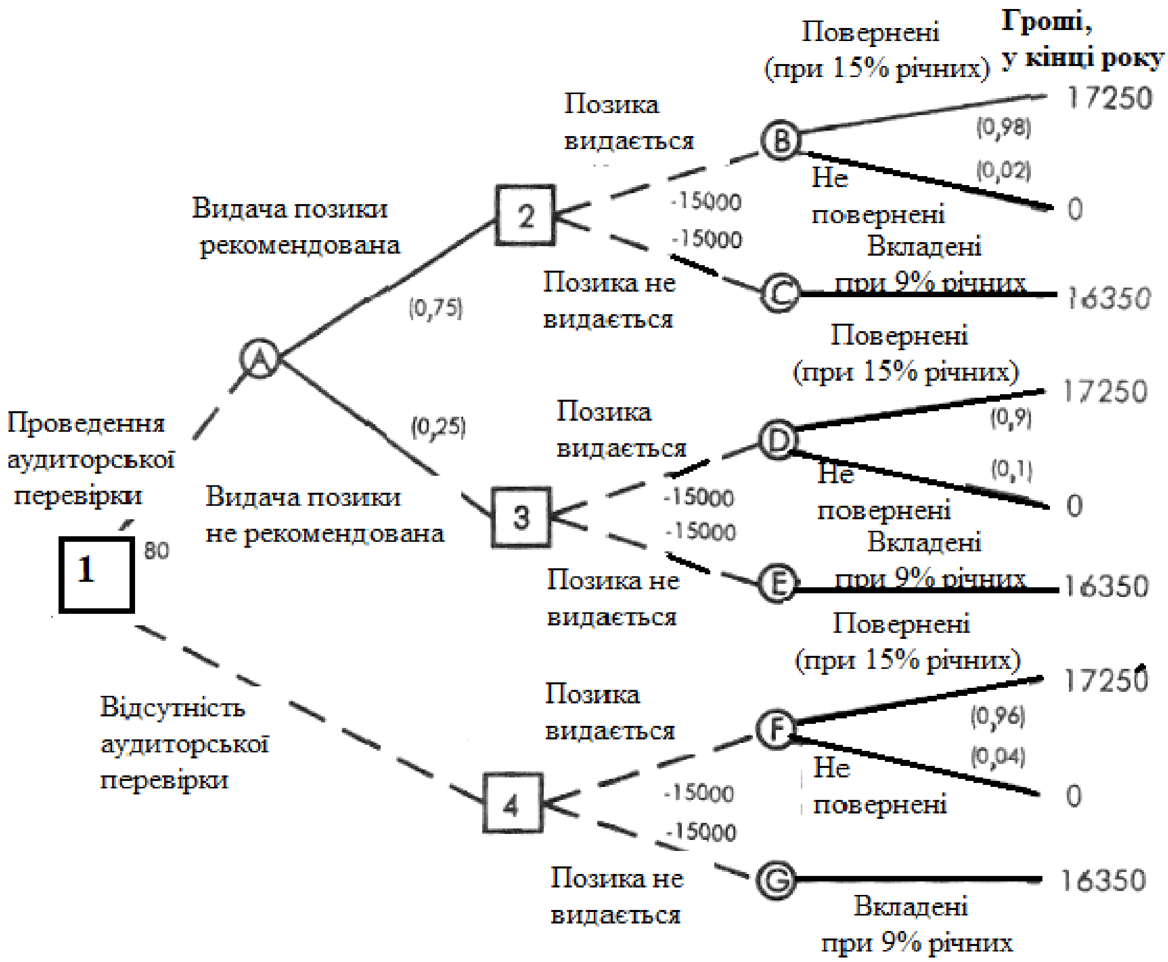


Рис. 11.2. Дерево рішень для банку з урахуванням аудиту

Нарешті приступаємо до розрахунку кружечків результатів $F$ та $G$, які є результатами рішення 4.

$$E(F) = 17250 \cdot 0{,}96 + 0 \cdot 0{,}04 = 16560 \,,$$

$$NE(F) = 16560 - 15000 = 1560 \,,$$

$$E(G) = 16350 \cdot 1 = 16350 \,,$$

$$NE(G) = 16350 - 15000 = 1350 \,.$$

У квадраті 4 максимальний очікуваний чистий дохід становить 1560 ₴, і тому приймаємо рішення видати клієнтові позику. Сума 1560 ₴ записується над квадратом 4, а альтернативна «гілка» перекреслюється.

Повернемося до «вузлів» $A$ та 1. Використовуючи очікувані чисті доходи над квадратами 2 і 3, розрахуємо математичне очікування для кружечка $A$: $E(A) = 1905 \cdot 0{,}75 + 1350 \cdot 0{,}25 = 1766$ .

Оскільки аудиторська перевірка коштує 80 ₴, очікуваний чистий дохід становить $NE(A) = 1766 - 80 = 1686$ .

Тепер можна проставити значення для першого квадрата: чи повинен банк користуватися аудиторською перевіркою? У цьому «вузлі» максимальне математичне очікування – 1686 ₴, тому перекреслюємо альтернативну «гілку».

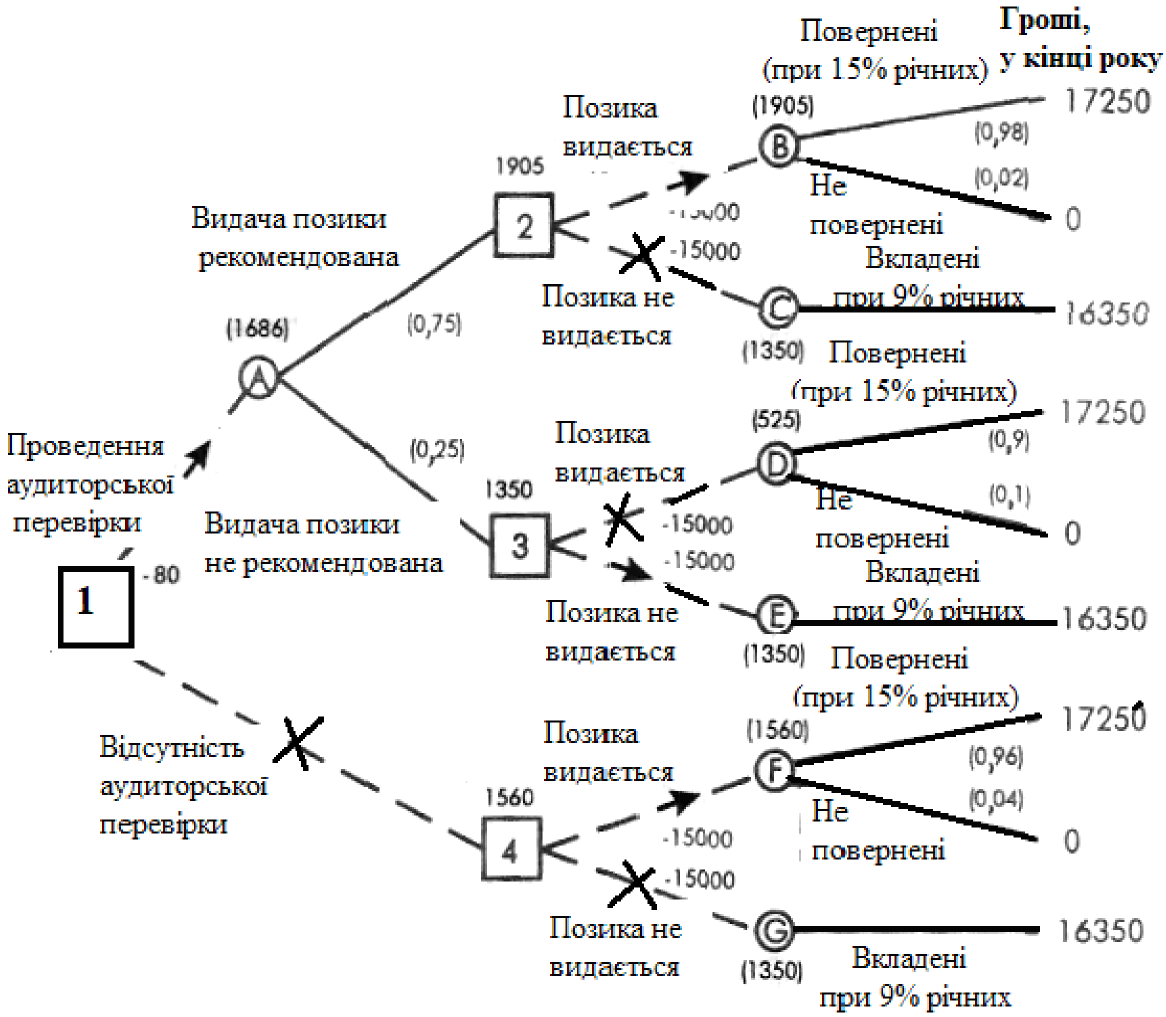


Рис. 11.3. Остаточне дерево рішень задачі про видачу позики

На рис. 11.3 стрілками показано послідовність рішень, що веде до максимального чистого доходу: у квадраті 1 скористаємося аудиторською перевіркою. Якщо видача позики рекомендується фірмою, тоді у квадраті 2 – видати позику, якщо не рекомендується, то у квадраті 3 – не видавати позику, а інвестувати ці гроші під стабільні 9 % річних. Дерево остаточних рішень наведено на рис. 11.3.

### 11.6. Задачі прийняття рішень на основі марківських процесів

Марківські процеси застосовуються для вирішення стохастичних завдань, де зміни в системі можна представити у вигляді низки її станів, що чергуються. Перехідні ймовірності між станами описують марківський ланцюг. Структура даних у цьому процесі представляється у вигляді матриць, елементи яких можуть у загальному вигляді змінюватися з переходом з одного стану до іншого. У цьому випадку розглядаються стаціонарні дані, представлені в матриці перехідних ймовірностей *P* та матриці доходів *R*.

Розглянемо задачу прийняття рішень в умовах ризику з трьома альтернативами. Нехай задана матриця перехідних імовірностей:

| | | Стан системи на наступному етапі | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Поточний стан системи | | 1) | 2) | 3) |
| $P_1 =$ | | 1) | 0,3 | 0,6 | 0,1 |
| | | 2) | 0,1 | 0,5 | 0,4 |
| | | 3) | 0 | 0,6 | 0,4 |

Матриця перехідних імовірностей відображає ймовірності переходу системи з одного стану до іншого. Так, якщо в цей момент система перебуває в стані 2), то ймовірність того, що на наступному етапі вона перейде до стану 3), дорівнює 0,4.

Перехідні ймовірності можуть бути змінені шляхом організації будь-яких заходів. Так, наприклад, якщо представлена вище матриця перехідних імовірностей характеризує попит, то із застосуванням різних заходів щодо стимулювання попиту (організація рекламної компанії) ця матриця може набути такого вигляду:

| | | Стан системи на наступному етапі | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Поточний стан системи | | 1) | 2) | 3) |
| $P_2 =$ | | 1) | 0,1 | 0,6 | 0,3 |
| | | 2) | 0,05 | 0,2 | 0,75 |
| | | 3) | 0,1 | 0,2 | 0,7 |

З кожною матрицею перехідних імовірностей $P$ пов'язують матрицю доходів $R$, яка визначає прибуток або збиток залежно від станів, між якими здійснюється перехід. Нехай матриці $R_1$ і $R_2$ відповідають матрицям перехідних імовірностей $P_1$ і $P_2$.

$$R_2 = \begin{array}{c|ccc} & 1) & 2) & 3) \\ \hline 1) & 4 & 3 & 1 \\ 2) & 0 & 2 & 5 \\ 3) & 2 & -1 & 2 \end{array} \qquad R_1 = \begin{array}{c|ccc} & 1) & 2) & 3) \\ \hline 1) & 1 & 4 & 6 \\ 2) & -1 & 2 & 6 \\ 3) & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

Елементи матриць враховують витрати, пов'язані із проведенням рекламної компанії. Отже, дохід чи збиток змінюватиметься залежно від ухваленого рішення. Особу, яка приймає рішення, може також цікавити оцінка очікуваного доходу за певної стратегії поведінки в разі того чи іншого стану системи. При цьому кажуть, що прийняття рішень описується стаціонарною стратегією.

Метою вирішення завдання є знаходження оптимальної стратегії, що максимізує очікуваний дохід. Слід зазначити, що структура марківського процесу дає змогу моделювати його з урахуванням моделі динамічного програмування. Причому період прогнозування може мати кінцеве чи нескінченне число етапів.

***Модель динамічного програмування з кінцевим числом етапів***

Нехай число станів кожного етапу дорівнює $m$. Позначимо через оптимальний очікуваний дохід, отриманий на етапах від $n$ до $N$ включно, за умови, що система перебувала на початку етапу $n$ у стані $i$.

Зворотне рекурентне рівняння, що зв'язує $f_n$ і $f_{n+1}$, запишемо у вигляді:

$$f_n(i) = \max_k \left( \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \left( r_{ij}^k + f_{n+1}(j) \right) \right),$$

де $f_{N+1}(j) = 0, \forall j$, $k$ – альтернативи, $p_{ij}^k$ – імовірності переходу системи з $i$ до $j$ за альтернативи $k$, $r_{ij}^k$ – елемент матриці доходів $R$ з переходом системи з $i$ до $j$ за альтернативи $k$, $f_{n+1}(j)$ – дохід, який був отриманий на етапі $n$ + 1, коли система була в стані $j$.

Наведене рівняння базується на тому, що дохід $r_{ij}^k + f_{n+1}(j)$, який накопичується, виходить унаслідок переходу зі стану $i$ на етапі $n$ в стан $j$ етапі $n$ + 1 з імовірністю $p_{ij}^k$. Увівши позначення

$$v_i^k = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k ,$$

рекурентне рівняння динамічного програмування можна записати таким чином:

$$f_N(i) = \max_k \left( v_i^k \right).$$

Для проміжних значень функція стану:

$$f_n(i) = \max_k \left( v_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \cdot f_{n+1}(j) \right), \quad n = 1,2,\ldots,N-1.$$

***Модель динамічного програмування з нескінченним числом етапів***

Поведінка марківського процесу на довгостроковому горизонті характеризується його незалежності від початкового стану. У цьому випадку кажуть, що система досягла стану. Існує два методи вирішення таких завдань.

Перший метод (метод повного перебору) заснований на переборі всіх можливих стаціонарних стратегій завдання прийняття рішення. Цей підхід можна використовувати лише тоді, коли загальна кількість стаціонарних стратегій з погляду практичних обчислень є досить малою.

Другий метод (метод ітерації за стратегіями) зазвичай ефективніший, оскільки визначає оптимальну стратегію ітераційним шляхом.

***Метод повного перебору***

Припустимо, що завдання прийняття рішень має $S$ стаціонарних стратегій. Нехай $P_S$ і $R_S$ – матриці перехідних (однокрокових) ймовірностей і доходів, відповідні стратегії, що застосовуються, $s = 1,2,\ldots,S$. Метод перебору передбачає чотири кроки:

*Крок 1*. Обчислюємо $v_i^s$ – очікуваний дохід, що отримується за один етап за стратегії для заданого стану $i$, $i = 1,...,m$.

*Крок 2*. Обчислюємо $\pi_i^s$ – довгострокові стаціонарні ймовірності матриці перехідних імовірностей $P_S$, що відповідають стратегії $s$. Ці ймовірності (якщо вони існують) визначають з рівнянь:

$$\pi^S P^S = \pi^S, \ \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S = 1, \text{ де } \pi^S = \left(\pi_1^S, \pi_2^S, ..., \pi_m^S\right).$$

*Крок 3*. Обчислюємо $E_S$ – очікуваний дохід за один крок (етап) за вибраної стратегії $s$:

$$E_S = \sum_{i=1}^{m} \pi_i^S v_1^S .$$

*Крок 4*. Оптимальна стратегія $s^*$ визначається за умови, що

$$E^{S*} = \max_S \left\{E^S\right\}.$$

***Метод ітерації стратегій без дисконту***

Зі збільшенням числа стаціонарних стратегій кількість комбінацій може бути неприпустимо великою. Тому використання методу повного перебору найчастіше невиправдано, оскільки потребує великих витрат машинного часу. Метод ітерацій стратегій позбавлений цього недоліку.

Метод ітерацій стратегій ґрунтується на такому. Для будь-якої конкретної стратегії очікуваний сумарний дохід за $n$-й етап визначається рекурентним рівнянням.

$$f_n(i) = v_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \cdot f_{n+1}(j), \quad n = 1,2,...,m.$$

Покладемо, що $n \to \infty$, то очікуваний дохід за один етап буде визначатись із системи $m$ лінійних рівнянь:

$$E = v_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot f(j) - f(i), \quad i = 1,2,...,m$$

з $m+1$ невідомими $f(1), f(2),..., f(m), E$.

Оскільки є $m$ рівнянь з $m+1$ невідомими, оптимальне значення $E$ не можна визначити за один крок. У зв’язку із цим використовується ітеративна процедура, що починається з довільної стратегії, а потім визначається нова стратегія, що дає краще значення *E*. Ітеративний процес закінчується, якщо дві послідовні стратегії збігаються.

Ітеративний процес складається з двох основних кроків.

*Крок 1*. Оцінка параметрів.

Вибираємо довільну стратегію *s*. Використовуючи відповідні матриці $P_S$ і $R_S$, покладаючи $f(m)=0$, розв'язуємо рівняння:

$$E_S = v_i^S + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^S \cdot f_S(j) - f_S(i), \quad i = 1,2,...,m,$$

щодо невідомих $E_S$, $f_S(1)$, $f_S(2), \ldots, f_S(m-1)$.

*Крок 2.* Покращення стратегії.

Для кожного стану визначаємо альтернативу *k*, що забезпечує

$$\max_{k}\left\{ v_i^k + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \cdot f_S(j) \right\}, \quad i = 1,2,...,m.$$

Тут використовуються значення $f_S(1)$, $j = 1,2,...,m$, визначені на етапі оцінювання параметрів. Результуючі оптимальні рішення станів 1, 2, …, *m* формують нову стратегію *t*. Якщо *s* і *t* ідентичні, алгоритм закінчується і *t* – оптимальна стратегія.

В іншому випадку вважаємо *s* = *t* і повертаємося до кроку оцінювання параметрів.

**Приклад 11.4.** Завдання із скінченним числом етапів.

Меблевий магазин планує свою роботу на три місяці, при цьому директору магазину потрібно вирішити, які заходи щодо стимулювання попиту залежно від стану справ слід вжити для збільшення обсягу продажу. Розглядаються такі варіанти стимулювання попиту:

– знижка 3 % до наступної покупки;

– безкоштовна доставка;

– не робити нічого.

Крім того, фірма оцінює місячний обсяг продажів за 3-бальною шкалою як:

– відмінний,

– гарний,

– задовільний.

Відомі перехідні ймовірності та відповідні місячні доходи за кожним із трьох варіантів:

Знижка 3 % до наступної покупки

$P_1 =$

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,4 | 0,5 | 0,1 |
| 2 | 0,1 | 0,6 | 0,3 |
| 3 | 0 | 0,2 | 0,8 |

$R_1 =$

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 110 | 100 | 70 |
| 2 | 105 | 90 | 65 |
| 3 | 100 | 85 | 60 |

Безкоштовна доставка

$P_1 =$

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,3 | 0,6 | 0,1 |
| 2 | 0 | 0,4 | 0,6 |
| 3 | 0 | 0,2 | 0,8 |

$R_1 =$

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 130 | 110 | 90 |
| 2 | 130 | 100 | 85 |
| 3 | 125 | 98 | 80 |

Не робити нічого

$P_3 =$

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,3 | 0,3 | 0,4 |
| 2 | 0,1 | 0,7 | 0,2 |
| 3 | 0,05 | 0,2 | 0,75 |

$R_3 =$

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 90 | 70 |
| 2 | 110 | 95 | 65 |
| 3 | 100 | 85 | 60 |

Знайти оптимальну стратегію стимуляції попиту наступних 3 місяців.

*Розв'язок*. У цьому випадку число етапів – 3 (місяці), число станів на кожному етапі $m$ = 3 (попит відмінний, хороший, задовільний).

Обчислимо значення $v_i^k = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^k \cdot r_{ij}^k$ :

$v_1^1 = 0{,}4 \cdot 110 + 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}1 \cdot 70 = 101$, $v_2^1 = 0{,}1 \cdot 105 + 0{,}6 \cdot 90 + 0{,}3 \cdot 65 = 84$,
$v_3^1 = 0 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 85 + 0{,}8 \cdot 60 = 65$, $v_1^2 = 0{,}3 \cdot 130 + 0{,}6 \cdot 110 + 0{,}1 \cdot 90 = 114$,
$v_2^2 = 0 \cdot 130 + 0{,}4 \cdot 100 + 0{,}6 \cdot 85 = 91$, $v_3^2 = 0 \cdot 125 + 0{,}2 \cdot 98 + 0{,}8 \cdot 80 = 83{,}6$,
$v_1^3 = 0{,}3 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 90 + 0{,}4 \cdot 70 = 85$, $v_2^3 = 0{,}1 \cdot 110 + 0{,}7 \cdot 95 + 0{,}2 \cdot 65 = 90{,}5$,
$v_3^3 = 0{,}05 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 85 + 0{,}75 \cdot 60 = 67$.

Складемо матрицю доходу:

| | $v_i^1$ | $v_i^2$ | $v_i^3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 101 | 114 | 85 |
| 2 | 84 | 91 | 90,5 |
| 3 | 65 | 83,6 | 67 |

Враховуватимемо витрати за кожної стратегії (10, 20, 0):

| **Етап 3:** | $v_i^k$ | | | Оптимальне рішення | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $f_3(i)$ | $k^*$ |
| 1 | 101 | 114 | 85 | 114 | 2 |
| 2 | 84 | 91 | 90,5 | 91 | 2 |
| 3 | 65 | 83,6 | 67 | 83,6 | 2 |
| **Етап 2:** | | | | | |
| | $v_i^k + p_{i1}^k f_3(1) + p_{i2}^k f_3(2) + p_{i3}^k f_3(3)$ | | | Оптимальне рішення | |
| $i$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $f_2(i)$ | $k^*$ |
| 1 | 101 + 0,4·114 + 0,5·91 + 0,1·83,6 = 200,46 | 211,16 | 179,94 | 211,16 | 2 |
| 2 | 84 + 0,1·114 + 0,6·91 + 0,3·83,6 = 175,08 | 177,56 | 182,32 | 182,32 | 3 |
| 3 | 65 + 0·114 + 0,2·91+ 0,8·83,6 = 150,8 | 168,68 | 153,6 | 168,68 | 2 |
| **Етап 1:** | | | | | |
| | $v_i^k + p_{i1}^k f_2(1) + p_{i2}^k f_2(2) + p_{i3}^k f_2(3)$ | | | Оптимальне рішення | |
| $i$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $f_1(i)$ | $k^*$ |
| 1 | 101 + 0,4·211,16 + 0,5·182,32 + 0,1·168,68 = 293,49 | 303,61 | 270,52 | 303,61 | 2 |
| 2 | 84 + 0,1·211,16 + 0,6·182,32 + 0,3·168,68 = 265,11 | 265,14 | 272,98 | 272,98 | 3 |
| 3 | 65 + 0·211,16 + 0,2· ·182,32 + 0,8·168,68 = 236,41 | 255,01 | 240,53 | 255,01 | 2 |

Оптимальне рішення показує, що в перший і другий місяці підприємству слід стимулювати попит шляхом організації безкоштовної доставки за умови, що рівень попиту перебуває або у відмінному, або в задовільному стані. Якщо ж рівень попиту добрий, то не слід нічого робити. У третьому місяці магазину слід організувати безкоштовну доставку меблів незалежно від стану системи. Сумарний очікуваний дохід за 3 місяці становитиме за хорошого рівня продажів у перший місяць… за оптимального рівня і $f_1(2) = 272{,}98$ – за задовільного рівня продажів у перший місяць.

**Контрольні запитання**

1. Які основні типи ризиків виділяють у комерційній діяльності?
2. За якими основними ознаками класифікують ризики?
3. Що розуміють під управлінням ризиками?
4. Якими правилами керуються для управління ризиками?
5. Що є основою для прийняття рішень в умовах ризиків?
6. Чим оцінюють степінь ризику і якому значенню відповідає середній ризик?
7. Які параметри потрібно визначити для постановки задачі прийняття рішення в умовах ризиків?
8. Які основні критерії прийняття рішень в умовах ризиків ви знаєте?
9. У чому полягає критерій Байеса для прийняття рішень в умовах ризиків?
10. У чому полягає критерій стандартного відхилення для прийняття рішень в умовах ризиків?
11. У чому полягає критерій Байеса для прийняття рішень в умовах ризиків? У яких випадках він використовується?
12. Що таке «дерево рішень»? За якими правилами виконується його побудова?
13. Опишіть алгоритм процедури прийняття рішення на основі дерева рішень.
14. У чому полягає процедура прийняття рішень на основі марківських процесів?
15. Що є вихідною інформацією для прийняття рішень на основі марківських процесів?
16. Які виділяють типи задач прийняття рішень на основі харківських процесів?

# *Лекція 12.* Елементи теорії ігор

## 12.1. Поняття теорії ігор

Найбільш простими із ситуацій, що містять невизначеність, є так звані конфліктні ситуації, тобто ситуації, у яких стикаються інтереси двох (і більше) сторін, що переслідують різні цілі, причому виграш кожної сторони залежить від того, як поведуть себе інші. Модель конфліктної ситуації називається статистичної грою; сторони, що беруть участь у конфлікті, – гравцями; а результат конфлікту – виграшем.

**Теорія ігор** – математична теорія конфліктної ситуації. Кожен учасник конфлікту прагне прийняти оптимальне рішення, яке реалізує поставлені цілі найбільшою мірою. Пошук таких рішень є основним завданням теорії ігор.

Оптимальною називається стратегія, яка за багаторазового повторення гри забезпечує цьому гравцю найбільший можливий середній виграш. Оптимальні стратегії повинні задовольняти умові стійкості, тобто будь-кому з гравців має бути невигідно відмовитися від своєї стратегії в цій грі.

Класифікацію ігор можна проводити:

– за кількістю гравців (два або n гравців);

– за кількістю стратегій (скінченні або нескінченні);

– за характером взаємодії гри (без коаліційні, тобто гравці не мають права брати участь в угодах; коаліційні або кооперативні);

– за характером виграшів (грою з нульовою сумою або антагоністичні, тобто якщо виграш одного з гравців дорівнює програшу іншого, загальний капітал не змінюється, а перерозподіляється між гравцями; гри з ненульовою сумою);

– за видом функції виграшу (на матричну – скінченна гра двох гравців із нульовою сумою; біматричну – скінченна гра двох гравців із ненульовою сумою; неперервну – функція виграшів кожного гравця є неперервною залежно від стратегії; опуклу – функція виграшів є опуклою).

Для матричних ігор доведено, що будь-яка з них має рішення і воно може бути знайдено шляхом зведення гри до задачі лінійного програмування. Для біномних також розроблено теорію оптимальної поведінки гравців, однак вирішувати такі ігри складніше. Для неперервних не розроблено практично прийнятних методів їх вирішення. Для опуклої гри розроблені методи рішення, що складаються в знаходженні чистої стратегії для одного гравця і ймовірностей застосування чистих стратегій другого гравця.

У широкому сенсі ігри поділяють на стратегічні, статистичні та позиційні.

Теорія стратегічних ігор – це математична дисципліна, що займається розробкою моделей, описом конфліктних ситуацій, а також діями та стратегіями учасників конфлікту.

У статистичних іграх супротивником виступає природа, дії якої не мають осмисленого характеру й визначаються випадковими величинами.

Позиційні ігри пов'язані з послідовним багатоетапним прийняттям рішення, причому рішення, прийняте на попередніх етапах, визначає множину можливих рішень для наступних етапів.

### 12.2. Матричні ігри

Найбільш розробленою в теорії ігор є скінченна парна гра з нульовою сумою (антагоністична гра двох осіб або двох коаліцій), звана матричної грою.

Розглянемо таку гру $G$, у якій беруть участь два гравці $A$ і $B$, що мають антагоністичні інтереси: виграш одного гравця дорівнює програшу другого.

Оскільки виграш гравця $A$ дорівнює виграшу гравця $B$ з протилежним знаком, можемо цікавитися тільки виграшем гравця $A$. Природно, що гравець $A$ хоче максимізувати свій виграш, а гравець $B$ – мінімізувати його. Ототожнивши себе подумки з одним з гравців (нехай це буде гравець $A$), називатимемо гравця $B$ «супротивник» (зрозуміло, що якихось реальних переваг для $A$ із цього не випливає).

Нехай у гравця $A$ є $m$ можливих стратегій $A_1, A_2, \dots A_m$, а у супротивника – $n$ можливих стратегій $B_1, B_2, \dots B_n$ (така гра називається грою $m \times n$).

Позначимо через $A_{ij}$ виграш гравця $A$ в разі, якщо він скористається стратегією $A_i$, а гравець $B$ – стратегією $B_j$. Передбачається, що виграш $A_{ij}$ відомий. Тоді ми можемо скласти прямокутну таблицю (матрицю), у якій перераховані стратегії гравців і відповідні виграші:

| | $B_1$ | $B_2$ | $\dots$ | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $A_{11}$ | $A_{12}$ | $\dots$ | $A_{1n}$ |
| $A_2$ | $A_{21}$ | $A_{22}$ | $\dots$ | $A_{2n}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $A_m$ | $A_{m1}$ | $A_{m2}$ | | $A_{mn}$ |

Якщо така таблиця складена, то кажуть, що гра $G$ приведена до матричної формі. Розглянемо деякі задачі, вирішення яких зводиться до вирішення матричних ігор.

***Гра 1. Варіант гри «Морра»***

Гра, як гра на пальцях, з'явилася ще в античні часи. Розглянемо її варіант із застосуванням монет. Вона полягає в тому, що кожен з двох гравців незалежно один від одного вибирає певний бік монети («герб» або «решка»), потім одночасно називають свій вибір. Якщо гравці вибрали той самий бік монети, то другий гравець платить першому одну гривню, якщо різні, то перший платить другому таку ж суму. Матриця виграшів (платіжна матриця) цієї гри матиме вигляд:

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | $A_{11} = 1$ | $A_{12} = -1$ |
| $A_2$ | $A_{21} = -1$ | $A_{22} = 1$ |

Стратегії $A_1$ і $B_1$ – гравці $A$ і $B$ вибирають «герб», а $A_2$ і $B_2$ – гравці $A$ і $B$ вибирають «решку».

Нетривіальність сформульованої задачі, як і будь-який матричної гри, полягає в тому, що кожен із гравців робить свій вибір незалежно один від одного.

***Гра 2. Боротьба за ринки***

Розглянемо гру на прикладі. Фірми $A$ і $B$ виробляють однаковий товар, і в цей час кожна «контролює» 50 % ринку. Поліпшивши якість товару, обидві фірми збираються розгорнути рекламні кампанії. При цьому придбання нових покупців однією фірмою супроводжується втратою цих покупців іншою. Дослідження показало, що

– 60 % потенційних покупців отримують інформацію через телебачення,

– 30 % – через газети,

– 10 % – через радіомовлення.

Завдання кожної фірми – вибрати стратегію рекламної кампанії.

У цій грі в кожного з гравців є три стратегії:

– $A_1$, $B_1$ – рекламувати товар через телебачення;

– $A_2$, $B_2$ – через газети;

– $A_3$, $B_3$ – через радіомовлення.

Оскільки це гра з нульовою сумою, то матрицю виграшів фірми $A$ можна представити в такому вигляді:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 30 | 50 |
| $A_2$ | –30 | 0 | 20 |
| $A_3$ | –50 | –20 | 0 |

де $A_{ij}$ – кількість покупців товару фірми $A$ у відсотках, на яке воно збільшується, якщо фірма $A$ застосовує стратегію $A_i$, а фірма $B$ – стратегію $B_j$.

### 12.3. Визначення оптимальної стратегії в матричній грі

Для вибору оптимальної стратегії основою міркувань є припущення, що супротивник є щонайменше так само розумний, як і ми самі, і робить все, щоб досягти такої ж мети, а саме отримати максимальний виграш.

При цьому для вибору оптимальної стратегії використовують ***принцип максиміна***: вибирають ту стратегію, щоб за найгіршої для нас поведінки супротивника отримати максимальний виграш. Інакше кажучи, принцип максиміна передбачає вибір тієї стратегії, за якої наш мінімальний виграш для різних стратегій (варіантів гри) буде максимальним.

Для розглянутого вище прикладу гри «боротьби за ринки» платіжна матриця мала такий вигляд:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | **0** | **30** | **50** | **0** |
| $A_2$ | –30 | 0 | 20 | –30 |
| $A_3$ | –50 | –20 | 0 | –50 |

Згідно з принципом максиміна, для нас кращою буде стратегія $A_1$ – реклама через телебачення.

Як видно, принцип максиміна – це принцип украй обережного гравця, але саме він є основним принципом теорії матричних ігор.

**Приклад 12.1.** Розглянемо приклад матричної гри $G(4\times5)$ з платіжною матрицею:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $\alpha_i$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 6 | 7 | 4 | 5 | 4 | |
| $A_2$ | 3 | 10 | 6 | 5 | 6 | 3 | |
| $A_3$ | 12 | 5 | 3 | 9 | 8 | 3 | |
| $A_4$ | 6 | 7 | 5 | 6 | 10 | **5** | $\max\limits_i \min\limits_j A_{ij}$ |
| $\beta_i$ | 12 | 10 | **7** | 9 | 10 | | |
| | | | $\min\limits_j \max\limits_i A_{ij}$ | | | | |

Якою стратегією гравцеві $A$ скористатися?

Є спокусливий виграш 12 із застосуванням стратегії $A_3$. Але при цьому противник може вибрати стратегію $B_3$ і гравець $A$ отримає виграш, рівний усього трьом.

Для визначення оптимальної стратегії відповідно до принципу максиміна, запишемо в правому додатковому стовпці платіжної матриці мінімальне значення $A_I$ в кожному рядку (мінімум рядка). З усіх значень $A_I$ (правий стовпець) виділимо найбільший. Йому відповідає стратегія $A_4$. Вибравши цю стратегію, ми в усякому разі можемо бути впевнені, що за будь-якої поведінки супротивника виграш буде не менше ніж п'ять.

Ця величина – наш гарантований виграш. Він називається ***нижньої ціною*** гри (або «максимін» – максимальний із мінімальних виграшів). Будемо позначати його *А*. У нашому прикладі $a = \max_i \min_j A_{ij} = 5$.

Тепер візьмемо точку зору гравця В і поміркуємо за нього. Вибираючи стратегію, він хотів би віддати поменше, але повинен розраховувати на найгіршу для нього поведінку гравця *А*. Припишемо до платіжної матриці нижній рядок і в ньому запишемо найгірші для гравця *В* можливі результати (максимуми стовпців $B_j$ .

Очевидно, обережний супротивник повинен вибрати стратегію, за якої величина $B_J$ мінімальна. Ця величина називається ***верхньої ціною*** гри (або «мінімакс» – мінімальний із максимальних програшів). Будемо позначати її В. У нашому прикладі $b = \min_j \max_i A_{ij} = 7$.

Отже, виходячи з принципу обережності, гравець *А* повинен вибрати стратегію $A_4$, а його супротивник – $B_3$. Такі стратегії називаються максимінною або мінімаксною стратегіями (що випливають з принципу максиміна).

У нашому прикладі нижня і верхня ціна гри не збігаються, гра не є нульовою. Якщо нижня і верхня ціна гри однакові, то такий випадок відповідає наявності в платіжній матриці так званої сідлової точки.

**Визначення.** Точка $A_{ij}$ називається сідловою платіжної матриці $\left|A_{ij}\right|$, якщо вона є одночасно мінімумом свого рядка і максимумом свого стовпчика.

**Теорема 1.** Для того щоб $\max_i \min_j A_{ij} = \min_j \max_i A_{ij}$, необхідно і достатньо, щоб матриця $\left|A_{ij}\right|$ мала сідлову точку.

Якщо платіжна матриця має сідлову точку, то кожному гравцю вигідно дотримуватися своїх стратегій і така гра називається грою в «чистих» стратегіях.

**Приклад.** Знайти рішення гри *G* (3 x 3), платіжна матриця якої має такий вигляд:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | –1 | **–2** | –2 |
| $A_2$ | 3 | 2 | **–1** | –1 |
| $A_3$ | **6** | **3** | **0** | **0** |
| $\beta_i$ | 6 | 3 | **0** | |

Для цієї платіжної матриці виконується умова:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = \beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} = 0 .$$

Отже, матрична гра має сідлову точку. Оптимальними стратегіями для гравця *A* є стратегія $A_3$, а для гравця *B* – $B_3$.

Легко помітити, що відхилення гравця *A* від оптимальної стратегії призводить до зменшення його виграшу, а одностороннє відхилення гравця *B* – до збільшення його програшу.

Можуть траплятися випадки, коли платіжна матриця має кілька сідлових точок, однак це не змінить характеру рекомендованих рішень, оскільки всі ситуації рівноваги мають ту саму ціну, а отже, є еквівалентними.

### 12.4. Чисті і змішані стратегії

Якщо в грі кожен із супротивників застосовує тільки ту саму стратегію, то про саму гру в цьому випадку говорять, що вона відбувається в ***чистих стратегіях***, а використовувані гравцем *A* і гравцем *B* пара стратегій називаються ***чистими стратегіями***.

**Визначення.** В антагоністичній грі пара стратегій $(A_i, B_j)$ називається рівноважною або стійкою, якщо жодному з гравців не вигідно відходити від своєї стратегії.

Застосовувати чисті стратегії має сенс тоді, коли гравці *A* і *B* мають відомості про дії один одного й досягнуті результати або платіжна матриця має сідлову точку. Якщо припустити, що хоча б одна зі сторін не знає про поведінку супротивника, то ідея рівноваги порушується і гра ведеться безсистемно.

У розглянутому вище прикладі максиміна чисті стратегії $A_4$ і $B_3$ нестійкі стосовно інформації про поведінку супротивника; вони не мають властивості рівноваги.

Дійсно, припустимо, що ми дізналися, що противник дотримується стратегії $B_3$. Використовуючи цю інформацію, виберемо стратегію $A_1$ і отримаємо більший виграш, рівний 7. Але якщо противник дізнався, що наша стратегія $A_1$, він вибере стратегію $B_4$, звівши наш виграш до 4.

Таким чином, у розглянутому прикладі максиміна чисті стратегії виявились нестійкими стосовно інформації про поведінку іншої сторони. Але це не завжди так.

Розглянемо матричну гру *G* (3 х 4), платіжна матриця якої задана:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 7 | 10 | 8 | 4 |
| $A_2$ | 10 | 9 | 11 | 10 | **9** |
| $A_3$ | 8 | 6 | 7 | 4 | 4 |
| $\beta_i$ | 10 | **9** | 11 | 10 | |

У цьому прикладі нижня ціна гри дорівнює верхній: $\alpha = \beta = 9$, отже, гра має сідлову точку. Виявляється, що в цьому випадку максиміна стратегії $A_2$ і $B_2$ будуть стійкими стосовно інформації про поведінку супротивника.

Дійсно, нехай гравець *A* дізнався, що противник застосовує стратегію $B_2$. Але і в цьому випадку гравець, як і раніше, дотримуватиметься стратегії $A_2$, тому що будь-який відступ від неї тільки зменшить виграш. Так само інформація, отримана гравцем *B*, не змусить його відступити від своєї стратегії $B_2$.

Пара стратегій $A_2$ і $B_2$ має властивість стійкості, а виграш (у розглянутому прикладі він дорівнює 9), який досягається за цієї пари стратегій, виявляється сідловою точкою платіжної матриці.

Ознака стійкості (рівноваги) пари стратегії – це рівність нижньої і верхньої ціни гри.

Стратегії $A_i$ і $B_j$ (у розглянутому прикладі $A_2$, $B_2$), за яких виконується рівність нижньої і верхньої ціни гри, називаються оптимальними чистими стратегіями, а їх сукупність – рішенням гри. Про саму гру в цьому випадку говорять, що вона вирішується в чистих стратегіях.

Величину $\nu = \alpha = \beta$ назвемо ціною гри.

Якщо $\nu > 0$, то гра вигідна для гравця *A*, якщо $\nu < 0$ – для гравця *B*; якщо $\nu = 0$, то гра справедлива, є однаково вигідною для обох учасників.

Виникає питання: як знайти рішення гри, платіжна матриця якої не має сідлової точки? Застосування принципу максиміна кожним із гравців забезпечує гравцеві *A* виграш не менше $\alpha$, гравцеві *B* – програш не більше $\beta$. Для гравця *A* природно бажання збільшити виграш, а для гравця *B* – зменшити програш. Пошук такого рішення обумовлює потребу застосовувати змішані стратегії: чергувати чисті стратегії з якимось частотами.

**Визначення.** Застосування чистих стратегій гравця із частотою, яка є випадковою величиною, називається його ***змішаною стратегією***.

Таким чином, завдання змішаної стратегії гравця полягає у визначенні ймовірностей, з якими вибираються його чисті стратегії.

Позначимо змішані стратегії гравців *A* і *B* відповідно:

$S_A = (p_1, p_2, ..., p_m)$;

$S_B = (q_1, q_2, ..., q_n)$,

де $p_i$ – імовірність застосування гравцем *A* чистої стратегії $A_i$; $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$;

$q_j$ – імовірність застосування гравцем *B* чистої стратегії $B_j$; $\sum_{j=1}^{n} q_i = 1$.

В окремому випадку, коли всі ймовірності, крім однієї, дорівнюють нулю, а ця одна – одиниці, змішана стратегія перетворюється в чисту.

Застосування змішаних стратегій здійснюється, наприклад, таким чином: гра повторюється багато разів, але в кожній партії гравець застосовує різні чисті стратегії з відносними частотами їх застосування, рівними $p_i$ і $q_j$.

Змішані стратегії в теорії ігор є моделлю мінливої, гнучкої тактики, коли жоден із гравців не знає, яку чисту стратегію вибере супротивник у цій партії.

Якщо гравець *A* застосовує змішану стратегію $S_A = (p_1, p_2, ..., p_m)$, а гравець *B* змішану стратегію $S_B = (q_1, q_2, ..., q_n)$, то середній виграш (математичне очікування) гравця *A* визначається співвідношенням:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot p_i \cdot q_j \, .$$

Природно, що очікуваний програш гравця *B* дорівнює такій самій величині.

Отже, якщо матрична гра не має сідлової точки, то гравець повинен використовувати оптимальну змішану стратегію, яка забезпечить максимальний виграш $\nu$.

Виникає питання: якими міркуваннями потрібно керуватися для вибору змішаних стратегій? Виявляється, принцип максиміна зберігає своє значення і в цьому випадку. Крім того, важливе значення для розуміння рішення ігор мають основні теореми теорії ігор.

### 12.5. Вирішення матричних ігор у змішаних стратегіях

Розглянемо матричну гру (2 х 2). Нехай вона задана такою платіжною матрицею:

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ |

Припустимо, що гра не має сідлової точки. Отже, відповідно до основної теореми гра має оптимальне рішення в змішаних стратегіях: $S_A = (p_1, p_2)$ і $S_B = (q_1, q_2)$, де ймовірності застосування (відносні частоти застосування) чистих стратегій задовольняють співвідношенням:

$$p_1 + p_2 = 1, \; q_1 + q_2 = 1. \tag{12.1}$$

Відповідно до теореми про активні стратегії, оптимальна змішана стратегія має ту властивість, що забезпечує гравцеві максимальний середній виграш, рівний ціні гри $v$, незалежно від того, які дії робить інший гравець, якщо той не виходить за межі своїх активних стратегій. Зокрема, якщо гравець $A$ використовує свою оптимальну змішану стратегію, а гравець $B$ – свою чисту активну стратегію $B_1$ ($B_2$), то ціна гри $v$ відповідно дорівнює:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \tag{12.2}$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v. \tag{12.3}$$

Рівняння (12.1), (12.2) і (12.3) утворюють систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь із трьома невідомим: $p_1$, $p_2$ і $v$.

Вирішуючи її, легко знаходимо, що

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}},$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \tag{11.4}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}.$$

Якщо гравець $B$ використовує свою оптимальну змішану стратегію, а гравець $A$ – свою чисту активну стратегію $A_1$ ($A_2$), то ціна гри $v$ відповідно дорівнює:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \tag{12.5}$$

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v. \tag{12.6}$$

Рівняння (12.1), (12.5) і (12.6) утворюють систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь із трьома невідомими: $q_1$; $q_2$ і $v$.

Вирішуючи її, легко знаходимо, що

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}},$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \tag{12.7}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}.$$

Природно, що в обох випадках ціна гри (вирази (12.4) і (12.7)) вийшла та сама.

Щоб співвідношення (12.4), (12.7) мали сенс, потрібно, щоб виконувалися такі вимоги:

$$\begin{cases} a_{22}-a_{21}>0 \\ a_{11}-a_{12}>0 \\ a_{22}-a_{12}>0 \\ a_{11}-a_{21}>0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} a_{22}-a_{21}<0 \\ a_{11}-a_{12}<0 \\ a_{22}-a_{12}<0 \\ a_{11}-a_{21}<0 \end{cases}.$$

Тоді $p_1 \in (0,1),\ p_2 \in (0,1),\ q_1 \in (0,1),\ q_2 \in (0,1)$.

Неважко помітити, що в цих нерівностях відображено припущення про відсутність у цій грі сідлової точки. Дійсно, жоден із чотирьох виграшів $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}$ не може задовольнити цим нерівностям, будучи мінімальним у своєму рядку і максимальним у своєму стовпці.

Рішення системи рівнянь (12.4), (12.7) отримані алгебраїчним методом, але їх зручно отримувати і графічним методом (рис. 12.1). Для знаходження ймовірностей $p_1,\ p_2$ і ціни гри $v$ в прямокутній системі координат по осі абсцис відкладається ймовірність $p_1 \in [0,1]$, а по осі ординат – відповідні виграші гравця *A*.

Якщо $p_1 = 0$, гравець *A* застосовує чисту стратегію $A_2$. Якщо при цьому гравець *B* застосовує чисту стратегію $B_1$, то виграш гравця *A* дорівнює $a_{21}$, а якщо гравець *B* застосовує чисту стратегію $B_2$, то виграш гравця *A* дорівнює $a_{22}$.

Якщо $p_1 = 1$, гравець *A* застосовує чисту стратегію $A_1$. Якщо при цьому гравець *B* застосовує чисту стратегію $B_1$, то виграш гравця *A* дорівнює $a_{11}$, а із застосуванням чистої стратегії $B_2$ – $a_{12}$.

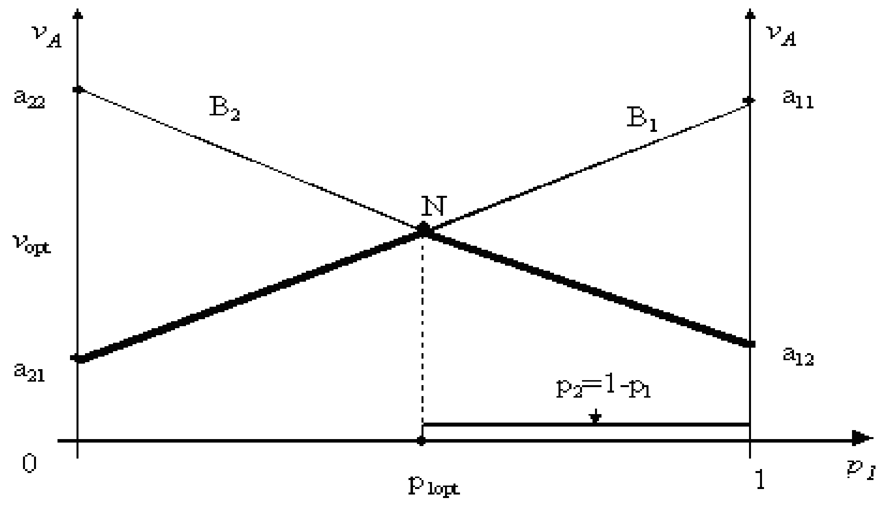


Рис. 12.1. Графічне зображення системи рівнянь 12.4

Оскільки значення $p_1$ лежать у межах [0,1], то, поєднуючи крайні точки для стратегій $B_1$ і $B_2$ (графіки функцій $v_A = (a_{11} - a_{21})p_1 + a_{22}$ і $v_A = (a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22}$, отримуємо значення виграшів гравця *A* для всіх проміжних значень $p$.

Відповідно до принципу максиміна, гравець *A* повинен вибрати таку змішану стратегію, за якої його мінімальний виграш максимальний. Точка $N$ перетину відрізків прямих (рис. 2.4) визначає як оптимальну ціну гри $v_{opt}$, так і оптимальні ймовірності $p_{1opt}$ і $p_{2opt} = 1 - p_{1opt}$, змішаної стратегії гравця *A*, а саме дає розв'язок системи рівнянь (12.4).

Для графічного рішення системи (12.7), відкладемо по осі абсцис імовірність $q \in [0,1]$, а по осі ординат – відповідні виграші гравця *B*:

$$v_B = (a_{11} - a_{12})q_1 + a_{12}, \quad v_B = (a_{21} - a_{22})q_1 + a_{22}.$$

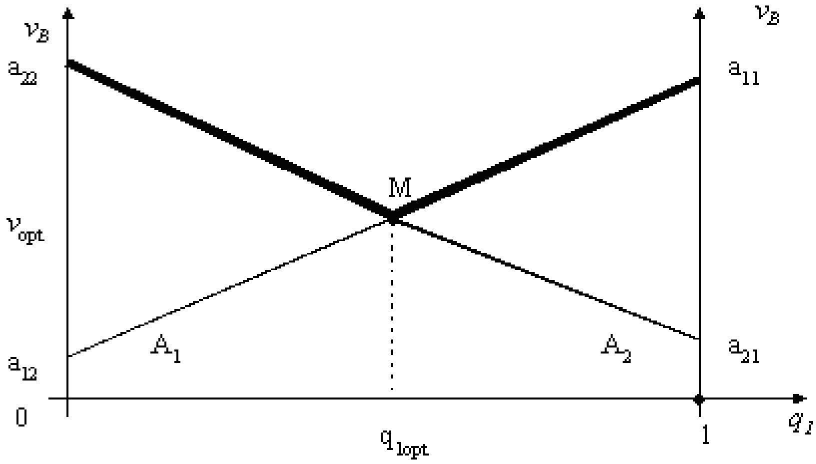


Рис. 12.2. Графічне зображення системи 12.7

Рішенням є координата точки *M* перетину прямих, що описуються нашими рівняннями: $q_{1opt}$, $q_{2opt} = 1 - q_{1opt}$ і $v_{opt}$. Це випливає і з принципу максиміна, відповідно до якого гравець *B* повинен вибрати таку змішану стратегію, за якої його максимальний програш буде мінімальним.

Для гри $G$ (2 х 2) із сідловою точкою геометрична інтерпретація рішення бути представлена, наприклад, таким чином (рис. 12.3).

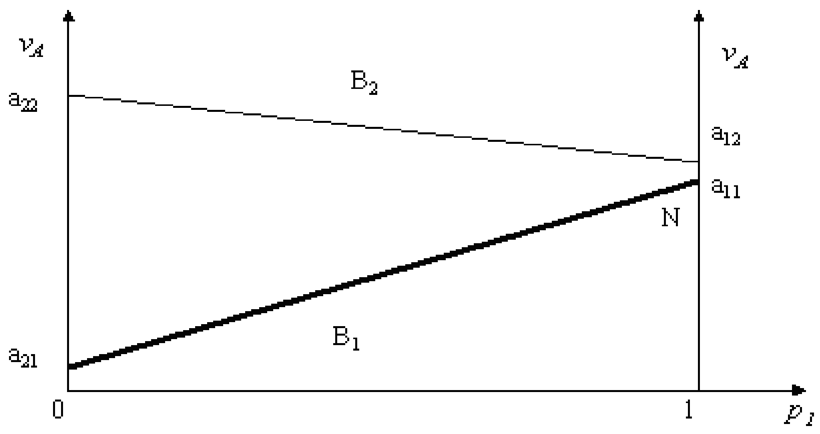


Рис. 12.3. Графічне зображення випадку існування сідловок точки

Стратегія $B_2$ гравця $B$ є для нього явно невигідною, оскільки, застосовуючи її, він у будь-якому випадку програє більше, ніж із застосуванням стратегії $B_1$. У цій грі $p_{1opt}=1$, $p_{2opt}=0$; $v_{opt}=a_{11}$, а саме гра має сідлову точку $N$ і вирішується в чистих стратегіях. Гравець $A$ повинен застосовувати стратегію $A_1$, а гравець $B$ – стратегію $B_1$.

**Приклад 12.2.** Знайти алгебраїчним і геометричним методами рішення гри, платіжна матриця якої має вигляд:

| | $B_1$ | $B_2$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | –2 | –2 |
| $A_2$ | 1 | 3 | **1** |
| $\beta$ | 4 | **3** | |

У цій грі нижня ціна гри $\alpha=1$ і не дорівнює верхній ціни гри $\beta=3$, тому гра не має сідлової точки, а отже, відповідно до основної теореми матричних ігор має оптимальне рішення в змішаних стратегіях.

Для гравця $A$ оптимальні ймовірності застосування стратегій $A_1$ і $A$ рівні:

$$p_1=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}=\frac{3-1}{4+3-1+2}=\frac{1}{4},$$

$$p_2=\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}=\frac{4+2}{4+3-1+2}=\frac{3}{4}.$$

Для гравця $B$ оптимальні ймовірності застосування стратегій $B_1$ і $B_2$ рівні:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3+2}{4+3-1+2} = \frac{5}{8},$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4-1}{4+3-1+2} = \frac{3}{8}.$$

Таким чином, оптимальні змішані стратегії гравців:

$$S_A = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right),\ S_B = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right),$$

ціна гри:

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{4+3-1+2} = \frac{7}{4}.$$

Оскільки $v > 0$, то гра вигідна для гравця $A$ (рис. 12.4).

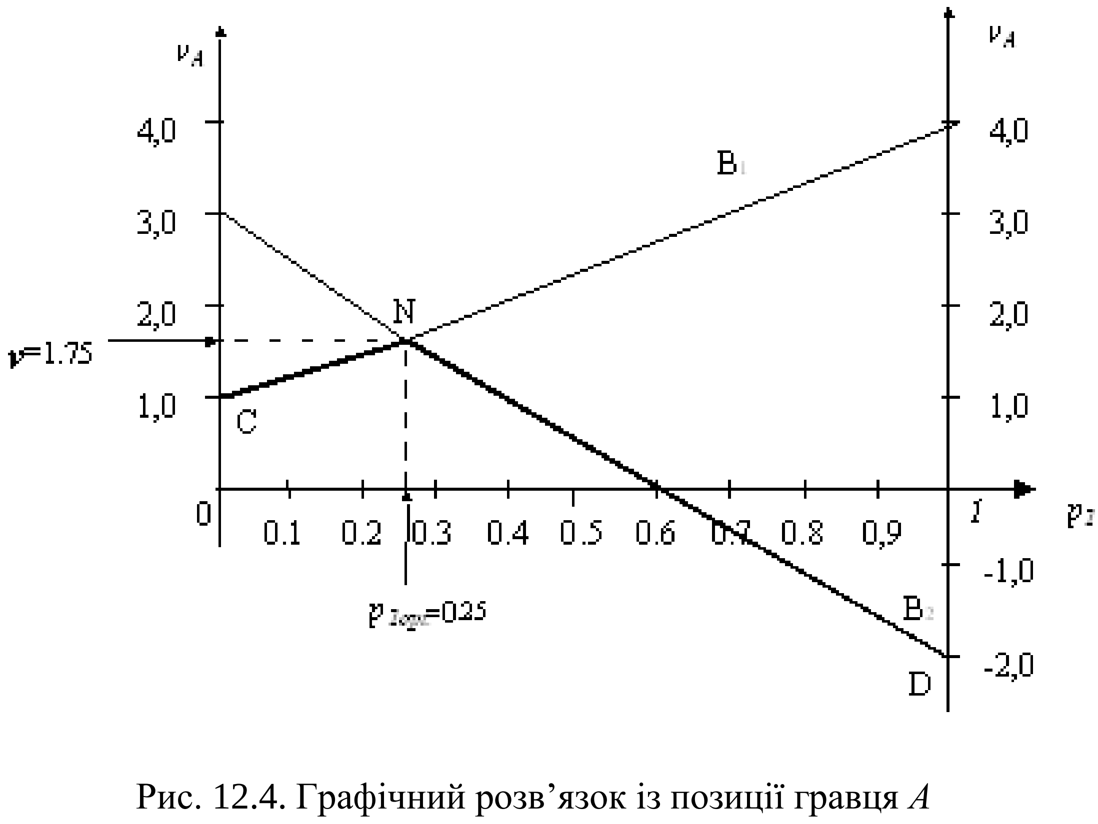


Рис. 12.4. Графічний розв’язок із позиції гравця *А*

Нижня межа виграшу гравця $A$ визначається ламаною $CND$. Оптимальне рішення визначається точкою $N$ і дає те ж рішення, що і алгебраїчний метод: $S_A = (0{,}25;\, 0{,}75)$.

Геометричне зображення гри для гравця $B$ показано на рис. 12.5.

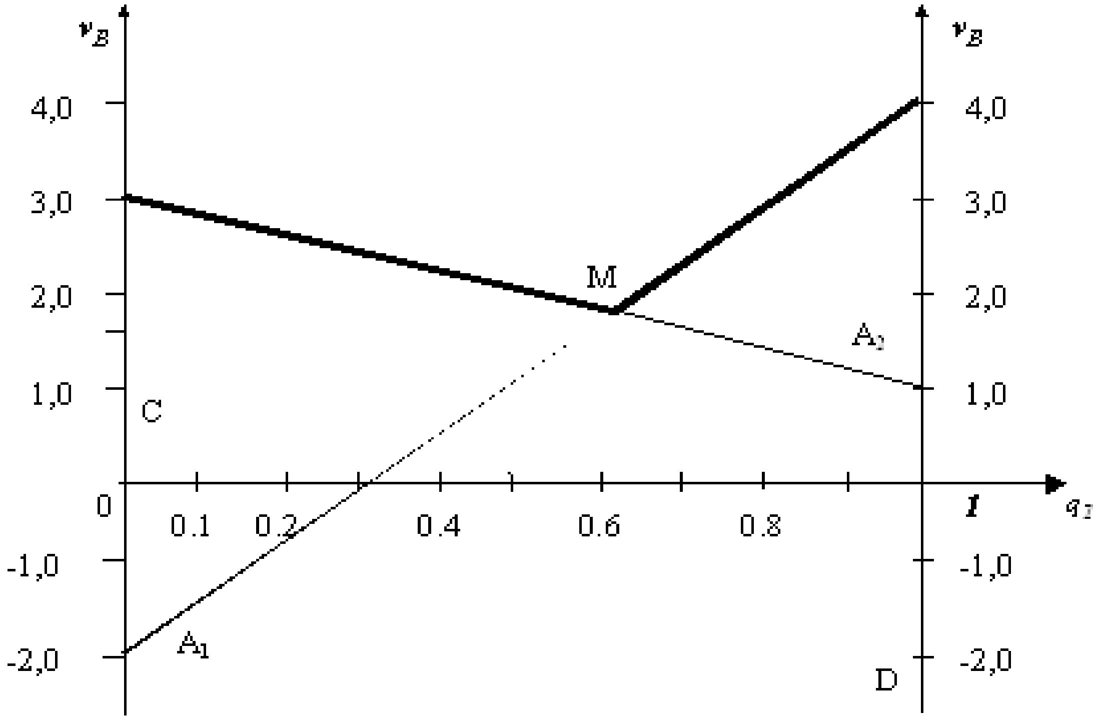


Рис. 12.5. Графічний розв'язок із позиції гравця *B*

Оптимальне рішення, яке визначається точкою *M*, дає рішення:

$$S_B = (0{,}625;\, 0{,}375),\ v = 1{,}75.$$

## 12.6. Зведення гри до задачі лінійного програмування

Для того щоб вирішити матричну гру в змішаних стратегіях, потрібно скласти пряме та двоїсте завдання лінійного програмування. У двоїстій задачі розширена матриця, у якій зберігаються коефіцієнти за змінних у системі обмежень, вільні члени й коефіцієнти за змінних функції цілі, транспонується. При цьому мінімуму функції мети вихідного завдання ставиться у відповідність максимум у двоїстому завданні.

Функція цілі у прямій задачі лінійного програмування:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} x_j \to \max(\min).$$

Система обмежень у прямій задачі лінійного програмування:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1(\ge 1), \quad i=\overline{1,m}, \qquad x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}.$$

Функція цілі у двоїстому завданні:

$$g(y)=\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min(\max).$$

Система обмежень у двоїстому завданні:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge 1(\le 1), \quad j=\overline{1,n}, \qquad y_i \ge 0, \quad i=\overline{1,m}.$$

Оптимальний план прямої та двоїстої задачі лінійного програмування позначимо:

$$x^*=\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)^T, \quad y^*=\left(y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*\right).$$

Лінійні форми для відповідних оптимальних планів позначимо $f(x^*)$і $g(y^*)$, а знаходити їх слід як суми відповідних координат оптимальних планів.

Змішані стратегії першого та другого гравців визначатимуться відповідними ймовірностями:

$$p^*=\left(p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*\right), \quad q^*=\left(q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*\right)^T.$$

Доведено, що ціна гри виражається через лінійні форми оптимальних планів таким чином:

$$v = \frac{1}{f(x^*)} = \frac{1}{g(y^*)},$$

тобто є величиною, оберненою до сум координат оптимальних планів. Звідси: $p^* = v \cdot y^*$, $q^* = v \cdot x^*$, де другі співмножники є векторами. Оптимальні змішані стратегії, як вже було визначено, є векторами. Тому, помноживши число (ціну гри) на вектор (з координатами оптимальних планів), отримаємо вектор.

**Приклад 12.3.** Нехай гра задана платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти оптимальні стратегії та ціну гри.

*Розв'язок.* Оскільки $\alpha = 1$ і не дорівнює $\beta = 3$, то гра не має сідлової точки. У цій грі немає дублюючих і домінувальних стратегій. Отже, гру будемо вирішувати шляхом вирішення пари двоїстих завдань лінійного програмування.

Математичні моделі пари подвійних завдань лінійного програмування матимуть такий вигляд:

| | Пряма задача | Двоїста задача |
|---|---|---|
| Цільова функція: | $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$ | $g = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$ |
| Обмеження: | $\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \ge 1 \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \ge 1 \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \ge 1 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3. \end{cases}$ | $\begin{cases} 1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \le 1 \\ 3 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \le 1 \\ 1 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \le 1 \\ y_j \ge 0, \quad j = 1,2,3. \end{cases}$ |

Ці завдання вирішуються, наприклад, симплекс-методом. Двоїста задача вирішується простіше (не потрібно вводити штучні змінні, що обумовлено типом обмежень). Оптимальне рішення вихідної задачі можна буде безпосередньо отримати з даних симплекс-таблиці для оптимального вирішення двоїстої задачі.

Початкова симплекс-таблиця двоїстої задачі має вигляд:

| БЗ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | Розв'язок | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_4$ | 1 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| $y_5$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | ←ведучий рядок |
| $y_6$ | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| $g$ | –1 | –1 | –1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | ↑ведучий стовпчик | | | | | | | |

Наступні симплекс-таблиці наведені нижче:

| БЗ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | Розв'язок | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_4$ | 0 | $1\frac{2}{3}$ | $2\frac{2}{3}$ | 1 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{2}{3}$ | |
| $y_1$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | |
| $y_6$ | 0 | $2\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | ←ведучий рядок |
| $g$ | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | |
| | ↑ведучий стовпчик | | | | | | | |

| БЗ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | Розв'язок | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_4$ | 0 | 0 | $\frac{9}{4}$ | 1 | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{5}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | ←ведучий рядок |
| $y_1$ | 1 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{3}{8}$ | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | |
| $y_2$ | 0 | 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | |
| $g$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | |
| | ↑ведучий стовпчик | | | | | | | |

Нарешті отримуємо симплекс-таблицю, яка відповідає оптимальному рішенню двоїстої задачі:

| БЗ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | Розв'язок |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_3$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{9}{4}$ | $-\frac{1}{18}$ | $-\frac{5}{18}$ | $\frac{1}{9}$ |
| $y_1$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{9}$ | $\frac{7}{18}$ | $-\frac{1}{18}$ | $\frac{2}{9}$ |
| $y_2$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{9}$ | $-\frac{1}{9}$ | $-\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |
| $g$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{5}{9}$ |

Отримаємо оптимальний розв'язок двоїстої задачі:

$$y_1 = \frac{2}{9},\ y_2 = \frac{2}{9},\ y_3 = \frac{1}{9},\ \max g = \frac{5}{9} \Rightarrow v = \frac{1}{g(y^*)} = \frac{9}{5}.$$

Знайдемо оптимальну змішану стратегію гравця $B$:

$$q_1 = y_1 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5},\ q_2 = y_2 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5},\ q_3 = y_3 \cdot v = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}.$$

Отже, $S_B = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Оптимальне рішення вихідної задачі знаходимо, використовуючи двоїсті оцінки: коефіцієнт за початкової базисної змінної в оптимальному рівнянні прямої задачі дорівнює різниці між правою та лівою частинами обмеження двоїстої задачі, асоційованого із цією початковою зміною.

Отримаємо: $x_1 = \frac{2}{9},\ x_2 = \frac{2}{9},\ x_3 = \frac{1}{9},\ \max f = \frac{5}{9}$.

Звідси знайдемо ймовірність застосування своїх активних стратегій гравцем А:

$$p_1 = x_1 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5},\ p_2 = x_2 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5},\ p_3 = x_3 \cdot v = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}.$$

Отже, $S_A = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

## 12.7. Наближені методи розв’язання матричних ігор

Існують наближені методи розв’язання матричних ігор, наприклад, метод Брауна – Робінсон (метод ітерацій). Ідея його полягає в такому. Розігрується експеримент, у якому гравці ***A*** та ***B*** по черзі застосовують один проти одного свої чисті стратегії. Кожен із гравців прагне збільшити свій виграш, припускаючи, що майбутнє буде схоже на минуле; при цьому вважається, що жоден із них не знає своєї оптимальної стратегії.

Такий принцип призводить до деякої послідовності партій гри, для кожної з яких можна підрахувати наближені оптимальні стратегії кожного з гравців, а також верхню та нижню ціни гри.

Замість того, щоб обчислювати щоразу середній виграш, можна користуватися сумарним за всі попередні ходи виграшем і вибирати ту свою стратегію, коли цей накопичений виграш максимальний.

Доведено, що такий метод збігається: зі збільшенням числа партій середній виграш на одну партію прямуватиме до ціни гри, а частоти застосування стратегій – до їх імовірностей в оптимальних змішаних стратегіях гравців.

Наближену ціну гри визначають як середньоарифметичне між нижньою оцінкою гри $\alpha$, що дорівнює мінімально накопиченому виграшу $\alpha_{\sum\min}$ гравця $A$, поділеному на число кроків $k$, і верхньою ціною гри $\beta$, що дорівнює максимальному сумарному програшу $\beta_{\sum\max}$ гравця $B$, поділеному на $k$:

$$\nu = \frac{\alpha+\beta}{2} \approx \frac{\alpha_{\sum\min}+\beta_{\sum\max}}{2k}.$$

**Контрольні запитання**

1. Що є предметом теорії ігор?
2. За якими ознаками класифікуються ігри в межах теорії ігор?
3. Які ігри називаються стратегічними, статистичними, позиційними?
4. Які ігри називають матричними? Наведіть приклад.
5. Що таке «гра Мора»?
6. Наведіть приклад гри боротьби за ринки.
7. Яка стратегія в матричній грі називається оптимальною?

8. На основі якого принципу базується вибір оптимальної стратегії в матричній грі?

9. Як визначається нижня та верхня ціна матричної гри?

10. Яка точка платіжної матриці називається сідловою? Чи завжди вона існує?

11. Як вирішується матрична гра за наявності сідловок точки в платіжній матриці?

12. Яка гра називається рівноважною?

13. Яка гра називається грою у змішаних стратегіях і коли вона застосовується?

14. У чому полягають аналітичний і графічний методи розв’язання матричної гри у змішаних стратегіях?

15. Як можна звести гру у змішаних стратегіях до задачі лінійного програмування?

16. У чому полягає ідея наближених методів розв’язання матричної гри?

## *Лекція 13.* Позиційні ігри

### 13.1. Позиційні ігри. Загальні відомості

В іграх число гравців може бути більше двох, деякі ходи, можливо, є випадковими, гравці можуть мати по кілька ходів, причому інформація про минуле може змінюватися від ходу до ходу. Такі ігри називаються позиційними, або іграми в розгорнутій формі.

**Приклад 13.1.** Вибори з правом вето.

Нехай три гравці ($N = 3$) вибирають одного із чотирьох ($G = 4$) кандидатів у президенти. Правило вибору таке: починаючи з першого гравця, кожен гравець накладає вето на вибір одного з кандидатів. Єдиний кандидат вважається обраним.

Для кожного з гравців залежно від обраного в президенти кандидата задана функція виграшів $U_i$:

$$U_1 = (5,4,3,7),\ \ U_2 = (6,7,5,4),\ \ U_3 = (3,8,5,4).$$

Таку гру можна представити у вигляді дерева гри (рис. 13.1), де біля гілок поставлені номери кандидатів-претендентів, а на кінцевих вершинах – номер кандидата, що переміг.

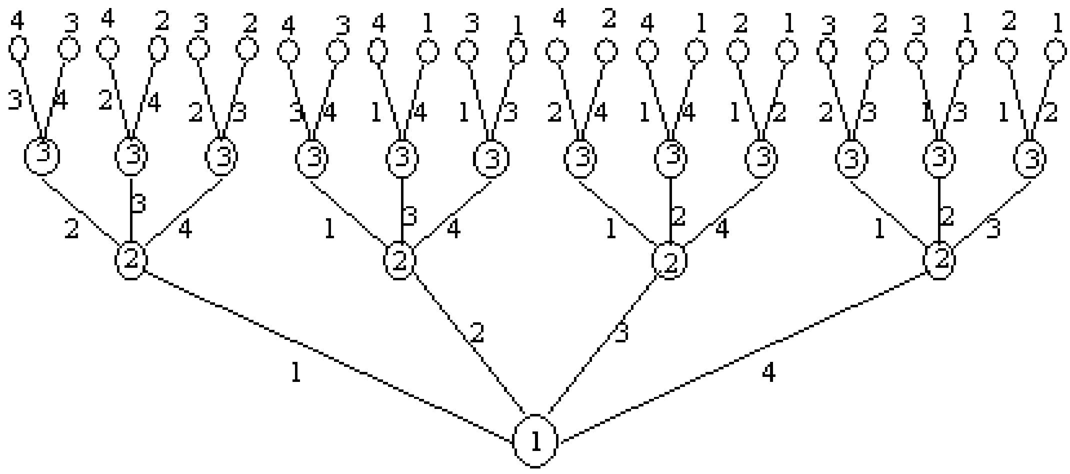


Рис. 13.1. Дерево варіантів вибору

Нехай перший гравець починає і, керуючись функцією виграшу, накладає вето на 3-го кандидата (найменший виграш). Тоді у 2-го гравця вибір становить уже три кандидати: $(1, 2, 4)$. Міркуючи аналогічно, він накладає вето на четвертого кандидата. Природно, що 3-й гравець обере другого кандидата. Тоді виграш третього гравця буде становити 8, а першого і другого –4 і 7 відповідно.

Може бути й інший варіант гри. Перший гравець накладає вето на 2-го кандидата, щоб не допустити максимального виграшу супротивників. Другий гравець хоче отримати максимальний виграш і накладає вето на 4-го кандидата. Третій гравець обирає 3-го кандидата. Тоді виграш третього гравця буде становити 5, а першого і другого –3 і 5 відповідно.

Позиційні ігри повинні включати такі елементи опису:

– послідовність особистих і випадкових ходів гравців;

– вибори, які можуть робити гравці під час кожного особистого ходу;

– результати випадкових ходів і розподіл імовірностей цих результатів;

– інформацію, доступну гравцям під час виконання особистого або випадкового ходу;

– правила закінчення гри та підрахунки виграшу гравців.

Число ходів у цій грі не фіксується. У загальному випадку воно залежить від послідовності вибору, результатів. Однак правила повинні гарантувати, що гра врешті-решт закінчиться.

Стосовно ходів правила гри мають таку структуру: для першого ходу правила вказують його вид; якщо це особистий хід, то правила перераховують можливі варіанти і вказують гравця, який робить вибір; якщо це випадковий хід, то перераховуються можливі варіанти й обумовлюються ймовірності їх вибору.

Для подальших ходів правила визначаються залежно від вибору та результатів попередніх ходів, чи буде хід особистим або випадковим. Якщо хід особистий, то перераховуються можливі варіанти гравця, який робитиме вибір, і визначається інформація про вибори та наслідки щодо перших ходів, якою володіє гравець до моменту свого вибору. Якщо хід випадковий, то перераховуються можливі варіанти і ймовірності їх вибору.

Правила залежно від вибору і результатів у послідовності ходів визначають, коли гра повинна закінчитися, і виграш кожного з гравців.

### 13.2. Задання позиційної гри у вигляді дерева

Дерево гри складається з вершин, з'єднаних між собою гілками. Вершини дерева називають ще позиціями гри, а його гілки – ходами гравця.

Основними властивостями дерева гри є такі:

– дерево містить одну єдину початкову вершину («корінь» дерева), у яку не входить жодна гілка;

– дерево має не менше однієї вершини, з якої не виходить жодна гілка. Ці вершини називаються кінцевими вершинами;

– з кореня дерева є єдиний шлях до кожної з решти вершин дерева.

Вершина відповідає певному стану гри перед черговим ходом. Кожну вершину займає тільки один гравець, і їй присвоюється номер, рівний номеру гравця, який робить вибір.

Вершини, що відповідають випадковим ходам, позначають номером 0. Гілки, що виходять із вершини, зображують вибір, який може бути зроблений гравцем під час цього ходу. Імовірності виконання випадкового ходу записують біля відповідних гілок. Біля кінцевих вершин дерева вказуються результати гри – значення виграшу гравців (а в антагоністичних іграх – виграш першого гравця).

Партія починається з кореня (нижньої вершини). Кожен хід є зміною позиції, відповідним переміщенням з однієї вершини на якусь із сусідніх верхніх вершин. Число гілок у вершини дорівнює числу варіантів ходу. Партія закінчується за досягнення однієї з кінцевих вершин. Залежно від вибору гравців можливо стільки різних партій гри, скільки кінцевих вершин у дерева.

Очевидно, якщо в грі немає випадкових ходів і кожен із гравців вибрав свою стратегію, то результат гри однозначно визначений. Для гри з випадковими ходами результат партії стає випадковою величиною, тому потрібно випадкові виграші замінити їх математичними сподіваннями. Сукупність усіх рішень, які повинен прийняти гравець, можна описати як одне рішення – вибір стратегії, так і сукупність випадкових ходів може бути замінена одним випадковим випробуванням $H$.

Гра, отримана шляхом усереднення випадкових результатів, у повному обсязі еквівалентна вихідній грі, оскільки вона характеризує не окремий результат окремої партії, а середні результати великого числа партій.

Інформація, доступна гравцям, задається інформаційним розбиттям вершин на множини $V_i$, які називаються *класами інформації* або *інформаційними множинами*. Якщо досягнута вершина $V_i$, то гравцеві, який повинен здійснити хід, вказується тільки клас інформації, а не точне положення вершини. Таким чином, до класів інформації можуть входити кілька вершин, нерозпізнаних гравцем, який робить вибір на цьому ході. Гравець не може розрізнити, якій з декількох вершин відповідає стан гри на цей момент часу.

У кресленні дерева гри класи інформації обводять замкненою лінією. Гравець завжди знає, якому класу інформації відповідає стан гри на цей момент, але не знає конкретної вершини цього класу.

Класи інформації (інформаційні множини) повинні відповідати таким вимогам:

1) містити вершини тільки одного гравця;

2) кожна вершина може належати тільки одному класу інформації;

3) вершини класу інформації відповідають тільки одному тимчасовому ходу;

4) з усіх вершин певного класу інформації може виходити тільки однакова кількість гілок.

**Приклад 13.2.** Розглянемо приклад, коли хід гравців визначається на основі підкидання монети.

Перший гравець вибирає один із двох варіантів («ліворуч» або «праворуч»). Хід «ліворуч» оцінюється у 3 бали, а «праворуч» – у 4 бали. Далі кидається жереб (монета), якщо випадає герб, другому гравцеві повідомляється попередній вибір першого гравця. Якщо випадає решка, то другий гравець знає лише, що він перебуває в класі інформації $V_1$, але не знає, у якій з двох вершин.

Клас інформації $V_1$ складається з двох вершин. У тому випадку, коли клас інформації містить тільки одну вершину, маємо гру з повною інформацією (наприклад, гра в шахи). В іграх з неповною інформацією міститься хоча б один клас інформації з числом вершин не менше двох (рис. 13.2).

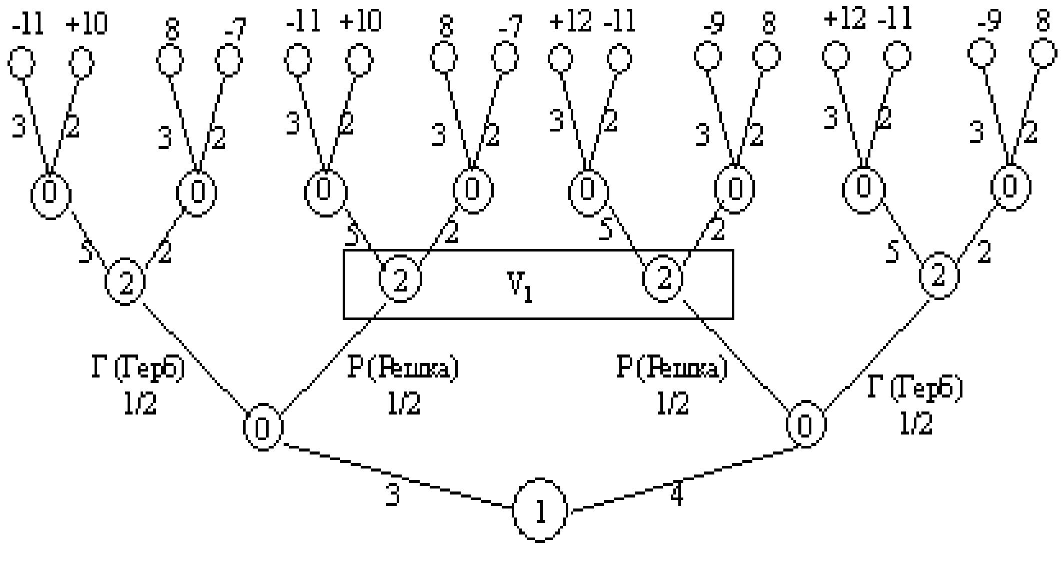


Рис. 13.2. Дерево гри

Другий гравець вибирає один із двох напрямків («ліворуч» або «праворуч»). Хід «ліворуч» оцінюється 5 балами, а «праворуч» – 2. Четвертий хід є знову випадковим і полягає у виборі з рівними можливостями одного з напрямків: «ліворуч» або «праворуч», які оцінюються 3 і 2 балами відповідно. Оскільки ймовірності вибору напрямку у випадковому ході однакові (рівні $1/2$), то на графічному зображенні дерева гри їх можна і не вказувати.

Випадкове випробування $H$ може мати такі наслідки:

$$H = |\ (\Gamma, 3), (\Gamma, 2), (P, 3), (P, 2)\ |$$

з імовірністю $p = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, де Г – означає випадання «герба», Р – «решки», а цифри 2, 3 відповідають випадковому вибору на четвертому ходу.

Числа, вибрані в першому, третьому і четвертому ходах, складаються, і отримана сума сплачується другим гравцем першому, якщо вона парна, в іншому випадку перший гравець платить другому.

Простори всіх можливих стратегій гравців $S_1$ і $S_2$ в розглянутому прикладі такі:

$$S_1 = \{(3), (4)\},$$
$$S_2 = \{(3,\Gamma,5), (3,\Gamma,2), (3,P,5), (3,P,2), (4,\Gamma,5), (4,\Gamma,2), (4,P,5), (4,P,2)\},$$

де в просторі $S_2$ перше число відповідає вибору першого гравця, друге – випаданню герба («Г») або решки («Р»). Третє – вибору другим гравцем п’ятірки або двійки. Очевидно, що якщо в грі немає випадкових ходів і кожен із гравців вибрав свою стратегію, то результат гри однозначно визначено.

## 13.3. Позиційна гра з повною інформацією

Вирішення позиційної гри з повною інформацією спирається на теорему Куна (теорема про необхідні умови вирішення задач нелінійного програмування), яка стверджує, що гру можна розв’язати за домінуванням, тобто для кожного з гравців є домінуючі стратегії, які і потрібно застосовувати.

Розглянемо описану вище гру «Вибори з правом вето» для 3 гравців. Оскільки з усіх вершин, що передують кінцевим, ходить гравець 3, інші гравці, знаючи його функцію виграшу $U_3$, можуть легко передбачити його рішення (рис. 13.3).

Рис. 13.3. Дерево гри «Вибори з правом вето» з урахуванням ходу третього гравця

Оскільки в новому дереві третій гравець вже не приймає рішення, то фінальна вершина визначається ходами другого гравця. Перший гравець, знаючи функцію виграшів $U_2$, може передбачити поведінку другого гравця. У підсумку отримаємо гру з одним учасником – першим гравцем (рис. 13.4).

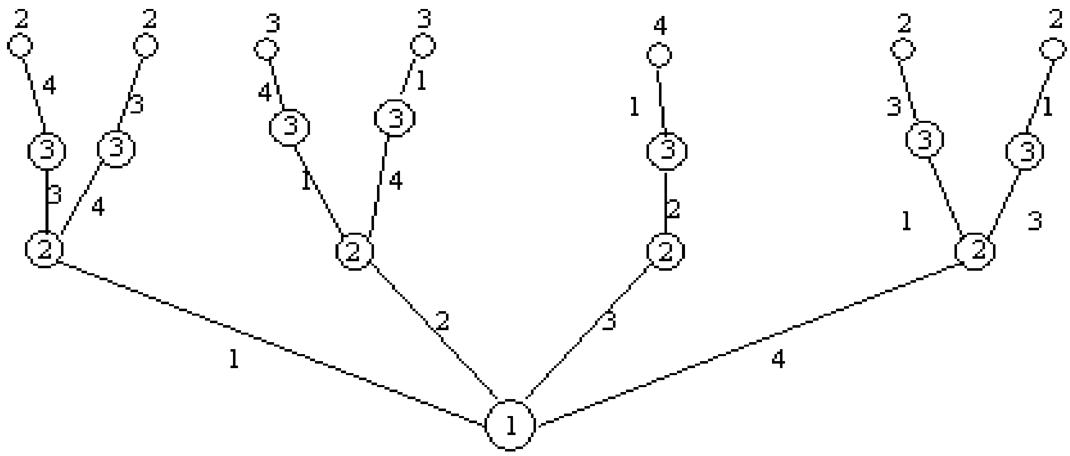

Рис. 13.4. Дерево гри «Вибори з правом вето» з урахуванням ходу другого гравця

Оскільки для першого гравця бажана перемога 4-го претендента, він відхиляє 3-го. Далі, другий гравець буде змушений відхилити 2-го претендента, а третій – 1-го. Виграші гравців у такій грі становитимуть 7, 4 та 4 відповідно.

Отже, алгоритм вирішення позиційної гри з повною інформацією полягає в тому, що, починаючи з останнього ходу, послідовно відкидаються явно гірші виграші. Тож отримаємо гру в чистих стратегіях.

### 13.4. Приведення гри до нормальної форми

Нормалізація – це процес зведення позиційної гри до матричної гри двох гравців із нульовою сумою.

Будь-яку позиційну гру можна звести до гри в нормальній формі, у якій кожен із гравців робить лише по одному незалежному ходу. Для нормалізації гри потрібно перерахувати всі можливі стратегії гравців і для кожної сукупності стратегій визначити виграш гравців.

Розглянемо процес нормалізації позиційної гри на конкретному прикладі.

Нехай гра задана деревом, показаним на рис. 13.5. Перший гравець робить свій перший хід, вибираючи праву чи ліву гілку. Потім хід робить другий гравець, у якого в кожній вершині також є два вибори, після чого гра закінчується.

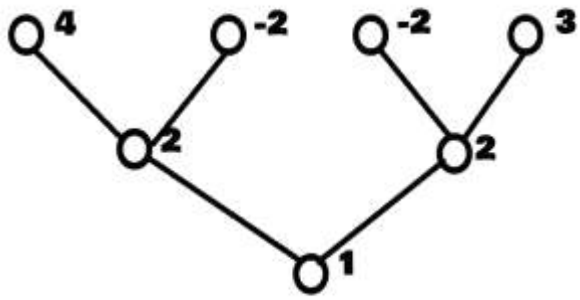

Рис. 13.5. Дерево гри

У цій грі в першого гравця (гравця $A$) є дві чисті стратегії:

$$S_1 = \{A_1, A_2\},$$

де стратегія $A_1$ – завжди вибирати ліву гілку; стратегія $A_2$ – завжди вибирати праву гілку. Другий гравець (гравець $B$) має більше стратегій:

$$S_2 = \{B_1, B_{,2}, B_3, B_4\},$$

де стратегія $B_1$ – завжди вибирати ліву гілку; стратегія $B_2$ – завжди вибирати праву гілку; стратегія $B_3$ – вибирати гілку, яку вибрав гравець $A$; стратегія $B_4$ – вибирати гілку, протилежну тій, що вибрав гравець $A$.

Матриця гри в цьому випадку має вигляд:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | –2 | 4 | –2 |
| $A_2$ | –2 | 3 | 3 | –2 |

Видно, що для матриці гри існує сідлова точка:

$$v_{нижня} = v_{верх} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = -2.$$

Отже, гра має розв'язок у чистих стратегіях:

$$S_A = \{1{,}0\} \text{ або } S_A = \{0{,}1\},\ S_B = \{0{,}0{,}0{,}1\}, \text{ ціна гри } v = -2.$$

Тепер нехай другому гравцю не повідомляється вибір, зроблений першим гравцем. Тоді в дереві гри на другому ході з'являється клас інформації $V_1$, що містить дві вершини другого гравця (рис. 13.6).

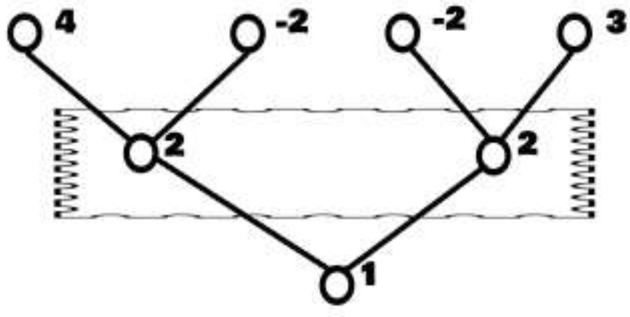


Рис. 13.6. Дерево гри з невизначеністю

Кількість чистих стратегій другого гравця порівняно з першим випадком скоротиться до двох:

$$S_2 = \{B_1, B_2\},$$

де $B_1$ – завжди вибирати ліву гілку; $B_2$ – завжди вибирати праву гілку.

Процес нормалізації призводить до такої платіжної матриці:

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | –2 |
| $A_2$ | –2 | 3 |

Матриця цієї гри вже не має сідловок точки, отже, гра розв'язується у змішаних стратегіях:

$S_A = \{5/11, 6/11\}$, $S_B = \{5/11, 6/11\}$, ціна гри $v = 8/11$.

Зменшення інформації, що відбулося для другого гравця на момент ухвалення рішення, призвело до зменшення його виграшу з 2 до $-8/11$.

Отже, для нормалізації позиційної гри потрібно:

– перерахувати всі можливі стратегії кожного з гравців (у таких іграх, як шахи, це поки нерозв'язне завдання);

– визначити результати гри за всіх можливих поєднань стратегій гравців (вибори стратегій робляться гравцями одночасно й незалежно).

Залежно від кількості гравців, а також значень їх виграшів шляхом нормалізації позиційні ігри можна звести до матричної або безкоаліційної, зокрема біматричної, гри.

## 13.5. Нескінченні антагоністичні ігри

Якщо множина чистих стратегій хоча б одного з гравців нескінченна, то гра називається нескінченною. Для нескінченних ігор застосовується більш складний математичний апарат. Лінійно-алгебраїчні рівняння замінюються функціонально-аналітичними, інтегральними рівняннями, які у сприятливих випадках зводяться до систем диференціальних рівнянь. Але принципом оптимальної поведінки гравців лишається принцип «максиміна».

**Приклад 13.3.** Гра «Боротьба за ринки».

Нехай одна з фірм (гравець *А*) намагається витіснити з одного з ринків збуту іншу фірму (гравець *В*), яка має два ринки. Загальна сума коштів, що виділяються для цього гравцем *А*, дорівнює одиниці ($X \in [0,1]$). Стратегії гравця *А* полягають у розподілі цих коштів між двома ринками. Якщо на перший ринок іде сума $x$, то на другий – $1-x$. Нехай гравець *В* для утримання ринків також має у своєму розпорядженні одиничну суму коштів $Y \in [0,1]$ і його стратегія полягатиме у виділенні суми на перший ринок $y$, то на другий – $1-y$.

Вважається, що гравець *А*, домігшись переваги коштів на одному з ринків, витісняє свого супротивника із цього ринку й отримує виграш, рівний надлишку своїх коштів, який береться з коефіцієнтом, що характеризує важливість ринку (нехай цей коефіцієнт дорівнює $k_1$ для першого ринку та $k_2$ – для другого).

Розглянута гра є грою на одиничному квадраті. У цій грі пара чисел $(X,Y)$, $X,Y \in [0,1]$ є точками одиничного квадрата.

Функцію виграшу можна визначити як:

$$H(x,y)=\begin{cases} k_1(x-y),\ x \ge y \\ k_2(x-y),\ x \le y \end{cases},\ k_1>0,\ k_2>0.$$

*Розв'язок.* Для деякого початкового значення $X=x_0$ побудуємо графік залежності $H(x_0,y)$ (рис. 13.6).

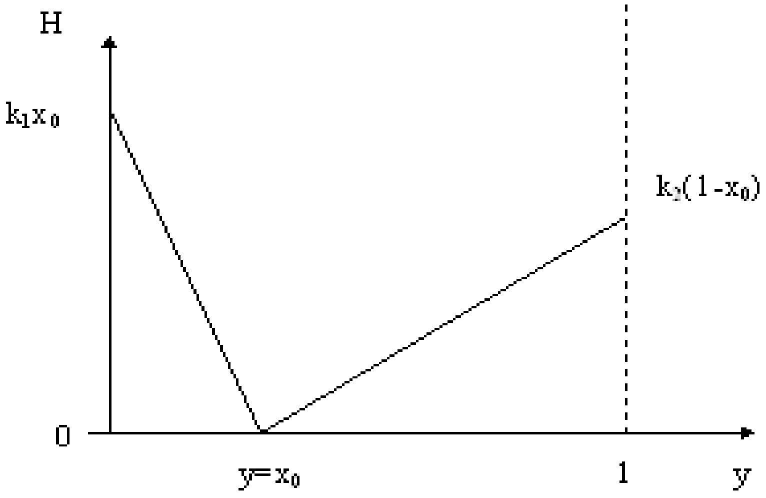


Рис. 13.6. Графік функції виграшу $H(x_0, y)$

Видно, що для будь-яких значень $x_0$ функція $H(x_0, y)$ є опуклою, отже:

$$\max H(x, y) = \max\left\{\max_{x \geq y} k_1(x-y), \max_{x \leq y} k_2(x-y)\right\} = \max\{k_1(1-y), k_2(y)\}.$$

Ціна гри становитиме:

$$v = \min_y \max_x H(x, y) = \min_y \max_x \{k_1(-y), k_2(y)\}.$$

Графік функції $\max_x \{k_1(-y), k_2(y)\}$ на рис. 13.7 виділено жирною лінією.

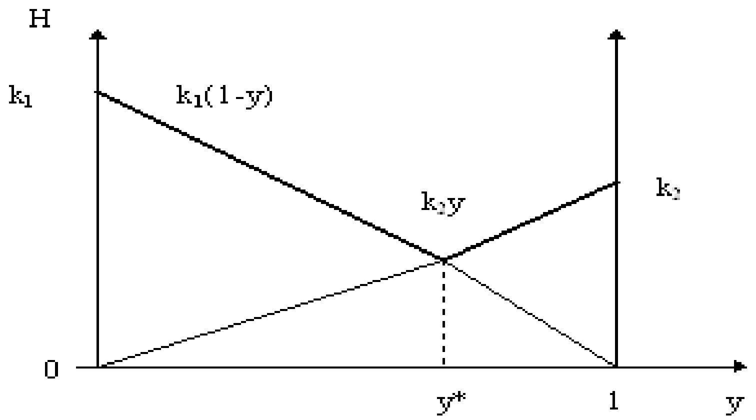


Рис. 13.7. Графік функції $\max_x \{k_1(-y), k_2(y)\}$

Перший член під знаком максимуму зі зростанням зменшується, а другий – зростає. Тому за малих значень максимум досягається на відрізку $k_1(1-y)$, а за великих – на відрізку прямий $k_2(y)$. Отже, мінімальне значення цей максимум набуває за такого $y*$, для якого

$$k_1(1-y*)=k_2(y*)\Rightarrow y*=\frac{k_1}{k_1+k_2},$$

де $y*$ є єдиною чистою оптимальною стратегією гравця *B*. Вона полягає в розподілі наявних коштів між ринками пропорційно важливості ринків. Значення ціни гри:

$$v=\min_y \max_x H(x,y)=\max_x H(x,y*)=$$

$$=\max_x\left\{h_1\left(1-\frac{k_2}{k_1+k_2}\right),\frac{k_2k_1}{k_1+k_2}\right\}=\frac{k_2k_1}{k_1+k_2}.$$

Далі знайдемо оптимальну стратегію гравця *A*. Випадки $X\geq y*$ та $X\leq y*$ розглядатимемо окремо.

Існує теорема, що стверджує, що якщо $H(x,y)$ – опукла і $0\leq y*\leq 1$, то серед оптимальних стратегій гравця *A* знайдеться така, яка є сумішшю двох активних стратегій $x'$, $x''$, і для цих стратегій виконуються нерівності:

$$\frac{\partial H(x',y*)}{\partial y}\geq 0,\ \frac{\partial H(x'',y*)}{\partial y}\leq 0.$$

При цьому стратегії виконуються з ймовірностями $p$ і $1-p$, де $p$ визначається з рівняння:

$$p\frac{\partial H(x',y*)}{\partial y}+(1-p)\frac{\partial H(x'',y*)}{\partial y}=0.$$

Для випадку $X\geq y*$ отримаємо:

$$k_1\left(x-\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)=\frac{k_2k_1}{k_1+k_2}\Rightarrow x'=1.$$

Для випадку $X\leq y*$ матимемо:

$$k_2\left(\frac{k_1}{k_1+k_2}-x\right)=\frac{k_2k_1}{k_1+k_2}\Rightarrow x'=1\Rightarrow x''=0.$$

Отже, активними стратегіями гравця $A$ виявляються: $x' = 0$ і $x'' = 1$.Тому гравець $A$ повинен застосовувати змішану стратегію, яка є сумішшю цих двох активних стратегій. Для знаходження ймовірності $p$ використовуємо похідні:

$$\frac{\partial H(0,y)}{\partial y}\Big|_{y=y*} = \frac{\partial k_2 y}{\partial y}\Big|_{y=y*} = k_2 > 0,$$

$$\frac{\partial H(1,y)}{\partial y}\Big|_{y=y*} = \frac{\partial k_1(1-y)}{\partial y}\Big|_{y=y*} = -k_1 \le 0.$$

Тоді рівняння для знаходження ймовірностей матиме вигляд:

$$pk_2 + (1-p)(-k_1) = 0 \Rightarrow p = \frac{k_1}{k_1 + k_2}.$$

Таким чином, оптимальна стратегія гравця $A$ полягає в концентрації всіх коштів на одному з ринків, причому ймовірність вибору ринку обернено пропорційна його важливості. Цей результат пояснюється просто: чим важливіший ринок, тим більше коштів вкладе супротивник у його збереження і тим менше вільних коштів залишиться на ньому після його витіснення, тож тим меншою буде перемога над ним.

**Контрольні запитання**

1. Які ігри називаються позиційними?
2. Як класифікують позиційні ігри?
3. Що повинен містити опис позиційної гри?
4. Яку структуру мають правила позиційної гри?
5. Яким принципом оптимальності керуються для вирішення позиційної гри?
6. Як будується дерево гри?
7. Побудуйте дерево гри «орел – решка».
8. Як виконується розв'язання гри на основі дерева гри?
9. У чому полягає відмінність між позиційними іграми з повною та неповною інформацією?
10. Що таке нормалізація гри?
11. Що таке нескінченні позиційні ігри? Наведіть приклад.
12. Опишіть гру «боротьби за ринки».

## *Лекція 14.* Сучасні інтелектуальні методи прийняття рішень

У ряді завдань ПР, залежно від їх складності, вирішення звичайними аналітичними методами неможливе. Це пояснюється такими причинами:

– не всі цілі управління об'єктом можуть бути виражені у вигляді кількісних співвідношень;

– між рядом параметрів, що впливають на процес прийняття рішень, не вдається встановити точних кількісних залежностей;

– процес прийняття рішень є багатокроковим, і зміст кожного кроку не може бути однозначно визначено;

– існуючі способи опису об'єктів і процесів, що протікають у них, призводять до настільки громіздких конструкцій, що їх практичне використання неможливе.

У цих випадках методи штучного інтелекту дають змогу краще впоратися з неповнотою інформації та відсутністю визначеності.

Такі об'єкти називають по-різному: погано визначені чи слабко структуровані, організаційні, наприклад економічні та соціальні об'єкти. Але незалежно від назви вони мають ряд власних властивостей.

Досягнення в галузі інформаційних технологій, зокрема у штучному інтелекті, викликали появу нових методів прийняття рішень, управління й оптимізації складних систем. Сучасна інтелектуальна інформаційна технологія включає такі основні напрями:

1) нейромережні алгоритми обробки інформації та нейрокомп'ютери;

2) еволюційні (генетичні) алгоритми;

3) системи, що реалізують методи, засновані на знаннях;

4) обробка нечіткої інформації та нечіткий висновок;

5) багатоагентні системи як розпаралелювання пошуку й обробки інформації в інтелектуальних системах.

*Штучні нейронні мережі* застосовуються для вирішення цілого класу завдань, де застосовуються не рівняння, що описують функціонування об'єкта, і правила, як у традиційних експертних системах, а досвід. Нейронні мережі мають здатність до узагальнення інформації, навчання й самонавчання на основі власного досвіду функціонування тощо. В інтелектуальних компонентах складних систем, у тому числі гібридних інтелектуальних систем (ГІС), застосовуються кілька типів штучних нейронних мереж: багатошаровий перцептрон, мережа Кохонена, мережа Хопфілда та ін. Ці моделі використовуються для автоматизації прийняття рішень у таких ситуаціях:

– коли неможливо побудувати алгоритм або логічне обчислення через складність обліку всіх поєднань факторів;

– коли складно формалізувати закономірності, що пов'язують умови завдання з результатом.

Як сферу практичного застосування нейромереж в інтелектуальних компонентах ГІС можна вказати системи штучного зору й обробки зображень, системи аерокосмічної зйомки, підсистеми автоматизації планування дій у моніторингових системах і системах попередження надзвичайних ситуацій.

*Системи, що ґрунтуються на знаннях*. Системи, що базуються на знаннях, оперують з логічними, об'єктно-орієнтованими й іншими моделями, що базуються на знаннях експертів. Водночас вони можуть використовувати і традиційні алгоритми, що базуються на рівняннях динаміки.

До систем, заснованих на знаннях, належать такі:

– системи, що ґрунтуються на правилах;

– системи, в основі яких лежать моделі у вигляді семантичних мереж різного роду та фреймів;

– системи, засновані на автоматичному доказі теорем;

– системи, засновані на автоматичному породженні гіпотез;

– системи, що ґрунтуються на міркуваннях за аналогією;

– системи, що реалізують об'єктно-орієнтоване виведення.

Основним механізмом інтелектуалізації в системах, заснованих на знаннях, є той чи інший механізм міркувань. Знання подаються за допомогою логічних мов або мов представлення знань. Обробка знань здійснюється спеціальними інструментальними засобами. За результатами обробки отримують краще рішення, вибране з множини допустимих рішень.

*Об'єктно-орієнтовані інтелектуальні системи* використовують декларативно-процедурні форми подання знань і алгоритми виведення властивостей об'єктів на підставі ієрархічних, мережних, фреймових та інших представлень відношень між об'єктами, описаними функціонально, морфологічно, атрибутивно тощо. Для цієї мети найчастіше використовують об'єктно-орієнтовані мови програмування та спеціальні мови представлення знань.

*Багатоагентні системи* (БАС) – це один із наймолодших напрямів інтелектуальних інформаційних технологій, що сформувався у 90-ті роки XX століття. Завдання розпаралелювання пошуку й обробки інформації стало актуальним з появою таких сховищ даних, як корпоративні сховища або Інтернет. Основу багатоагентних систем становлять автономні агенти – програмні агенти, здатні сприймати ситуацію, приймати рішення та взаємодіяти з іншими агентами. Ці інтелектуальні можливості докорінно відрізняють БАС від жорстко організованих програмних систем, забезпечують здатність до самоорганізації. При цьому окремі автономні частини програми – агенти – отримали можливість самостійно приймати рішення, встановлювати угоди про те, як вирішуватиметься завдання, і можуть вступати в різні відносини між собою, ініціювати діалог із користувачем. Можна вказати такі сфери застосування БАС: інтелектуальний пошук інформації (баз даних) у мережі Інтернет, підтримка проєктування бізнес-процесів, проєктування віртуальних підприємств, складання розкладів.

Розглянемо більш детально системи, що базуються на генетичних алгоритмах і нечіткому виведенні.

## 14.2. Поняття генетичного алгоритму

Генетичний алгоритм (ГА) – це насамперед еволюційний алгоритм, тобто основна фішка алгоритму схрещування (комбінування). Ідею алгоритму запозичено у природи. Генетичний алгоритм є алгоритмом спрямованого пошуку. На відміну від алгоритму повного перебору, що розглядає всі можливі варіанти рішення, алгоритм спрямованого пошуку прагне знайти окіл оптимального рішення. Отже, рішення займе менше часу, ніж у разі перебору варіантів потенційних рішень.

Однак практика використання генетичних алгоритмів для вирішення *NP*-повних завдань має свої труднощі, що виникають унаслідок прагнення алгоритму спрямованого пошуку до локально оптимального рішення. Ця проблема випливає з відсутності інформації в алгоритму локальності або глобальності виявленого оптимуму, через що алгоритми спрямованого пошуку не гарантують глобального оптимального рішення.

Ідея алгоритму полягає в тому, що шляхом перебору та, найголовніше, відбору виходить правильна «комбінація». Алгоритм ділиться на три етапи:

– схрещування;

– селекція (відбір);

– формування нового покоління.

Для застосування ГА потрібно:

– виділити сукупність властивостей об’єкта, що характеризуються внутрішніми параметрами і впливають на його корисність, тобто виділити множину керованих параметрів $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, серед $x_i$ можуть бути величини різних типів (real, integer, Boolean, enumeration). Наявність нечислових величин (enumeration) обумовлює можливість розв’язання задач як параметричної, а й структурної оптимізації;

– сформулювати кількісну оцінку корисності варіантів об’єкта – функцію корисності $F$. Якщо у вихідному вигляді завдання багатокритеріальне, то таке формулювання означає вибір скалярного (узагальненого) критерію;

– розробити математичну модель об’єкта, що є алгоритмом обчислення $F$ для заданого вектора $X$;

– подати хромосоми у формі вектора $X$ (рис. 14.1).

| $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | … | $X_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | 0 |

Рис. 14.1. Приклад представлення хромосоми

У ГА використовується така термінологія:

– ген – керований параметр;

– алель – значення гена;

– локус (позиція) – позиція, яку займає геном у хромосомі;

– генотип – екземпляр хромосоми, генотип є сукупністю внутрішніх параметрів проєктованого за допомогою ГА об’єкта;

– генофонд – множина всіх можливих генотипів;

– функція корисності (пристосованості) – цільова функція;

– фенотип – сукупність значень критеріїв, отриманих після декодування хромосоми, під фенотипом часто розуміють сукупність вихідних параметрів об’єкта, що синтезується за допомогою ГА.

Обчислювальний процес складається з двох вкладених циклів. Зовнішній цикл починається з генерації вихідного покоління – множини, що включає $N$ хромосом, $N$ – розмір популяції. Генерація виконується випадковим вибором алелів кожного гена.

Далі організується циклічний процес зміни поколінь. До кожного кроку зовнішнього циклу генетичного алгоритму виконується внутрішній цикл, у якому формуються екземпляри нового (наступного за поточним) покоління. У внутрішньому циклі повторюються оператори:

– вибору батьків,

– кросовера батьківських хромосом,

– мутації,

– оцінки пристосованості нащадків,

– селекції хромосом для включення до чергове покоління.

***1. Вибір батьків***

Оператор імітує природний відбір (відбір у батьківську пару хромосом із найкращими значеннями функції корисності $F$ є вірогідніший). Наприклад, нехай потрібно мінімізувати $F$. Тоді ймовірність $p_1$ вибору батька з хромосомою $C_i$ розраховується за формулою:

$$p_i = \frac{F_{\max} - F_i}{\sum_{j=1}^{N}\left(F_{\max} - F_j\right)}, \tag{14.1}$$

де $F_{\max}$ – найбільше значення цільової функції $F$ серед екземплярів (членів) поточного покоління, $F_i$ – значення цільової функції $i$-го екземпляра. Правило (14.1) називають правилом колеса рулетки. Якщо в колесі рулетки виділити сектори, пропорційні значенням $F_{\max} - F_i$, то ймовірності попадання в них становлять $p_i$.

**Приклад 14.1.** Нехай $N = 4$. Значення цільових функцій $F_i$ та ймовірності вибору батьків $p_i$ наведені в табл. 14.1.

*Таблиця 14.1*

Імовірності попадання в інтервал $F_{\max} - F_i$

| $i$ | $F_i$ | $F_{\max} - F_i$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 0,5 |
| 2 | 7 | 0 | 0 |
| 3 | 6 | 1 | 0,1 |
| 4 | 3 | 4 | 0,4 |

***2. Кросовер (схрещування)***

Кросовер, іноді званий кросинговером, полягає в передачі ділянок генів від батьків до нащадків. У разі простого (одноточкового) кросовера хромосоми батьків розриваються в деякій позиції, однаковій для обох, вибір місця розриву рівноймовірний, далі відбувається рекомбінація частин батьківських хромосом.

***3. Мутації***

Оператор мутації виконується з певною ймовірністю $p_m$, тобто з імовірністю $p_m$ відбувається заміна алеля випадковим значенням, що вибирається з рівною ймовірністю в області визначення гена. Саме завдяки мутаціям розширюється сфера генетичного пошуку.

***4. Селекція***

Після кожного кроку генерації пари нащадків у нове покоління включається найкращий екземпляр пари.

Внутрішній цикл закінчується, коли кількість екземплярів нового покоління дорівнюватиме $N$. Кількість повторень $G$ зовнішнього циклу найчастіше визначається автоматично з появою ознак виродження (стагнації) популяції, але за умови неперевищення заданого ліміту машинного часу (рис. 14.2).

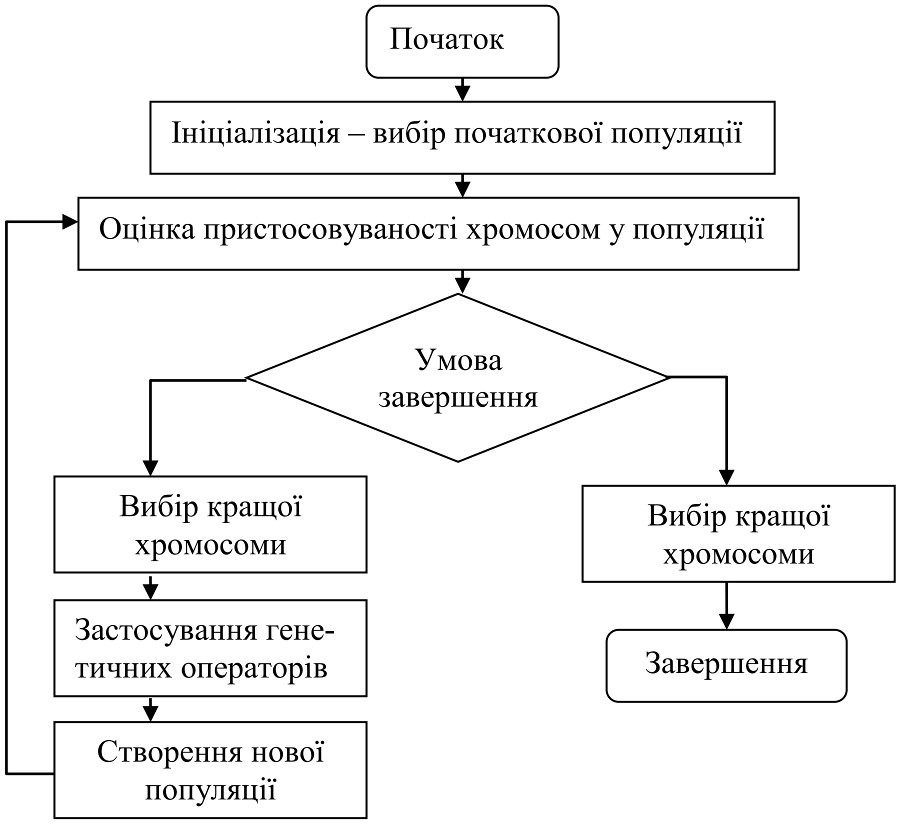


Рис. 14.2. Схема генетичного алгоритму

**Приклад 14.2.** Розв'яжемо задачу генетичним алгоритмом на прикладі пошуку об'єкта з максимальним числом одиниць. Нехай об'єкт складається з 10 генів. Задамо первинну популяцію в кількості восьми об'єктів. Очевидно, найкращим об'єктом має бути 1111111111.

• *Ініціалізація*. Виберемо 8 випадкових об'єктів $N = 8$ (табл. 14.2).

• *Оцінка пристосованості*. Очевидно, у нашому генетичному алгоритмі функція придатності $F$ підраховуватиме кількість одиниць у кожному об'єкті. Таким чином, маємо: $F_i = \{6,6,7,3,4,5,7,3\}$.

• З таблиці видно, що об'єкти 3 і 7 мають найбільше одиниць, отже, є найбільш підходящими членами популяції для вирішення задачі. Оскільки на цей момент рішення необхідної якості немає, алгоритм продовжує роботу. Потрібно провести селекцію. Нехай селекція відбувається випадковим чином, і ми отримуємо вибірку об'єктів $\{1,2,3,4,7\}$ – це батьки для нової популяції.

• Використання генетичних операторів. Припустимо, що можливість мутацій дорівнює 0. Тобто всі 8 об'єктів передають свої гени такими, які є.

*Таблиця 14.2*

Початкова популяція

| Об’єкт | Гени | | | | | | | | | | Оцінка |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $F_i$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 7 |
| 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 7 |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |

Для проведення схрещування складемо пари об’єктів випадковим чином: (2, 7), (1, 7), (3, 4) і (3, 7). Також випадковим способом вибираються точки схрещування кожної пари (табл. 14.3).

*Таблиця 14.3*

Результати схрещувань

| Пара | 2 | | | | | | | | | | | 7 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Точка схрещування 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Батьки | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Нащадки | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| Пара | 1 | | | | | | | | | | | 7 | | | | | | | | | |
| | Точка схрещування 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Батьки | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Нащадки | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Пара | 3 | | | | | | | | | | | 4 | | | | | | | | | |
| | Точка схрещування 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Батьки | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Нащадки | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| Пара | 3 | | | | | | | | | | | 7 | | | | | | | | | |
| | Точка схрещування 8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Батьки | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Нащадки | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Запишемо нову популяцію (табл. 14.4).

*Таблиця 14.4*

Нова популяція

| Об’єкт | Гени | | | | | | | | | | Оцінка |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $F_i$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 7 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 7 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 8 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 6 |

Як бачимо, нова популяція має кращі показники пристосування. У першій популяції загалом на кожного об’єкта припадало 5,375 одиниці, у нащадків – 6,25 одиниці на об’єкт. Процедуру можна продовжувати до отримання потрібних результатів або вичерпування модельного часу.

## 14.3. Порядок застосування генетичного алгоритму

Застосування генетичного алгоритму є досить складною задачею, яка складається з таких кроків:

1) визначення способу представлення (алфавіту);
2) визначення оператора випадкових змін;
3) визначення виживання осіб;
4) генерація первинної популяції.

Алфавіт кодування для елементів множини рішень або популяції повинен бути досить гнучким, щоб одночасно давав можливість здійснювати необхідні операції випадкових перестановок і оцінювати пристосованість елементів, як початкових, так і через їх зміни. Доведено, що створити ідеальний алфавіт неможливо, тому це один із найскладніших етапів забезпечення стабільності генетичного алгоритму.

Не менш складним є визначення операторів зміни та створення нащадків. Існує безліч операторів, які здатні виконувати потрібні дії.

Наприклад, з біології відомо, що кожен вид може розмножуватися двома способами: статевим (схрещуванням) і безстатевим (мутаціями). У першому випадку батьки обмінюються генетичним матеріалом, у другому – відбуваються мутації, визначені внутрішніми механізмами організму та зовнішнім впливом. Крім того, можна використовувати неіснуючі в живій природі моделі розмноження. Наприклад, використовувати гени трьох і більше батьків. Для мутації також може бути закладений різноманітний механізм.

Існує багато способів у генетичному алгоритмі і для селекції. Як показує практика, правило «виживання найбільш пристосованого» далеко не завжди виявляється найкращим. Під час вирішення складних технічних проблем часто виявляється, що найкраще рішення випливає з багатьох середніх і навіть гірших. Тому часто прийнято використовувати ймовірнісний підхід, який свідчить, що найкраще рішення має більше шансів на виживання.

Останній етап забезпечує гнучкість роботи алгоритму, якої немає в інших. Первинну популяцію рішень можна задати як з будь-яких відомих даних, так і цілком випадковим чином простою перестановкою генів всередині особин і створенням випадкових особин. Однак завжди варто пам’ятати, що від початкової популяції багато в чому залежить ефективність алгоритму.

## 14.4. Приклади постановки завдань для генетичного алгоритму. Задача компонування

Сутністю завдання компонування може бути розподіл робіт за виконавцями, розподіл обладнання по приміщеннях, розподіл прикладного програмного забезпечення та баз даних по підмережах віртуальної локальної обчислювальної мережі, розробка схеми навчального навантаження тощо. Це завдання ще називають завданням про упакування рюкзака.

Розглянемо завдання компонування обладнання. Зокрема, це може бути завдання розміщення мікросхем за модулями (платами або типовими елементами заміни), модулями по панелях, панелями по шафах радіоелектронної апаратури або приладами по стендах тощо.

Нехай завдання характеризується такими вихідними даними:

$P = \{P_i\}_{i=\overline{1,n}}$ – множина елементів (конструктивів);

$B = \{B_j\}_{j=\overline{1,m}}$ – множина блоків;

$C = \{C_{ik}\}$ – множина зв'язків, зв'язок з'єднує елементи $P_i$ та $P_k$.

$D$ – матриця розміру $n \times n$, елемент якої $D_{ik}$ дорівнює числу зв'язків між елементами $P_i$ і $P_k$.

Опишемо множину альтернатив $A$. Вона представляється матрицею $X$ розміру $m \times n$, елемент якої:

– $X_{ji} = 1$, якщо конструктив включено до блоку $B_j$,

– $X_{ji} = 0$ інакше.

Деякий розподіл одиниць і нулів по клітинам матриці $X$ представляє одне конкретне компонування, тобто одне проєктне рішення. Але тільки такі варіанти розподілу 1 і 0 по клітинам матриці $X$ допустимі, які задовольняють наступним обмеженням:

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ji} = 1 \text{ для кожного конструктиву } P_i, \tag{14.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ji} \le V_{\max} \text{ для кожного блоку } B_j, \tag{14.3}$$

$V_{\max}$ – максимальна кількість елементів, що вміщуються в один блок.

Перша умова говорить про те, що елемент може бути поміщений лише в один блок. Друга умова – про обмежений обсяг блоків.

Загалом у завданнях компонування може бути кілька критеріїв. В окремому випадку використовується єдиний критерій – число зв'язків між блоками. Число таких зв'язків потрібно мінімізувати.

Для обчислення критерію застосовують таку модель.

Формуються матриці $Y = X \times P$ та $W = Y \times X^T$. Матриця $Y$ розміру $m \times n$ є матрицею зв'язків блоків і конструктивів, елемент цієї матриці $y_{ji}$ дорівнює числу зв'язків $j$-го блоку з $i$-м конструктивом. Матриця $W$ має розмір $m \times m$, її елемент $W_{pq}$ дорівнює числу зв'язків між блоками $B_p$ і $B_q$, $X^T$ – транспонована матриця. Оскільки число міжблокових (зовнішніх) зв'язків дорівнює загальному числу зв'язків мінус число внутрішніх зв'язків $K$, то цільовою функцією, що підлягає максимізації, можна вважати сумарне число внутрішніх зв'язків, тобто функцію:

$$K(X) = \sum_{j=1}^{m} W_{pp}(X). \quad (14.4)$$

Таким чином, завдання компонування представлене як завдання дискретного математичного програмування із цільовою функцією (14.4), обмеженнями (14.2), (14.3) та множиною керованих параметрів.

Аналогічним чином формулюють низку інших завдань структурного синтезу.

У разі вирішення завдання компонування генетичним методом хромосома може мати таку структуру – гени відповідають конструктивам, значення гена є номер блоку, у який уміщено конструктив.

Із застосуванням методу комбінованих евристик (HCM) декомпозиція загального завдання призводить до локальних підзадач, у кожній з яких вибирається один із нерозподілених конструктивів і призначається в один із блоків.

Потрібно сформулювати правила вибору $S_i$ в кожній підзадачі конструктиву $Q_k$ та правила вибору блоку для нього. Кожна евристика передбачає по одному правилу $S_i$ і $Q_k$.

*Метод комбінування евристик* (HCM) – генетичний метод розв’язання задач оптимізації та структурного синтезу, що характеризується тим, що генами хромосоми є не самі проєктні параметри, а деякі правила (евристики) для обчислення значень цих параметрів.

Формулювання правил – відповідальне завдання, від якості вирішення якого залежить ефективність пошуку оптимуму. Проте її рішення у HCM виявляється простіше, ніж у традиційних евристичних методах.

У традиційному евристичному методі потрібно сформулювати єдину комплексну евристику, у якій з деякими вагами було б враховано всі вимоги до рішення, що синтезується. Але для отримання рішення, близького до оптимального, ці ваги повинні змінюватися від кроку до кроку (від підзадачі до підзадачі), а знайти коректний алгоритм зміни ваги в рамках звичайних евристичних методів неможливо. Ваги вважаються постійними, рішення виявляється далеким від оптимуму.

Метод НСМ можна розглядати саме як генетичний метод визначення оптимальної послідовності ваги. Але замість комплексної евристики простіше і зручніше використовувати множну простих правил і замість зміни ваги проводити заміну правил із переходом від одного кроку до іншого. Формування таких правил не становить суттєвих труднощів, тому що не потрібно призначати ваги. Важливо лише забезпечити різноманітність правил, щоб раціональні рішення не опинилися поза простором пошуку.

У багатокритеріальних завданнях оптимізації проблема формування евристик часто вирішується досить просто: кожне правило має відповідати одному з критеріїв оптимальності. Звичайно, метод НСМ надає можливості використання будь-яких розумних правил, а отже, формування набору евристик за уподобаннями користувача. Це успішно використовується, коли вихідні критерії оптимальності нелегко трансформувати в частинні критерії локальних завдань.

Приклади правил для завдання компонування:

$S_1$ – вибирається конструктив, якому відповідає максимальний елемент у матриці $D$;

$S_2$ – вибирається конструктив $k$, що має максимальну кількість зв'язків з іншими конструктивами, тобто з максимальною сумою елементів у $k$-му рядку матриці $D$ (у цьому та попередньому правилах рядки та стовпчики вже розподілених конструктивів не враховуються);

$S_3$ – вибирається конструктив із максимальною кількістю зв'язків із вже розподіленими конструктивами, тобто конструктив, якому відповідає стовпчик матриці $Y$ з максимальною сумою елементів.

Приклади правил вибору блоку:

$Q_1$ – вибирається мінімально завантажений блок;

$Q_2$ – вибирається максимально завантажений блок;

$Q_3$ – вибирається блок, що має максимальну кількість зв'язків із конструктивом, що розподіляється, тобто блок із максимальним елементом $y_{ji}$ поточної матриці в $i$-му стовпчику, де $i$ – номер розподіленого конструктиву.

Пару правил $S_i$ і $Q_k$ називають евристикою $E_{ik}$. Для задачі з наведеними вище прикладами правил маємо $3 \times 3 = 9$ можливих евристик.

## 14.5. Приклади застосування генетичного алгоритму до задач прийняття рішень

***Маршрутизація транспортних засобів***

Серед завдань маршрутизації транспортних засобів під час перевезення різних вантажів одним із найважчих для вирішення вважається завдання VRPTW (Vehicle Routing Problem with Time Windows) – задача маршрутизації транспортних засобів із часовими вікнами. Часовим вікном тут називають часовий інтервал, у який потрібно виконати замовлення на перевезення. У задачі задані:

$n$ – кількість вузлів-споживачів продукції ($k$-й вузол-споживач ототожнюється з $k$-м замовленням);

$z$ – кількість вузлів-джерел продукту;

$m$ – число серверів (транспортних засобів);

$w$ – загальна кількість вузлів;

$V$ – початкове розташування споживачів, джерел і серверів у вузлах транспортної мережі;

$D$ – матриця відстані між вузлами;

$T_{1i}$, $T_{2i}$ – нижня і верхня межа тимчасового вікна для виконання $i$-го замовлення;

$P$ – кількість типів продукту.

Для вузлів-споживачів і вузлів-джерел задані обсяги замовленого та наявного продукту кожного типу відповідно, для серверів – максимальний обсяг продукту, що перевозиться, швидкість руху, ціна за одиницю відстані пробігу, штрафи за порушення тимчасових обмежень (вихід за межі часових вікон), причому штрафи залежать від ціни одиниці товару кожного типу і від ступеня порушення обмежень.

Потрібно знайти графік руху транспортних засобів для виконання всіх замовлень із мінімальними витратами.

Кожна евристика з використанням НСМ передбачає правила для вибору замовлення (вузла-споживача), вузла-джерела продукту та транспортного засобу (цілком можливо, що для виконання конкретного замовлення залучається більш ніж одне джерело та/або сервер).

Для вибору вузла-споживача можна використовувати такі правила:

$S_1$ – перевага надається вузлу з максимальним сумарним обсягом замовленого продукту;

$S_2$ – вибирається споживач із максимальною ціною замовленого продукту;

$S_3$ – вибирається споживач із мінімальною верхньою межею часового вікна.

У правилах вибору вузла-джерела продукту перевага може надаватися джерелу:

$Q_1$ – з мінімальною відстанню до вибраного в першій частині вузла-споживача;

$Q_2$ – з мінімальною сумою $D$ відстаней до вузла-споживача та до найближчого вузла, у якому є вільний сервер;

$Q_3$ – з мінімальною величиною $h = \frac{(L_1 + L_2)U_0}{U}$, де $L_1$, $L_2$ – відстані до вузла-споживача і до найближчого вузла, у якому є вільний сервер, $U_0$ – сумарний обсяг замовленого продукту, $U$ – сумарний обсяг продукту в джерелі.

Евристика доповнюється правилом, у якому вибирається сервер:

$V_1$ – з мінімальною відстанню до вузла-споживача;

$V_2$ – з мінімальним часом завершення попереднього обслуговування;

$V_3$ – з мінімальним часом виконання маршруту.

***Синтез розкладу***

Завдання синтезу розкладу вирішується в багатьох додатках, наприклад, під час планування різних виробничих процесів, розподілі ресурсів, виборі числа і типів процесорів для багатопроцесорних спеціалізованих комплексів тощо.

Розглянемо постановку та підхід до вирішення одного з різновидів задач синтезу розкладів, що позначається JSSP (Job Shop Scheduling Problem). Вихідними даними є:

$A = \{A_i\}_{i=\overline{1,n}}$ – множина робіт;

$M = \{M_j\}_{j=\overline{1,m}}$ – множина виконавців-машинами (або серверів);

$P = |P_{ij}|$ – матриця, де $P_{ij}$ – витрати часу на виконання роботи;

$C = \{C_j\}_{j=\overline{1,m}}$ – вектор, де $C_j$ – ціна за одиницю часу роботи машини $M_j$;

$T = \{T_i\}_{i=\overline{1,n}}$ – обмеження на час закінчення робіт, де $T_i$ – граничний час для завершення $i$-ї роботи;

$Q$ – штраф, що додається до загальних витрат $Z$ у разі порушення будь-якою роботою відведеного їй часового обмеження.

Потрібно скласти розклад, у якому мінімізуються витрати виконання всіх робіт з урахуванням штрафів.

У задачах синтезу розкладів можуть бути ті чи інші ускладнення, наприклад:

– багатостадійність – наявність кількох стадій обслуговування кожної роботи;

– поділ робіт на кілька груп та облік додаткових витрат на переналагодження машин, що потрібні для послідовного обслуговування різних груп;

– часткова упорядкованість робіт, тобто для деяких пар робіт $i$, $k$ введені обмеження виду: $B_i \ge E_k$, де $B_i$ – час початку $i$-ї роботи, $E_k$ – час закінчення $k$-ї роботи.

Кожна евристика із застосуванням для задачі синтезу розкладів методу НСМ містить два правила:

1) для вибору чергової роботи;

2) для вибору машини, що обслуговує цю роботу.

Наприклад, у разі синтезу багатостадійних розкладів може вибиратися робота:

1) з найменшим часом $T_i$;

2) з найменшим часом завершення обслуговування на попередній стадії $E_i$.

Приклади правил вибору машин:

1) вибирається машина, де обслуговування найдешевше;

2) вибирається машина, де робота виконується за найменший час.

**Контрольні запитання**

1. Для яких задач більш ефективним є застосування методів штучного інтелекту?

2. Які напрями розвитку методів штучного інтелекту ви знаєте?

3. У яких випадках доцільне застосування нейромереж?

4. Які ви знаєте системи, що ґрунтуються на знаннях?

5. Що таке об’єктно-орієнтовані інтелектуальні системи?

6. Що таке багатоагентні системи?

7. У чому полягає основна ідея генетичних алгоритмів?

8. Перерахуйте основні етапи генетичного алгоритму.

9. Які елементи потрібно визначити для постановки задачі генетичного алгоритму?

10. Опишіть порядок застосування генетичного алгоритму.

11. Як виконується процедура вибору «батьків» у генетичному алгоритмі?

12. Що таке кросовер і як реалізуються мутації в генетичному алгоритмі?

13. Яким чином реалізується процедура селекції генетичного алгоритму?

14. Наведіть приклад практичного застосування генетичного алгоритму.

15. Що таке метод комбінування евристик?

# *Лекція 15.* Застосування нечітких множин до задач прийняття рішень

## 15.1. Поняття нечіткої множини та способи її задання

Теорія множин була створена Георгом Кантором і його учнями у другій половині XIX ст., але існує питання про «границі» множини. Річ у тім, що через недостатність даних не можна достовірно сказати, чи входить даний елемент в деяку множину чи ні. Вирішення цієї проблеми було надано в роботах математика Лутфі Заде. Він запропонував розглядати як характеристичну функцію належності $\mu_A(a) \in [0,1]$. Якщо елемент $a \notin A$, то, $\mu_A(a) = 0$.

Чим ближче значення до одиниці, тим більший ступінь належності цього елемента *a* до множини *A*. Така множина *A* буде представлена сукупністю пар: $A = \{(a, \mu(a)), (b, \mu(b)), (c, \mu(c)), \ldots\}$.

Функція належності $\mu_A(a)$ фактично являє суб'єктивну оцінку ймовірності входження елемента $a$ в множину $A$. Якщо маємо пару $(a; 1)$, то елемент $a$ точно входить у множину, якщо $(b; 0{,}9)$, то $b$ «майже напевно» входить; якщо $(c; 0{,}1)$, то $c$ «швидше за все не входить» у множину $A$, і т. д. Застосування нечітких множин дає хороші результати в тих випадках, коли немає достатньої вибірки для отримання надійних статистичних оцінок. Оцінку функції належності $\mu_A(a)$ можна дати, спираючись на досвід та інтуїцію дослідника.

Нехай множина $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, і $A \subset M$, де підмножина $A$ описується поняттям «кілька елементів множини $M$». Це поняття нечітке, тому що однозначно не можна сказати, скільки і які елементи множини $M$ входять в підмножину $A$. Множину $A$ можна задати, наприклад, табл. 15.1.

*Таблиця 15.1*

Нечітка множина $M$

| Елементи множини $M$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Степінь належності множені $\mu_M$ | 0,01 | 0,2 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,7 |

Ступінь належності можна описувати, використовуючи функцію належності $\mu_A(a)$, що задається аналітично, тобто формулою.

**Приклад 15.1**. Якщо $M$ – множина міст цієї області, $x$ – чисельність населення міста, то нечітку множину $A$ «великих міст» можна задати, наприклад, функцією належності:

$$\mu_A(a) = \frac{x}{x + 5 \cdot 10^4}.$$

Із цих нечітких множин можна конструювати інші нечіткі множини за допомогою операцій об'єднання, перерізу й доповнення.

## 15.2. Операції над нечіткими множинами

Елементи нечіткої множини, що є результатом виконання основних операцій над нечіткими множинами, визначаються так само, як і для звичайних множин, але, на відміну для звичайних множин, у випадку нечітких множин для них потрібно визначити ще значення функції належності. Функція належності може визначатися декількома способами. Розглянемо класичний спосіб, запропонований Заде.

***Об'єднанням нечітких множин*** *A* і *B* називається нечітка множина $A \bigcup B$ з функцією належності: $\mu_{A \cup B} = \max\left|\mu_A(x), \mu_B(x)\right|$, де $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$ – відповідні функції належності.

***Перерізом нечітких множин*** *A* і *B* називається нечітка множина $A \bigcap B$ з функцією належності: $\mu_{A \cap B} = \min\left|\mu_A(x), \mu_B(x)\right|$.

***Доповненням нечіткої множини*** *A* називається нечітка множина $\overline{A}$ з функцією належності: $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

**Приклад 15.2**. Нехай нечіткі множини *A* і *B* (табл. 15.2 і 15.3).

*Таблиця 15.2*

Нечітка множина *A*

| $x$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_A(x)$ | 0,1 | 0 | 0,7 | 0,2 | 0 | 0,9 |

*Таблиця 15.3*

Нечітка множина *B*

| $x$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_B(x)$ | 0 | 0,1 | 0,3 | 0,8 | 0,1 | 0,8 |

Тоді нечітка множина $\overline{A \bigcup B}$ задається табл. 15.4:

*Таблиця 15.4*

Нечітка множина $\overline{A \bigcup B}$

| $x$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_{\overline{A \cup B}}(x)$ | 0,9 | 0,9 | 0,3 | 0,2 | 0,9 | 0,1 |

**Приклад 15.3**. Начальник відділу інформаційних технологій вирішив скласти математико-психологічний портрет працівників свого відділу, оцінивши ступінь приналежності кожного з них двом найбільш важливим, на його думку, множинам, що характеризують особистісні якості: множина *A* – добрі люди і множина *B* – працьовиті.

Результати заніс у таблицю (табл. 15.5):

*Таблиця 15.5*

Множина співробітників

| Співробітники | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_A$ | 0,8 | 0,7 | 0,4 | 0,9 | 0,3 | 0,5 | 0,6 | 0,4 |
| $\mu_B$ | 0,3 | 0,6 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,8 | 0,9 |
| $\mu_{A \cap B}$ | 0,3 | 0,6 | 0,4 | 0,7 | 0,3 | 0,5 | 0,6 | 0,4 |

Загальний показник кожного співробітника за сукупністю ознак *A* і *B* визначатиметься функцією, яка показана в нижньому рядку таблиці. Отже, співробітник під номером 4 є лідером за сукупністю двох розглянутих ознак.

## 15.3. Застосування теорії нечітких множин до задач теорії прийняття рішень

Елементи теорії нечітких множин застосовуються для прийняття рішень в умовах невизначеності. Експертні оцінки альтернативних варіантів за критеріями можуть бути представлені як нечіткі множини або числа, виражені за допомогою функцій належності. Для впорядкування нечітких чисел існує безліч методів, які відрізняються один від одного способом згортки й побудови нечітких відносин.

У цьому випадку критерії визначають деякі поняття, а оцінки альтернатив є мірою відповідності цим поняттям. Нехай є множина альтернатив $A = \{a_j\}_{j=\overline{1,m}}$ і множина критеріїв $C = \{C_i\}_{i=\overline{1,n}}$, при цьому оцінки альтернатив за кожним *i*-м критерієм представлені нечіткими множинами:

$$C_i = (\mu_{Ci}(a_1); a_1); (\mu_{Ci}(a_2); a_2); ...; (\mu_{Ci}(a_m); a_m).$$

Правило вибору кращої альтернативи можна представити як переріз нечітких множин, які відповідають критеріям: $D = C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n$. Використовуючи операцію перерізу нечітких множин, можна визначити найкращу альтернативу, яка буде представлена функціями належності:

$$\mu_D(a^*) = \max_i \mu_D(a_i), \ \mu_D(a_i) = \max_i \mu_{Ci}(a_i).$$

Для задач прийняття рішень на основі нечітких множин можна застосовувати розглянуті вище критерії в умовах невизначеності (Вальда, Севіджа, де замість імовірності використовується функція належності).

### 15.4. Нечіткі виведення

В експертних і керівних системах механізм нечіткого виведення у своїй основі має базу знань, що формується фахівцями предметної області, у вигляді сукупності нечітких предикатних правил виду:

$П_1$: якщо $x$ є $A_1$, то $y$ є $B_1$,

$П_2$: якщо $x$ є $A_2$, то $y$ є $B_2$,

$П_n$: якщо $x$ є $A_n$, то $y$ є $B_n$,

де $x$ – вхідна змінна, $y$ – змінна виведення, $A$ і $B$ – функції належності, визначені на $x$ і $y$ відповідно.

Знання експерта $A \to B$ відображає нечітке причинне відношення передумови й укладення, тому його називають нечітким відношенням: $R = A \to B$, де «$\to$» – нечітка імплікація.

Відношення $R$ можна розглядати як нечітку підмножину прямого добутку $X \times Y$ повної множини передумов $X$ і висновків $Y$.

Таким чином, процес отримання (нечіткого) результату виведення B? з використанням цього спостереження A? і значення $A \to B$ можна представити у вигляді:

B?= A?? R= A??( A>B).

### 15.5. Алгоритм нечіткого виведення

1. Нечіткість (фазифікації, fuzzification) – функції належності, визначені для вхідних змінних, застосовуються до їх фактичних значень для визначення ступеня істинності кожної передумови кожного правила.

2. Логічний висновок – обчислення значення істинності для передумов кожного правила застосовується до висновків кожного правила. Це призводить до однієї нечіткої підмножини, яка буде призначена змінній

виводу для кожного правила. Як правило логічного висновку використовуються тільки операції min (мінімуму) або prod (множення).

3. Композиція – нечіткі підмножини, призначені для кожної змінної виводу (у всіх правилах), об’єднуються разом, щоб сформувати одну нечітку підмножину для кожної змінної виводу. За подібного об’єднання зазвичай використовуються операції max (максимум) або sum (сума).

4. Дефазифікація – приведення до чіткості (defuzzification). Перетворення нечіткого набору висновків у число.

Спиратимемося на прийняття рішення в нечітких умовах за схемою Беллмана – Заде.

### 15.6. Нечіткі цілі, обмеження та рішення

Нехай $X = \{x\}$ – множина альтернатив. Нечітку мету $\tilde{G}$ ототожнюватимемо з нечіткою множиною $\tilde{G}_в$ в X. Наприклад, якщо альтернативами є дійсні числа, тобто $X \in R$, а нечітка мета сформульована як «*x* має бути близьким до 10», то її можна представити нечіткою множиною з такою функцією приналежності: (15.1).

$$\mu_G(x) = \frac{1}{1+(x-10)^2}. \qquad (15.1)$$

Аналогічним чином нечітке обмеження $\tilde{C}$ визначається як деяка нечітка множина на універсальній множині *X*. Наприклад, нечітке обмеження «*x* має бути значно більше за 8», якщо, $X \in R$ можна уявити нечіткою множною з такою функцією належності:

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & x < 5 \\ \dfrac{1}{1+\exp(-0{,}8\cdot(x-8))}, & x \ge 5 \end{cases}. \qquad (15.2)$$

Нечітке рішення $\tilde{D}$ також визначається як нечітка множина на універсальній множині альтернатив *X*. Функція належності цієї нечіткої множини показує, наскільки добре рішення задовольняє нечітким цілям та обмеженням. Логічній операції *I*, яка пов’язує цілі й обмеження, відповідає операція перетину нечітких множин. Отже, рішення – це переріз нечіткої мети з нечітким обмеженням:

$$\tilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}. \qquad (15.3)$$

**Приклад 15.4.** Нечітка мета $\tilde{G}$ і нечітке обмеження $\tilde{C}$ сформульовані так:

«$X$ має бути близько 10» і «х має бути значно більше за 8».

Функції належності нечітких множин $\tilde{G}$ і $\tilde{C}$ задані виразами (15.1) і (15.2). Потрібно знайти нечітке рішення $\tilde{D}$.

Нечітке рішення знайдемо за формулою (15.3). З огляду на те, що перерізу нечітких множин відповідає операція мінімуму над функцією приналежності, отримуємо:

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0, & x < 5 \\ \min\left( \dfrac{1}{1+\exp(-0{,}8\cdot(x-8))}, \dfrac{1}{1+(x-10)^2}, \quad x \ge 5 \right) \end{cases}.$$

Взаємозв'язок між нечіткими метою, обмеженням і рішенням $\tilde{D}$ показано на рис. 15.1. Мета й обмеження конфліктують між собою, тому в нечіткій множині немає жодного елемента зі ступенем приналежності, що дорівнює 1. Отже, не існує альтернативи, яка повністю задовольняє і цілі, і обмеження. Як чітке рішення в таких випадках зазвичай вибирають альтернативу з максимальним ступенем приналежності нечіткій множині $\tilde{D}$.

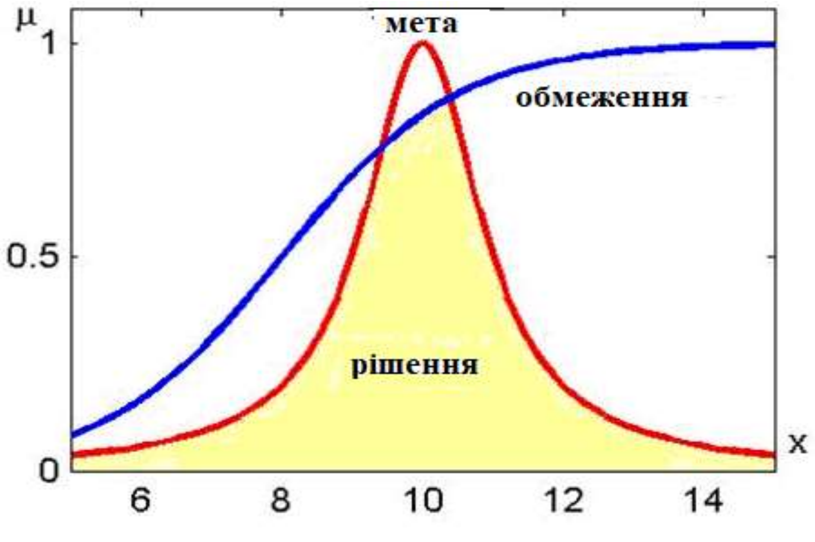


Рис. 15.1. До прикладу 15.4: прийняття рішення за принципом Беллмана – Заде

У разі прийняття рішень за схемою Беллмана – Заде не робиться жодної різниці між метою та обмеженнями. Будь-який поділ на ціль і обмеження є умовним: у формулі (15.3) можна поміняти місцями мету з обмеженням, при цьому рішення не зміниться. У традиційній теорії прийняття рішень подібні заміни функції переваги на обмеження неприпустимі. Однак і тут простежується деяка прихована схожість між цілями й обмеженнями. Вона стає явною за використання методу невизначених множників Лагранжа і штрафних функцій, коли мета й обмеження об’єднуються в одну функцію.

У загальному випадку, коли є $n$ цілей і $m$ обмежень, результуюче рішення за схемою Беллмана – Заде визначається перетином всіх цілей і обмежень:

$$\tilde{D} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \ldots \cap \tilde{G}_n \cap \tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \cap \ldots \cap \tilde{C}_m,$$

відповідно $\mu_D = \mu_{G_1} \wedge \mu_{G_2} \wedge \ldots \wedge \mu_{G_n} \wedge \mu_{C_1} \wedge \mu_{C_2} \wedge \ldots \wedge \mu_{C_m}$.

До цих пір передбачалося, що всі цілі й обмеження, що входять до $\tilde{D}$, мають однакову важливість. Більш звична ситуація, у якій задоволення одних цілей і (або) обмежень важливіше, ніж інших. Позначимо через $\alpha_i \in (0,1)$ коефіцієнт відносної важливості *i*-ї цілі, а через $\beta_j \in (0,1)$ – коефіцієнт відносної важливості *j*-го обмеження:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1.$$

Тоді функція належності рішення визначається таким чином:

$$\mu_D = (\mu_{G_1})^{\alpha_1} \wedge (\mu_{G_2})^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge (\mu_{G_n})^{\alpha_n} \wedge (\mu_{C_1})^{\beta_1} \wedge (\mu_{C_2})^{\beta_2} \wedge \ldots \wedge (\mu_{C_m})^{\beta_m}.$$

Чим менший коефіцієнт відносної важливості, тим відповідна нечітка множина мети або обмеження стає більш розмазаною, а отже, його роль в ухваленні рішення знижується. На рис. 15.2 наведені нечіткі рішення за різних коефіцієнтів важливості мети й обмеження з прикладу 15.4.

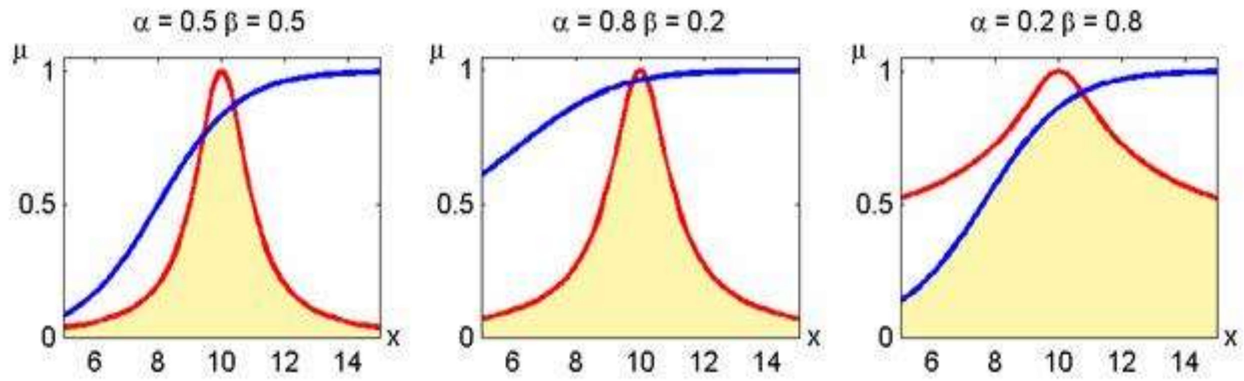


Рис. 15.2. До прикладу 15.1: прийняття рішення за різних значень важливості мети й обмежень

### 15.7. Нечіткий багатокритеріальний аналіз варіантів

Вважатимемо відомими:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ – множину варіантів, які підлягають багатокритеріальному аналізу;

$G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ – множину кількісних і якісних критеріїв, якими оцінюються варіанти.

Завдання багатокритеріального аналізу полягає в упорядкуванні елементів множини *X* за критеріями з множини *G*.

Нехай $\mu_{G_i}(x_j)$ – число з діапазону $[0,1]$, що характеризує рівень оцінки варіанта $x_j \in X$ за критерієм $G_i \in G$: чим більше значення числа $\mu_{G_i}(x_j)$, тим вищою є оцінка варіанта $x_j \in X$, $j = \overline{1,k}$ за критерієм $G_i$, $i = \overline{1,n}$.

Тоді критерій $G_i \in G$ можна представити у вигляді нечіткої множини $\tilde{G}_i$ на універсальній множині варіантів *X*:

$$\tilde{G}_i = \left\{ \frac{\mu_{G_i}(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_{G_i}(x_2)}{x_2}, \ldots, \frac{\mu_{G_i}(x_k)}{x_k} \right\}, \qquad (15.5)$$

де $\mu_{G_i}(x_j)$ – ступінь приналежності елементу $x_j$ нечіткій множині $\tilde{G}_i$.

Знаходити степінь належності нечіткої множини (15.5) зручно методом побудови функцій належності на основі парних порівнянь.

У разі використання цього методу потрібно сформувати матриці парних порівнянь варіантів за кожним критерієм. Загальна кількість таких матриць збігається з кількістю критеріїв і дорівнює *n*.

Найкращим варіантом буде той, який кращий за всіма критеріями. Нечітке рішення знаходиться як переріз часткових критеріїв:

$$\tilde{D} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \ldots \cap \tilde{G}_n =$$
$$= \left\{ \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_{G_i}(x_1)}{x_1}, \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_{G_i}(x_2)}{x_2}, \ldots, \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_{G_i}(x_k)}{x_k} \right\}. \quad (15.6)$$

Згідно з отриманою нечіткою множиною, найкращим варіантом вважається той, для якого ступінь приналежності є найбільшим.

За нерівноважних умов формула (15.6) набуває вигляду:

$$\tilde{D} = \left\{ \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \left(\mu_{G_i}(x_1)\right)^{\alpha_i}}{x_1}, \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \left(\mu_{G_i}(x_2)\right)^{\alpha_i}}{x_2}, \ldots, \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \left(\mu_{G_i}(x_k)\right)^{\alpha_i}}{x_k} \right\}, \quad (15.7)$$

де $\alpha_i$ – коефіцієнт відносної важливості критерію $G_i$, $\sum\limits_i \alpha_i = 1$.

Показник степені $\alpha_i$ у формулі (15.7) свідчить про концентрацію нечіткої множини $\tilde{G}_i$ відповідно до міри важливості критерію $G_i$. Коефіцієнти відносної важливості критеріїв можуть бути визначені різними методами (наприклад, за допомогою парних порівнянь за шкалою Сааті).

## 1.8. Приклади застосування нечітких множин у теорії прийняття рішень

***Нечіткий багатокритеріальний аналіз інноваційних проєктів***

Як приклад прийняття рішень у нечітких умовах за схемою Беллмана – Заде розглянемо порівняння техніко-економічного рівня трьох проєктів ($x_1, x_2, x_3$), спрямованих в інноваційний фонд із метою отримання фінансування. Для оцінки техніко-економічного рівня проєктів скористаємося такими критеріями:

$G_1$ – масштаб проєкту;

$G_2$ – новизна проєкту;

$G_3$ – пріоритетність спрямування;

$G_4$ – ступінь опрацювання;

$G_5$ – правова захищеність;

$G_6$ – екологічний рівень.

За результатами експертного порівняння проєктів $(x_1, x_2, x_3)$ за критеріями $G_i, \quad i = \overline{1,6}$ отримані лінгвістичні висловлювання (табл. 15.6).

*Таблиця 15.6*

Парні порівняння проєктів за шкалою Сааті

| Критерій | Парні порівняння |
|---|---|
| $G_1$ | *Відсутність* переваги $x_1$ над $x_2$.<br>*Суттєва* перевага $x_3$ над $x_1$ |
| $G_2$ | *Майже відсутня* перевага $x_1$ над $x_3$.<br>*Слабка* перевага $x_2$ над $x_3$ |
| $G_3$ | *Суттєва* перевага $x_1$ над $x_2$.<br>*Явна* перевага $x_1$ над $x_3$ |
| $G_4$ | *Слабка* перевага $x_2$ над $x_1$.<br>*Майже слабка* перевага $x_3$ над $x_1$ |
| $G_5$ | *Суттєва* перевага $x_1$ над $x_2$.<br>*Майже явна* перевага $x_1$ над $x_3$ |
| $G_6$ | *Майже суттєва* перевага $x_1$ над $x_2$.<br>*Майже слабка* перевага $x_3$ над $x_1$ |

Цим експертним висловлювань відповідають такі матриці парних порівнянь:

$$A(G_1) = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 0{,}2 \\ x_2 & \mathbf{1} & 1 & 0{,}2 \\ x_3 & \mathbf{5} & 5 & 1 \end{array} \qquad A(G_2) = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 1{,}35 & \mathbf{4} \\ x_2 & 0{,}75 & 1 & \mathbf{3} \\ x_3 & 0{,}25 & 0{,}33 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & \mathbf{5} & \mathbf{7} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0{,}33 & 0{,}5 \end{array}$$

$$A(G_3)= \begin{array}{c|ccc|} x_2 & 0{,}2 & 1 & 1{,}4 \\ x_3 & 0{,}14 & 0{,}71 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad A(G_4)= \begin{array}{c|ccc|} x_2 & \mathbf{3} & 1 & 1{,}5 \\ x_3 & \mathbf{2} & 0{,}67 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$A(G_5)= \begin{array}{c|ccc|} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ x_2 & 0{,}2 & 1 & 1{,}2 \\ x_3 & 0{,}17 & 0{,}83 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad A(G_6)= \begin{array}{c|ccc|} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & \mathbf{4} & 0{,}5 \\ x_2 & 0{,}25 & 1 & 0{,}13 \\ x_3 & \mathbf{2} & 8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

У цих матрицях напівжирним шрифтом виділені елементи, які відповідають парним порівнянь з табл. 15.6. Інші елементи знайдені в припущенні про узгодження парних порівнянь, тобто з урахуванням того, що матриця парних порівнянь будується за принципом зворотної симетричності $(a_{ij} = 1/a_{ji})$ і має властивості транзитивності $(a_{ik} \cdot a_{kj} = a_{ij})$. За узгодженої думки експертів матриця парних порівнянь має такі властивості, вона діагональна, $a_{ij} = 1/a_{ji}$, $a_{ii} = 1$.

Наявність цих властивостей дає змогу визначити всі елементи матриці парних порівнянь, якщо відомі $(n-1)$ недіагональних елементів. Наприклад, якщо відомий $k$-й рядок, $a_{kj}$, то довільний елемент $a_{ij}$ визначається як:

$$a_{ij} = a_{kj} / a_{ki},\ i, j, k = \overline{1, n}. \tag{15.8}$$

Після визначення всіх елементів матриці парних порівнянь ступінь приналежності, нечіткої множини обчислюються за формулою:

$$\mu(u_i) = \frac{1}{a_{1i} + a_{2i} + \ldots + a_{ni}} \tag{15.9}$$

Застосовуючи формулу (15.9) до матриць парних порівнянь, отримуємо такі нечіткі множини:

$$\tilde{G}_1 = \left\{\frac{0{,}14}{x_1}, \frac{0{,}14}{x_2}, \frac{0{,}72}{x_3}\right\},\ \tilde{G}_2 = \left\{\frac{0{,}5}{x_1}, \frac{0{,}38}{x_2}, \frac{0{,}12}{x_3}\right\},\ \tilde{G}_3 = \left\{\frac{0{,}74}{x_1}, \frac{0{,}15}{x_2}, \frac{0{,}11}{x_3}\right\},$$

$$\tilde{G}_4 = \left\{\frac{0{,}17}{x_1}, \frac{0{,}5}{x_2}, \frac{0{,}33}{x_3}\right\},\ \tilde{G}_5 = \left\{\frac{0{,}73}{x_1}, \frac{0{,}15}{x_2}, \frac{0{,}12}{x_3}\right\},\ \tilde{G}_6 = \left\{\frac{0{,}31}{x_1}, \frac{0{,}08}{x_2}, \frac{0{,}61}{x_3}\right\}.$$

За формулою (15.7) отримуємо: $\tilde{D}=\left\{\frac{0,14}{x_1},\frac{0,08}{x_2},\frac{0,11}{x_3}\right\}$, що свідчить про істотну перевагу проєкту $x_1$ над проєктом $x_2$, а також про слабку перевагу проєкту $x_1$ над проєктом $x_3$.

Припустимо, що критерії $G_{i=\overline{1,6}}$ є нерівноважними. Для визначення рангів критеріїв скористаємося методом парних порівнянь. Нехай задані такі лінгвістичні висловлювання про важливість критеріїв:

- майже суттєва перевага $G_2$ над $G_1$;
- явна перевага $G_3$ над $G_1$;
- слабка перевага $G_3$ над $G_5$;
- майже слабка перевага $G_4$ над $G_6$;
- відсутність переваги $G_5$ над $G_6$.

Цим експертним висловлювань відповідає така матриця парних порівнянь:

A=

| | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ | $G_5$ | $G_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_1$ | 1 | 0,25 | 0,14 | 0,21 | 0,43 | 0,43 |
| $G_2$ | **4** | 1 | 0,57 | 0,86 | 1,71 | 1,71 |
| $G_3$ | **7** | 1,75 | 1 | 1,5 | **3** | 3 |
| $G_4$ | 4,67 | 1,17 | 0,67 | 1 | 2 | **2** |
| $G_5$ | 2,33 | 0,58 | 0,33 | 0,5 | 1 | **1** |
| $G_6$ | 2,33 | 0,58 | 0,33 | 0,5 | 1 | 1 |

Застосовуючи формулу (15.9), визначимо ранги критеріїв $G_i, i=\overline{1,6}$:

$$\alpha_1=0{,}04,\ \alpha_2=0{,}19,\ \alpha_3=0{,}33,\ \alpha_4=0{,}22,\ \alpha_5=0{,}11,\ \alpha_6=0{,}11.$$

З отриманих результатів видно, що найбільшу важливість має напрям $G_3$ та ступінь проробки проєкту $G_4$. Застосовуючи формулу (15.7), отримаємо такі нечіткі множини:

$$\tilde{G}_1=\left\{\frac{0{,}14^{0{,}04}}{x_1},\frac{0{,}14^{0{,}04}}{x_2},\frac{0{,}72^{0{,}04}}{x_3}\right\}=\left\{\frac{0{,}91}{x_1},\frac{0{,}91}{x_2},\frac{0{,}98}{x_3}\right\},$$

$$\tilde{G}_2 = \left\{ \frac{0{,}5^{0{,}19}}{x_1}, \frac{0{,}38^{0{,}19}}{x_2}, \frac{0{,}12^{0{,}19}}{x_3} \right\} = \left\{ \frac{0{,}88}{x_1}, \frac{0{,}83}{x_2}, \frac{0{,}68}{x_3} \right\},$$

$$\tilde{G}_3 = \left\{ \frac{0{,}74^{0{,}33}}{x_1}, \frac{0{,}15^{0{,}33}}{x_2}, \frac{0{,}11^{0{,}33}}{x_3} \right\} = \left\{ \frac{0{,}91}{x_1}, \frac{0{,}53}{x_2}, \frac{0{,}48}{x_3} \right\},$$

$$\tilde{G}_4 = \left\{ \frac{0{,}17^{0{,}22}}{x_1}, \frac{0{,}5^{0{,}22}}{x_2}, \frac{0{,}33^{0{,}22}}{x_3} \right\} = \left\{ \frac{0{,}68}{x_1}, \frac{0{,}86}{x_2}, \frac{0{,}79}{x_3} \right\},$$

$$\tilde{G}_5 = \left\{ \frac{0{,}73^{0{,}11}}{x_1}, \frac{0{,}15^{0{,}11}}{x_2}, \frac{0{,}12^{0{,}11}}{x_3} \right\} = \left\{ \frac{0{,}97}{x_1}, \frac{0{,}81}{x_2}, \frac{0{,}79}{x_3} \right\},$$

$$\tilde{G}_6 = \left\{ \frac{0{,}31^{0{,}11}}{x_1}, \frac{0{,}08^{0{,}11}}{x_2}, \frac{0{,}61^{0{,}11}}{x_3} \right\} = \left\{ \frac{0{,}88}{x_1}, \frac{0{,}76}{x_2}, \frac{0{,}95}{x_3} \right\}.$$

Унаслідок перерізу нечітких множин $\tilde{G}_1 - G_6$ отримаємо:

$$\tilde{D} = \left\{ \frac{0{,}68}{x_1}, \frac{0{,}53}{x_2}, \frac{0{,}48}{x_3} \right\},$$

що свідчить про суттєву перевагу проєкту $x_1$ над проєктами $x_2$ та $x_3$, а також про слабку перевагу проєкту $x_2$ над проєктом $x_3$.

***Багатокритеріальний вибір методом максимінної згортки у сфері банківського кредитування***

Розглянемо застосування методу прийняття рішень, заснованого на теорії нечітких множин у сфері кредитування, що дає змогу підвищити обґрунтованість прийнятих рішень і забезпечити вибір найбільш раціонального варіанта з множини допустимих.

У цій задачі підприємства є альтернативами, з яких потрібно зробити вибір кращої.

Альтернативи позначимо через $a_1, a_2, a_3, a_4$.

Для оцінки кредитоспроможності підприємств-позичальників використовуємо дані їх бухгалтерської звітності (табл. 2.1).

*Таблиця 15.7*

Дані бухгалтерської звітності

| Фінансовий показник | Значення показника для підприємства, тис. грн |
|---|---|

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Грошові засоби (ДС)(ГЗ) | 229,1 | 946,2 | 947,0 | 1442,9 |
| Короткочасні фінансові вкладення (КФВ) | 394,1 | 462,7 | 466,4 | 2066,0 |
| Дебіторська заборгованість (ДЗ) | 4639,8 | 8391,4 | 8514,5 | 10908,2 |
| Запаси та витрати (ЗЗ) (ЗВ) | 6028,1 | 21557,6 | 21370,4 | 17424,5 |
| Власний капітал (ВК) | 12395,8 | 35247,8 | 41244,2 | 53939,4 |
| Короткострокові зобов'язання (ОКс) (ЗКс) | 4058,1 | 13834,9 | 16827,1 | 25028,3 |
| Результат балансу (ИБ)(РБ) | 16453,9 | 49082,7 | 58071,3 | 78967,7 |
| Валова виручка(ВВ) | 59438,9 | 38567,9 | 43589,5 | 28343,6 |
| Прибуток (П) | 16642,9 | 4442,5 | 65384,2 | 3401,2 |

На підставі цих даних розраховуються фінансові коефіцієнти, що характеризують кредитоспроможність позичальників: коефіцієнт абсолютної ліквідності ($F_1$), проміжний коефіцієнт покриття ($F_2$), загальний коефіцієнт покриття ($F_3$), коефіцієнт фінансової незалежності ($F_4$) коефіцієнт рентабельності продукції ($F_5$). Перераховані коефіцієнти є критеріями якості кредитоспроможності підприємств і розраховуються за такими формулами:

$$F_1 = \frac{ГЗ + КФВ}{ЗКс}; \; F_2 = \frac{ГЗ + КФВ + ДЗ}{ЗКс};$$

$$F_2 = \frac{ГЗ + КФВ + ДЗ + ЗВ}{ЗКс}; \; F_4 = \frac{ВК}{РБ}; \; F_5 = \frac{П}{ВВ}.$$

Розраховані значення критеріїв якості для розглянутих підприємств наведені в табл. 15.8. Там само задані нормативні значення критеріїв. Аналіз розрахункових і нормативних значень критеріїв показує, що всі підприємства можуть претендувати на отримання кредиту.

*Таблиця 15.8*

Критерії якості підприємств

| Критерій | Значення критерію для підприємства | Нормативні |
|---|---|---|

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | значення |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 0,154 | 0,102 | 0,084 | 0,140 | 0,1–0,25 |
| $F_2$ | 1,297 | 0,71 | 0,59 | 0,57 | 0,5–1,0 |
| $F_3$ | 2,78 | 2,27 | 1,86 | 1.27 | 1,0–2,5 |
| $F_4$ | 0,75 | 0,72 | 0,71 | 0,68 | 0,6 |
| $F_5$ | 0,28 | 0,115 | 0,15 | 0,12 | Чим вище, тим краще |

Обробка отриманої вихідної інформації із застосуванням математичного апарату теорії нечітких множин здійснюється в три етапи.

**Етап 1.** Побудова функцій належності, відповідних понять «кращий коефіцієнт абсолютної ліквідності», «бажаний проміжний коефіцієнт покриття», «найкращий коефіцієнт рентабельності» і т. д. (рис. 15.3). Побудову таких функцій проводять експерти, які мають знання у сфері кредитування підприємств.

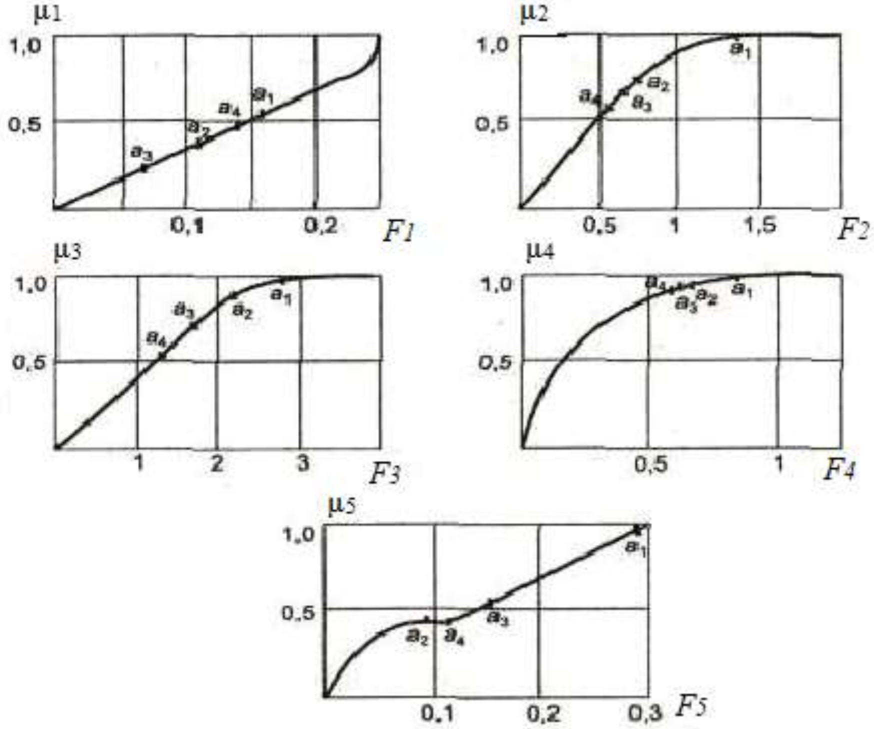


Рис. 15.3 Функції належності критеріїв якості

**Етап 2.** Визначаються конкретні значення функції належності за критеріями якості $F_1 - F_5$. На рис. 15.3 показані значення функцій належності, відповідні до цих альтернатив. Нечіткі множини для п'яти розглянутих критеріїв, що передбачають чотири аналізовані альтернативи, мають такий вигляд:

$$F_1 = 0{,}61/0{,}154 + 0{,}41/0{,}102 + 0{,}33/0{,}084 + 0{,}46/0{,}140;$$

$$F_2 = 1{,}0/1{,}297 + 0{,}71/0{,}71 + 0{,}59/0{,}59 + 0{,}57/0{,}57;$$
$$F_3 = 1{,}0/2{,}78 + 0{,}91/2{,}27 + 0{,}75/1{,}86 + 0{,}51/1{,}27;$$
$$F_4 = 1{,}0/0{,}75 + 0{,}96/0{,}72 + 0{,}94/0{,}71 + 0{,}90/0{,}68;$$
$$F_5 = 0{,}93/0{,}28 + 0{,}38/0{,}115 + 0{,}5/0{,}15 + 0{,}4/0{,}12.$$

**Етап 3.** Проводиться згортка наявної інформації з метою виявлення кращої альтернативи. Множина оптимальних альтернатив В визначається шляхом перетину нечітких множин, що містять оцінки альтернатив за критеріями вибору.

Якщо критерії, за якими здійснюється вибір варіантів, мають однакову важливість для ОПР, то правило вибору кращого варіанта набуває вигляду:

$$B = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5.$$

Оптимальною вважається альтернатива з максимальним значенням функції належності до множини В. Операція перетину нечітких множин відповідає вибору мінімального значення для *j*-ї альтернативи:

Для цієї задачі множина оптимальних альтернатив формуватиметься таким чином:

$$\begin{aligned} B = \{ & \min \{ 0{,}61,\ 1{,}0,\ 1{,}0,\ 1{,}0,\ 0{,}93 \} \\ & \min \{ 0{,}41,\ 0{,}71,\ 0{,}91,\ 0{,}96,\ 0{,}38 \} \\ & \min \{ 0{,}33,\ 0{,}59,\ 0{,}75,\ 0{,}94,\ 0{,}50 \} \\ & \min \{ 0{,}46,\ 0{,}57,\ 0{,}51,\ 0{,}90,\ 0{,}40 \} \}. \end{aligned}$$

Результуючий вектор пріоритетів альтернатив має такий вигляд:

$$\max_j \mu_B(a_j) == \max \{0{,}61; 0{,}38; 0{,}33; 0{,}4\}.$$

Отже, найкращою альтернативою є $a_1$, якій відповідає значення $0{,}61$. На другому, третьому і четвертому місцях перебувають $a_4 = 0{,}4$, $a_2 = 0{,}38$, $a_3 = 0{,}33$.

***Вибір конкурентоспроможного товару методом нечіткого відношення переваги***

Проаналізуємо низку віброзахисних технологій виявлення найбільш конкурентоспроможної на певному міжнародному ринку.

Завдання вибору раціонального віброізолятора з урахуванням найважливіших критеріїв якості розглянемо на прикладі аналізу чотирьох альтернатив: $a_1$ – пневматичного віброізолятора; $a_2$ –

металевого торсійного елемента, що працює на скручування; $a_3$ – гвинтової пружини; $a_4$ – гумового елемента.

Для оцінки альтернатив використовуємо вісім критеріїв якості:

$F_1$ – власна частота коливань віброізолятора ( $f$ , Гц);

$F_2$ – довговічність елемента ($T$ , років);

$F_3$ – габаритний розмір ( $h$ , метр);

$F_4$ – коефіцієнт передачі на резонансі ($Tz$ , безрозмірні одиниці);

$F_5$ – стійкість до механічних ушкоджень (шкала експертних оцінок);

$F_6$ – вартість (тис. грн);

$F_7$ – шумоізоляція (дБ);

$F_8$ – патентна чистота (умовні одиниці виміру).

На підставі функцій належності всіх альтернатив за вісьмома критеріями визначено їх конкретні значення, які являють собою такі нечіткі множини:

$$\mu_{F1} = 0{,}25/1{,}5 + 0{,}25/1{,}5 + 0{,}1/1{,}8 + 0/2{,}2;$$

$$\mu_{F2} = 1{,}0/10 + 1{,}0/15 + 1{,}0/15 + 0{,}5/5{,}0;$$

$$\mu_{F3} = 0{,}9/0{,}2 + 1{,}0/0{,}1 + 0{,}1/0{,}5 + 0/0{,}7;$$

$$\mu_{F4} = 0{,}9/1{,}5 + 0{,}25/3{,}5 + 0{,}25/3{,}5 + 0{,}75/2{,}5;$$

$$\mu_{F5} = 0{,}15/2{,}0 + 1{,}0/6{,}0 + 1{,}0/6{,}0 + 0{,}75/4{,}5;$$

$$\mu_{F6} = 0{,}25/18 + 1{,}2/20 + 0{,}8/12 + 0{,}9/10;$$

$$\mu_{F7} = 0{,}95/1{,}0 + 0{,}25/7{,}0 + 1{,}0/9{,}0 + 0{,}75/5{,}0;$$

$$\mu_{F8} = 0{,}75/6{,}0 + 0{,}5/3{,}0 + 0{,}5/3{,}0 + 0{,}5/3{,}0.$$

За цими даними складені матриці нечітких відношень переваги $R_i,\ i = \overline{1{,}8}$:

$$\mu_{R1} = \begin{array}{c|cccc} F_1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0{,}15 & 0{,}25 \\ a_2 & 0 & 1 & 0{,}15 & 0{,}25 \end{array} \qquad \mu_{R2} = \begin{array}{c|cccc} F_2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \end{array}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_3$ | 0 | 0 | 1 | 0,1 |
| $a_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_3$ | 0 | 0 | 1 | 0,5 |
| $a_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

$\mu_{R3} =$

| $F_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 0 | 0,8 | 0,9 |
| $a_2$ | 0,1 | 1 | 0,9 | 1,0 |
| $a_3$ | 0 | 0 | 1 | 0,1 |
| $a_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

$\mu_{R4} =$

| $F_4$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 0,65 | 0,65 | 0,15 |
| $a_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $a_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $a_4$ | 0 | 0,5 | 0,5 | 1 |

$\mu_{R5} =$

| $F_5$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 0 | 0, | 0 |
| $a_2$ | 0,85 | 1 | 0 | 0,25 |
| $a_3$ | 0,85 | 0 | 1 | 0,25 |
| $a_4$ | 0,6 | 0 | 0 | 1 |

$\mu_{R6} =$

| $F_6$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 0,05 | 0 | 0 |
| $a_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $a_3$ | 0,5 | 0,55 | 1 | 0 |
| $a_4$ | 0,65 | 0,7 | 0,15 | 1 |

$\mu_{R7} =$

| $F_7$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 0,7 | 0,85 | 0,2 |
| $a_2$ | 0 | 1 | 0,15 | 0 |
| $a_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $a_4$ | 0 | 0,5 | 0,65 | 1 |

$\mu_{R8} =$

| $F_8$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 0,25 | 0,25 | 0,25 |
| $a_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $a_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $a_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

Завдання вибору вирішується відповідно до описаної вище процедури.

Будуємо нечітке відношення $Q_1 = R_1 R_2 \ldots R_8$:

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 |

$$\mu_{Q1}(a_i, a_j) = \begin{array}{c|cccc} a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив на множині {A,}:

$$\mu_{Q1}^{нд}(a_i) = 1 - \sup_{a_i \in A}\left(\mu_{Q1}(a_j, a_i) - \mu_{Q1}(a_i, a_j)\right)$$

за всіма парами *i* та *j*:

$\mu_{Q1}^{нд}(a_1) = 1 -$

$-\sup\left(\mu_{Q1}(a_2, a_1) - \mu_{Q1}(a_1, a_2), \mu_{Q1}(a_3, a_1) - \mu_{Q1}(a_1, a_3), \mu_{Q1}(a_4, a_1) - \mu_{Q1}(a_1, a_4)\right)$

$= 1;$

$\mu_{Q1}^{нд}(a_2) = 1 -$

$-\sup\left(\mu_{Q1}(a_1, a_2) - \mu_{Q1}(a_2, a_1), \mu_{Q1}(a_3, a_2) - \mu_{Q1}(a_2, a_3), \mu_{Q1}(a_4, a_2) - \mu_{Q1}(a_2, a_4)\right)$

$= 1;$

$\mu_{Q1}^{нд}(a_3) = 1 -$

$-\sup\left(\mu_{Q1}(a_1, a_3) - \mu_{Q1}(a_3, a_1), \mu_{Q1}(a_2, a_3) - \mu_{Q1}(a_3, a_2), \mu_{Q1}(a_4, a_3) - \mu_{Q1}(a_3, a_4)\right)$

$= 1;$

$\mu_{Q1}^{нд}(a_4) = 1 -$

$-\sup\left(\mu_{Q1}(a_1, a_4) - \mu_{Q1}(a_4, a_1), \mu_{Q1}(a_2, a_4) - \mu_{Q1}(a_4, a_2), \mu_{Q1}(a_3, a_4) - \mu_{Q1}(a_4, a_3)\right)$

$= 1;$

Таким чином, $\mu_{Q_1}{}^{id} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Будуємо відношення $Q_2$ : $\mu_{Q2}(a_i, a_j) = \sum_{k=1}^{8} w_k \mu_{R1}(a_i, a_j)$.

Коефіцієнти відносної важливості критеріїв $w_k$ мають такі значення:

$$w_1 = 0{,}23;\ w_2 = 0{,}09;\ w_3 = 0{,}04;\ w_4 = 0{,}23;\ w_5 = 0{,}04;\ w_6 = 0{,}09;$$
$$w_7 = 0{,}23;\ w_8 = 0{,}04.$$

Визначимо нечітке відношення $Q_2$ :

$$\mu_{Q2}(a_i, a_j) = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 0,325 & 0,427 & 0,229 \\ a_2 & 0,038 & 1 & 0,105 & 0,152 \\ a_3 & 0,079 & 0,05 & 1 & 0,082 \\ a_4 & 0,082 & 0,293 & 0,278 & 1 \end{array}$$

Знаходимо підмножину недомінованих альтернатив множини $A$:

$$\mu_{Q1}^{нд}(a_i) = 1 - \sup_{a_i \in A} \left( \mu_{Q2}(a_j, a_i) - \mu_{Q2}(a_i, a_j) \right)$$

за всіма парами *i* та *j*: $\mu_{Q_2}{}^{нд} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 1 & 0,712 & 0,652 & 0,854 \end{vmatrix}.$

3. Результуючою множиною недомінованих альтернатив є переріз недомінованих множин:

$$\mu_{Q1}^{нд} \cap \mu_{Q2}^{нд} = \{(1;1;1;1) \cap (1;0,712;0,652;0,854)\} = \{1;0,712;0,652;0,854\}.$$

4. Отже, раціональним слід вважати вибір альтернативи $a_1$, що має максимальний ступінь недомінованості.

**Контрольні запитання**

1. Яка множина називається нечіткою?
2. Які ви знаєте способи задання нечітких множин?
3. Як виконуються основні операції на нечітких множинах?
4. У яких випадках у задачах прийняття рішень доцільне застосування нечітких множин?
5. Яким чином визначається краще рішення на нечітких множинах?

6. Якого типу бувають нечіткі логічні виводи?

7. З яких кроків складається алгоритм нечіткого виводу?

8. Як визначаються нечіткі цілі та нечіткі обмеження?

9. У чому полягає принцип прийняття оптимального рішення за Беллманом – Заде?

10. Як визначається значення функції належності за нечіткого виводу?

11. Як визначається значення загального критерію в багатокритеріальних задачах прийняття рішень?

12. Як визначається краща альтернатива в задачах багатокритеріального аналізу?

13. Опишіть реалізацію методу аналізу ієрархій Сааті із застосуванням теорії нечітких множин.

14. Наведіть приклади застосування теорії нечітких множин для задач прийняття рішень.

## Список літератури

1. Василенко В. О. Теорія і практика розробки управлінських рішень : навч. посібник / В. О. Василенко. – Київ : ЦУЛ, 2003. – 420 с.

2. Вітлінський В. В. Аналіз ризиків. – Київ : КНЕУ, 2002. – 198 с.

3. Гнатієнко Г. М. Експертні технології прийняття рішень : монографія. / Г. М. Гнатієнко, В. Є. Снитюк. – Київ : ТОВ «Маклаут», 2008. – 444 с.

4. Приймак В. М. Прийняття управлінських рішень : навч. посібник. – Київ : Атіка, 2008. – 240 с.

5. Демиденко М. А. Системи підтримки прийняття рішень : навч. посібник [Електрон. дані]. – Дніпропетровськ : Нац. гірн. ун-т, 2016. 104 с. – Режим доступу: http://kist.ntu.edu.ua/textPhD/sppr2.pdf (дата звернення: 01.10.2023).

6. Кушлик-Дивульська О. І., Кушлик Б. Р. Основи теорії прийняття рішень. – Київ : НТУУ «КПІ», 2014. – 94 с.

7. Бутко М. П. Теорія прийняття рішень / М. П. Бутко, І. М. Бутко, В. П. Мащенко, М. І. Мурашко, Л. Д. Оліфіренко, Т. В. Пепа, Г. М. Самійленко. – Київ : Центр учбової літератури, 2015. – Режим доступу: https://duikt.edu.ua/ua/lib/1/category/96/view/101 (дата звернення: 01.10.2023).

8. Нестеренко О. В. Інтелектуальні системи підтримки прийняття рішень : навч. посібник / О. В. Нестеренко, О. І. Савенков, О. О. Фаловський ; за ред. П. І. Бідюка. – Київ : Національна академія управління, 2016. – 188 с.

9. Акуленко К. Ю. Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Теорія прийняття рішень» для студентів спеціальності 122 «Компютерні науки» денної форми навчання. – Рівне : НУВГП, 2017. – 51 с.

10. Негрей М. В. Теорія прийняття рішень : навч. посібник / М. В. Негрей, К. Л. Тужик. – Київ : Центр учбової літератури, 2019. – 272 с.

11. Катренко А. В. Прийняття рішень: теорія та практика : підручник / А. В. Катренко, В. В. Пасічник. – Львів: Новий Світ – 2000, 2020. – 447 с.

12. Ізмайлова О. В. Методи прийняття багатокритеріальних рішень в інформаційних системах : навч. посібник. – Київ : КНУБА, 2002. – 112 с.

Навчальне видання

**ГОРДА** Олена Володимирівна

# ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

У двох частинах
Частина 2

Редагування та коректура *Т. В. Івченко*
Комп’ютерне верстання *Л. В. Лабунець*

Підписано до друку 26.04.2024. Формат $60 \times 84_{1/16}$
Ум. друк. арк. 8,37. Обл.-вид. акр. 9,0.
Електронний документ. Вид. № 11/І-24

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

проспект Повітряних Сил, 31, Київ, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002