

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Київський національний університет будівництва і архітектури

## **РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ**

Методичні вказівки  
до виконання розрахунково-графічної роботи  
для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»  
освітньої програми «Менеджмент організацій і адміністрування»

Київ 2023

УДК 624.01/07  
Р64

Укладачі: І.Д. Кара, канд. техн. наук, доцент;  
Г.А. Затилюк, д-р філософії;  
Р.Л. Стригун, канд. техн. наук

Рецензент О.В. Костіна, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск П. П. Лізунов, д-р техн. наук, професор

*Затверджено на засіданні кафедри будівельної механіки,  
протокол №7 від 1 березня 2023 року.*

В авторській редакції.

**Розрахунок** плоских статично визначуваних стержневих  
Р64 систем : методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної  
роботи / уклад.: І.Д. Кара, Г.А. Затилюк, Р.Л. Стригун. – Київ :  
КНУБА, 2023. – 28 с.

Містять короткі теоретичні відомості, методичні вказівки,  
приклад індивідуального завдання та розрахунку статично  
визначуваних стержневих систем: ферми, балки та простих рам.

Призначено для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»  
освітньої програми «Менеджмент організацій і адміністрування».

© КНУБА, 2023

## ЗМІСТ

Загальні положення .....	4
Короткі теоретичні відомості .....	5
Приклад індивідуального завдання .....	13
Приклад виконання розрахунково-графічної роботи .....	15
Розрахунок ферми .....	15
Розрахунок балки на двох опорах .....	17
Розрахунок консольної рами .....	19
Розрахунок балкової рами .....	22
Список літератури .....	26

## Загальні положення

Для розв'язання складних спеціалізованих задач та практичних проблем, які виникають в процесі функціонування будівельних організацій, керівники та менеджери повинні мати необхідні знання зі сфери будівельного виробництва та методів розрахунку інженерних конструкцій. Будівельна механіка є базовою дисципліною в сфері проектування споруд. Вона розробляє методи розрахунку інженерних конструкцій і споруд на міцність, жорсткість і стійкість. Знання, отримані у процесі вивчення цієї дисципліни, майбутні управлінці можуть використовувати у подальшому проходженні курсів будівельних конструкцій та в майбутній практичній діяльності.

Методичні вказівки розроблені для допомоги здобувачам освітньої програми «Менеджмент організацій і адміністрування» при виконанні розрахунково-графічної роботи. Необхідний теоретичний матеріал також виствітлений в навчальній літературі [1-4]. Методичні вказівки складаються з: коротких теоретичних відомостей, прикладу індивідуального завдання та прикладу розрахунку статично визначуваних стержневих систем.

Розрахунково-графічна робота оформляється здобувачем охайно з однієї сторони аркуша формату А4. Титульний лист є першим аркушем роботи. Після титульного листа вкладається видане завдання, після чого робота скріплюється.

## КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Під час розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість реальну будівлю приводять до її спрощеного вигляду шляхом ігнорування менш важливих факторів. Така схема є **розрахунковою схемою** споруди.

У процесі експлуатації на інженерну споруду діють зовнішні навантаження і впливи, що спричиняє деформацію їх елементів та виникнення переміщень.

**Сила** є фізичною величиною, яка визначає кількісну міру механічної взаємодії тіл між собою. В Міжнародній системі одиниць СІ сила вимірюється в ньютонках –  $1H$  ( $1кН=10^3H$ ). Сукупність сил, що діють на тіло, є системою сил (рис. 1).

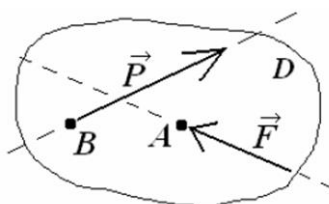


Рис. 1

Оскільки сила є векторною величиною, то на площині її визначають: модуль (абсолютна величина), напрямок та лінія дії. Для аналітичного визначення сили спочатку необхідно обрати систему координат, в якій будуть задаватись проєкції сили. Зазвичай використовують декартову систему координат з взаємно перпендикулярними осями  $x$  та  $y$  в площині. Проєкцією сили на вісь є добуток модуля сили на косинус направляючого кута до відповідної осі (рис. 2).

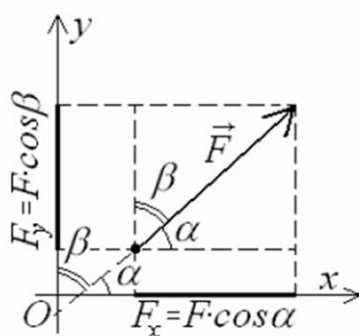


Рис. 2

**Рівномірно розподілене навантаження** – суцільне навантаження постійної інтенсивності, прикладене на певній довжині конструкції (рис. 3). Такий вид навантаження має розмірність сили, віднесеної до довжини:  $H/м$  ( $кН/м$ ).

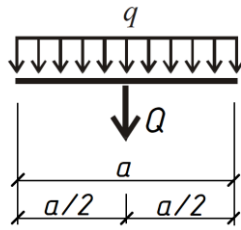


Рис. 3

Рівнодійна рівномірно розподіленого навантаження  $Q$  (рис. 3) дорівнює добутку інтенсивності навантаження  $q$  на відстань  $a$ , по якій воно розподіляється:

$$Q = q \cdot a. \quad (1)$$

**Момент сили відносно точки** – це добуток модуля сили на плече. **Плече** – це найменша відстань від точки, відносно якої визначають момент, до лінії дії сили.

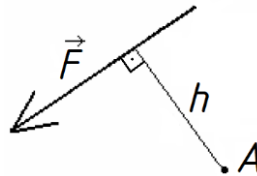


Рис. 4

Момент сили  $\vec{F}$  відносно точки  $A$ :

$$M_A(\vec{F}) = \pm F \cdot h, \quad (2)$$

де  $h$  – плече від т.  $A$  до лінії дії сили  $\vec{F}$  (рис. 4).

Складаючи рівняння суми моментів відносно точки (центра моменту), приймають момент сили додатним, якщо сила намагається повернути тіло в напрямі руху годинникової стрілки, а від'ємним – проти обертання годинникової стрілки; або навпаки.

Момент сили має розмірність добутку одиниці сили на одиницю довжини –  $H \cdot m$  ( $\kappa H \cdot m$ ). Якщо силу  $\vec{F}$  переміщувати вздовж лінії її дії, то її момент відносно точки  $A$  буде залишатися незмінним. Якщо лінія дії сили  $\vec{F}$  проходить через точку  $A$  – момент сили відносно цієї точки дорівнюватиме нулю.

**Статичний розрахунок** споруди полягає у визначенні сил, які виникають в її елементах під впливом прикладених до цієї споруди зовнішніх навантажень. Його можна поділити на два етапи:

1) визначення реакцій у в'язях, зокрема опорних реакцій (зовнішня задача);

2) визначення внутрішніх зусиль: згинальних моментів, поперечних та поздовжніх зусиль, які виникають в елементах споруди в процесі їх деформування (внутрішня задача).

Конструктивними елементами розрахункових схем є диски та з'єднувальні пристрої. **Диск** – це частина розрахункової схеми, геометрична незмінюваність якої заздалегідь задана або доведена. Вся система також може бути диском, якщо вона напевно є геометрично незмінюваною. **З'єднувальний пристрій** (з'єднання) – це елемент розрахункової схеми, який певним чином обмежує взаємне переміщення дисків, що з'єднуються цим пристроєм, зменшуючи ступінь вільності схеми. У плоских розрахункових схемах використовуються такі типи з'єднань: кінематична в'язь, простий циліндричний шарнір, муфта і проста припайка. Якщо з'єднувальний пристрій приєднує систему чи її елемент до диска «земля», тоді він має назву **опорний пристрій** (опора).

**Кінематична в'язь  $C_1$**  (рис. 5а) – це з'єднувальний пристрій, який приєднує два диски і унеможливорює поступальне переміщення одного диска відносно іншого вздовж осі в'язі. Таке з'єднання дозволяє взаємний поворот  $\Delta_1$  дисків та взаємне лінійне переміщення  $\Delta_2$  по нормалі до осі в'язі, усуваючи один ступінь вільності. У кінематичній в'язі виникає реакція (реактивна сила)  $R$ , лінія дії якої проходить через точки шарнірного приєднання в'язі до дисків (рис. 5б).

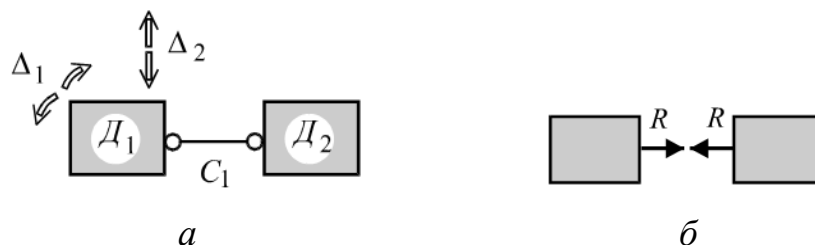


Рис. 5

Опорним пристроєм, який відповідає кінематичній в'язі, є **шарнірно-рухома опора** (рис. 6а,б,в) в якій виникає опорна реакція  $R_A$  (рис. 6г).

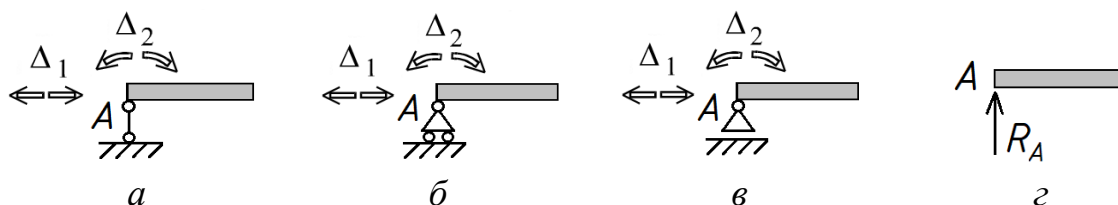


Рис. 6

**Простий циліндричний шарнір  $Ш_1$**  (рис. 7а) – це з'єднання двох дисків, яке перешкоджає взаємним поступальним переміщенням цих дисків, допускаючи їх взаємний поворот  $\Delta$  відносно осі, що проходить через центр

шарніра. Цей пристрій зменшує кількість ступенів вільності на два. В шарнірі виникає реакція  $R$ , лінія дії якої проходить через центр пристрою, але має заздалегідь невідомий напрямок (рис. 7б). Тому при виконанні розрахунків її зазвичай замінюють на дві складові: горизонтальну  $H$  і вертикальну  $V$  (рис. 7в).

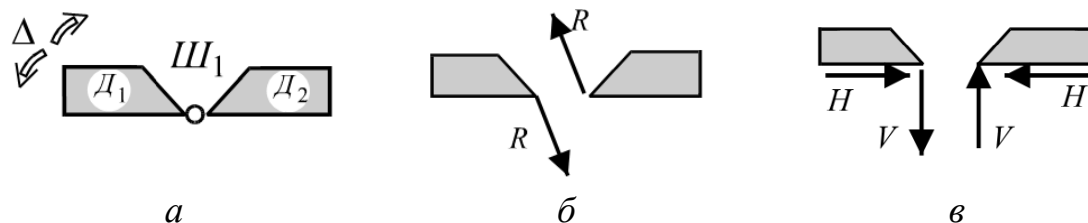


Рис. 7

Еквівалентною до простого шарніра є **шарнірно-нерухома опора** (рис. 8а,б,в,г). В цій опорі також виникає реакція, яка може бути замінена на горизонтальну і вертикальну компоненти:  $H_B$  і  $V_B$  (рис. 8д).

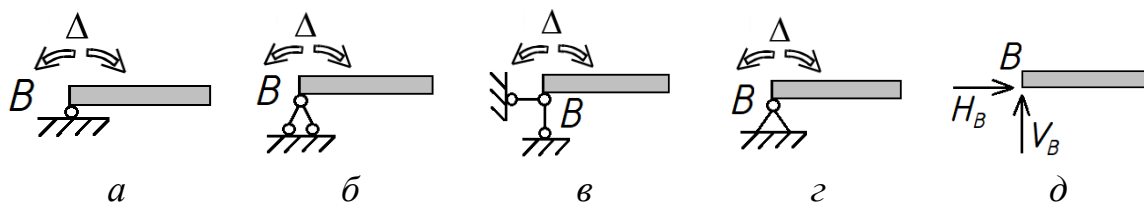


Рис. 8

**Муфта  $M_I$**  (рис. 9а) – це пристрій, що з'єднує два диски і дозволяє поступальне переміщення  $\Delta$  вздовж фіксованої прямої. Це з'єднання усуває два ступені вільності. В муфті виникає реакція  $R$ , лінія дії якої є перпендикулярною до можливого переміщення та проходить з ексцентриситетом  $e$  відносно центра  $K$  муфти (рис. 9б). В аналітичних розрахунках цю реакцію представляють як дві складові: реакцію  $R_K$  та реактивний момент  $M_K$ , які прикладені до центра з'єднання (рис. 9в).

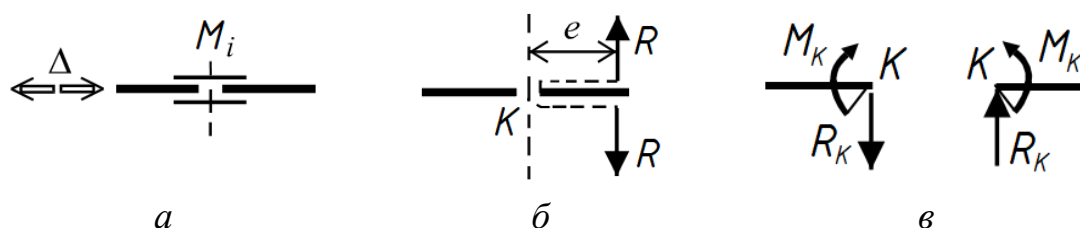


Рис. 9

**Повзун** (рис. 10а) є опорним пристроєм, який еквівалентний до муфти. Опорна реакція в повзуні аналогічно представляється як зосереджена сила та реактивний момент (рис. 10б).

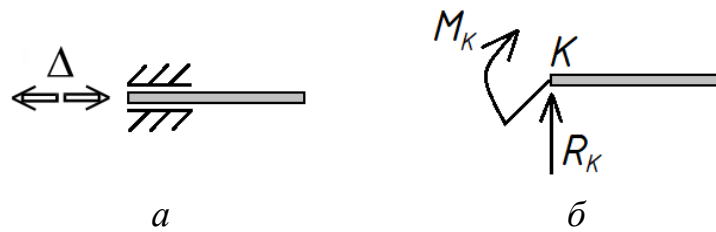


Рис. 10

**Проста припайка  $\Pi_i$**  (рис. 11а) – це з'єднання двох дисків, яке унеможливило їх взаємні лінійні та кутові переміщення. Цей пристрій зменшує кількість ступенів вільності на три. Реакція  $R$  в припайці має заздалегідь невідому лінію дії та ексцентриситет  $e$  відносно центра припайки  $O$  (рис. 11б). Тому її для зручності розкладають на три частини, які прикладені в центрі з'єднувального пристрою: горизонтальну реакцію  $H_0$ , вертикальну реакцію  $V_0$  та реактивний момент  $M_0$  (рис. 11в).

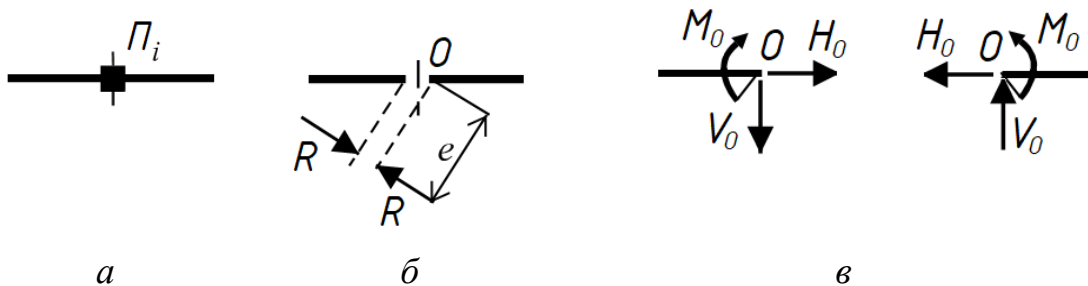


Рис. 11

Опорним пристроєм, ідентичним до простої припайки, є **жорстке затиснення** (рис. 12а), реакцію в якому також зручно замінити на дві взаємно перпендикулярні сили та реактивний момент (рис. 12б).

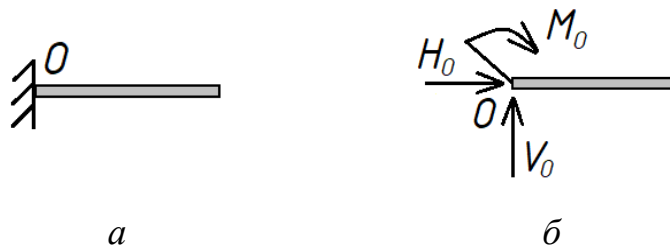


Рис. 12

Для визначення опорних реакцій та зусиль взаємодії дисків в площині можна скласти три незалежні рівняння рівноваги. Якщо плоска система сил знаходиться в рівновазі, то алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на дві взаємно перпендикулярні осі та алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки на площині мають дорівнювати нулю:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_K(F_i) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Під час розв'язання деяких задач буває доцільно замінити одне або два рівняння проєкцій сил на осі рівняннями моментів відносно точки:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_K(F_i) = 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_K(F_i) = 0. \end{cases}$$

У випадку використання останньої системи всі три точки  $A$ ,  $B$  і  $K$  не повинні лежати на одній прямій.

Будівельна механіка у вузькому розумінні розглядає **стержневі системи** – механічні системи, які складені зі стержнів. До таких систем належать, зокрема, ферми, балки та рами.

**Ферма** є стержневою конструкцією, яка складається із прямолінійних стержнів, з'єднаних між собою у вузлах наскрізними шарнірами (рис. 13).

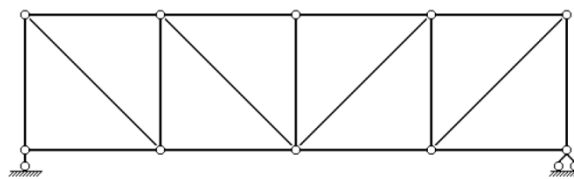


Рис. 13

Навантаження на ферми прикладається лише у вузлах, в результаті чого в стержнях ферм виникають лише поздовжні зусилля. Найпоширенішими способами для визначення цих зусиль є: **спосіб вирізання вузлів**, при якому замкненим перерізом відділяється від ферми один вузол, та **спосіб наскрізних перерізів**, який дозволяє відділити довільну частину ферми.

**Балка** – це стержнева конструкція, довжина якої набагато більша за ширину та висоту і яка працює переважно на згин (рис. 14а,б).



Рис. 14

Конструкція, яка складається з прямолінійних стержнів, які у всіх або деяких вузлах жорстко поєднуються, між собою є **рамою** (рис. 15а,б).

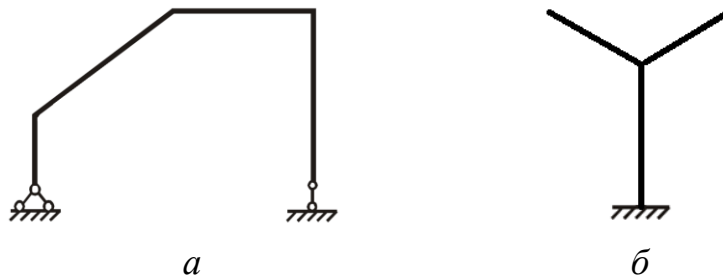


Рис. 15

В перерізах балки та рами виникають внутрішні зусилля: згинальний момент  $M$ , поперечне зусилля  $Q$  і подовжнє зусилля  $N$ . Зазвичай на балку діє лише вертикальне навантаження, тому подовжні зусилля в ній є нульовими. Графік розподілу зусилля по довжині стержня має назву **епюра** внутрішнього зусилля.

Згинальний момент  $M$  в перерізі  $k$  дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил, що діють на конструкцію по один бік від перерізу, відносно центру перерізу:

$$M_k = \sum M_k^{ліє} \text{ або } M_k = \sum M_k^{прав} .$$

Поперечне зусилля  $Q$  в перерізі  $k$  дорівнює сумі проєкцій всіх сил, які прикладені до системи з одного боку від перерізу, на нормаль  $n$  до осі стержня, через який проходить переріз:

$$Q_k = \sum F_{nk}^{ліє} \text{ або } Q_k = \sum F_{nk}^{прав} .$$

Поздовжнє зусилля  $N$  в перерізі  $k$  визначається як сума проєкцій всіх сил, які діють на конструкцію по один бік від перерізу, на дотичну  $s$  до осі стержня в перерізі:

$$N_k = \sum F_{sk}^{ліє} \text{ або } N_k = \sum F_{sk}^{прав} .$$

Значення внутрішніх зусиль на епюрах слід відкладати перпендикулярно до осі стержня, якому належить переріз. Ординати на епюрі згинальних моментів відкладаються з боку розтягнутих волокон. Поперечне зусилля вважається додатним, якщо намагається повернути стержень в напрямі руху годинникової стрілки. Якщо сумарне подовжнє

зусилля викликає розтяг стержня у перерізі, тоді воно вважається додатним. Значення на епюрах  $N$  і  $Q$  можна відкладати з будь-якого боку стержня із позначенням у кружечках знаків зусиль на кожному елементі. Штрихуються епюри тонкими лініями перпендикулярно осям стержнів.

Після побудови епюр необхідно виконати їх перевірки. **Перевірка рівноваги вирізаних вузлів** рами полягає в перевірці виконання умов рівноваги частин системи, отриманих проведенням перерізів, розташованих на нескінченно малих відстанях від точок з'єднання стержнів. **Перевірка відповідності між епюрами  $M$  і  $Q$**  виконується для балок і рам. Вона полягає у визначенні значень поперечних зусиль, використовуючи значення епюри згинальних моментів: значення зусилля  $Q$  дорівнює тангенсу кута нахилу епюри  $M$  до осі стержня. На ділянках, де епюра моментів має прямолінійний характер, поперечне зусилля є додатним, якщо поворот від осі стержня до епюри  $M$  відбувається в напрямі обертання годинникової стрілки. Для виконання цієї перевірки на ділянках, де епюра моментів змінюється за криволінійним законом, необхідно розглядати рівновагу вирізаного елемента системи з прикладеним навантаженням, моментами на кінцях та невідомими поперечними зусиллями. У випадку, якщо епюра  $Q$  на ділянці змінює знак, в цьому перерізі епюра моментів повинна мати екстремум.

Для визначення переміщення необхідно створити допоміжний стан системи, прибравши зовнішнє навантаження та приклавши узагальнену силу, яка відповідає переміщенню: горизонтальному зсуву відповідає одинична горизонтальна сила; вертикальному прогину – одинична вертикальна сила. В рамних системах переважають деформації згину, тому достатньо побудувати лише одиничну епюру згинальних моментів  $M_1$  та обчислити переміщення  $\Delta_{1P}$  за спрощеною формулою Максвелла-Мора:

$$\Delta_{1P} = \sum \int_l \frac{M_1 \cdot M}{EI} dx, \quad (4)$$

де  $l$  – довжина ділянки інтегрування.

## ПРИКЛАД ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

(лицева сторона завдання)

<b>1</b>												
		<p style="text-align: center;">Обчислити горизонтальний зсув т.К</p>										
<i>d, м</i>	<i>h, м</i>	<i>a, м</i>	<i>b, м</i>	<i>c, м</i>	<i>l<sub>1</sub>, м</i>	<i>l<sub>2</sub>, м</i>	<i>h<sub>1</sub>, м</i>	<i>F, кН</i>	<i>M, кНм</i>	<i>q, кН/м</i>	<i>P<sub>1</sub>, кН</i>	<i>n</i>
2	2	4	2	6	2	5	3	5	4	3	8	<u>2</u>
<u>4</u>	<u>5</u>	5	3	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>6</u>	<u>4</u>	3	6	6	10	3
2	4	<u>6</u>	<u>4</u>	4	6	4	7	9	5	8	12	4
5	5	2	5	3	3	2	4	<u>7</u>	<u>9</u>	4	14	2
2	3	3	7	4	2	1	5	1	7	<u>2</u>	<u>5</u>	3

Підкреслені значення в таблиці визначають дані, які задає викладач кожному студенту для подальших розрахунків.

(зворотна сторона завдання)

## СКЛАД РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

### Розрахунок ферми

1. Виконати кінематичний аналіз.
2. Визначити опорні реакції та обчислити зусилля у позначених стержнях.

### Розрахунок балки на двох опорах

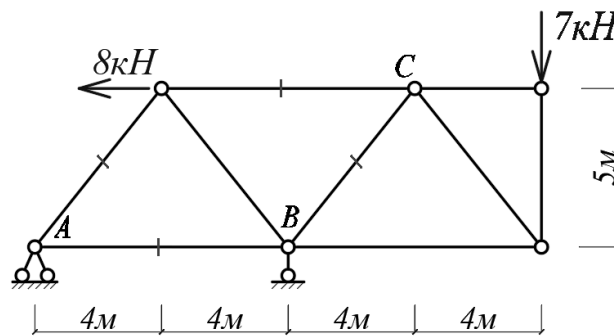
1. Виконати кінематичний аналіз.
2. Визначити опорні реакції.
3. Побудувати епюри внутрішніх зусиль: згинальних моментів та поперечних зусиль.
4. Виконати перевірку відповідності між епюрами  $M$  і  $Q$ .

### Розрахунок рам

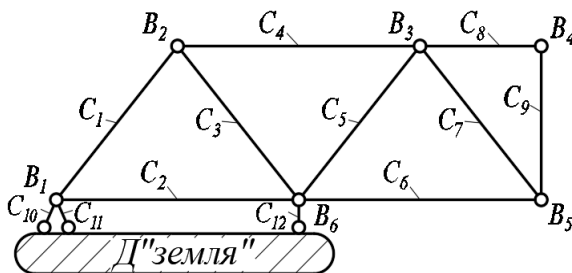
1. Виконати кінематичний аналіз.
2. Визначити опорні реакції.
3. Побудувати епюри внутрішніх зусиль: згинальних моментів, поперечних та поздовжніх зусиль.
4. Виконати перевірки епюр.
4. Для балкової рами:
  - створити одиничний стан, що відповідає переміщенню, яке потрібно знайти;
  - побудувати епюру згинальних моментів в допоміжному стані;
  - обчислити задане переміщення за формулою Максвелла-Мора.

# ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

## Розрахунок ферми



### 1. Кінематичний аналіз.



1.1 Кількісний етап:

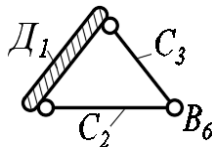
$$B = 0, C = 3.$$

$$\Gamma = 2 \cdot B - C = 2 \cdot 6 - 12 = 0.$$

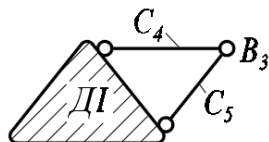
Система має мінімально необхідну кількість в'язей.

1.2 Якісний етап:

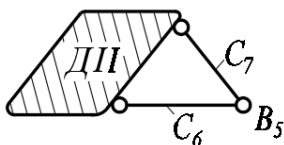
Представимо стержень  $C_1$  як диск  $D_1$ :



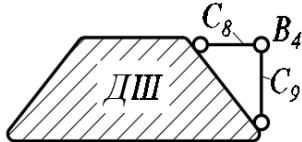
$$\frac{D_1 + B_6}{C_2, C_3} = D I \text{ (спосіб «діад»);}$$



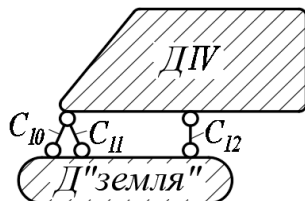
$$\frac{D I + B_3}{C_4, C_5} = D II \text{ (спосіб «діад»);}$$



$$\frac{D II + B_5}{C_6, C_7} = D III \text{ (спосіб «діад»);}$$



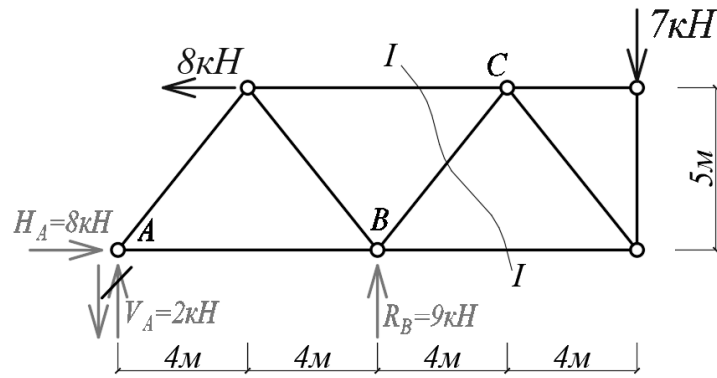
$$\frac{D III + B_4}{C_8, C_9} = D IV \text{ (спосіб «діад»);}$$



$$\frac{D IV + D'' \text{земля}''}{C_{10}, C_{11}, C_{12}} = D IV \text{ (спосіб Шухова).}$$

Висновок: система геометрично незмінювана, статично визначувана.

### 2. Визначення опорних реакцій.



$$\sum F_x = 0: H_A - 8 = 0; H_A = 8кН.$$

$$\sum M_A = 0: -8 \cdot 5 + 7 \cdot 16 - R_B \cdot 8 = 0; R_B = \frac{72}{8} = 9кН.$$

$$\sum F_y = 0: V_A - 7 + 9 = 0; V_A = -2кН.$$

Перевірка:

$$\sum M_C = -8 \cdot 5 - 2 \cdot 12 + 9 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 64 - 64 = 0.$$

### 3. Визначення зусиль в позначених стержнях.

Виконаємо переріз I-I і розглянемо праву частину:

$$\sum M_B = 0: -R_4 \cdot 5 + 7 \cdot 8 = 0;$$

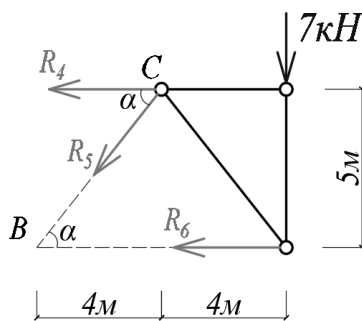
$$R_4 = \frac{56}{5} = 11,2кН.$$

$$\alpha = \arctg \frac{5}{4} = 51,34^\circ$$

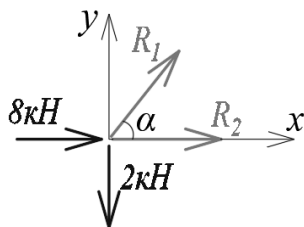
$$\cos \alpha = 0,6247; \sin \alpha = 0,7809.$$

$$\sum F_y = 0: -R_5 \cdot \sin \alpha - 7 = 0;$$

$$R_5 = -\frac{7}{0,7809} = -8,964кН.$$



Виріжемо вузол A:



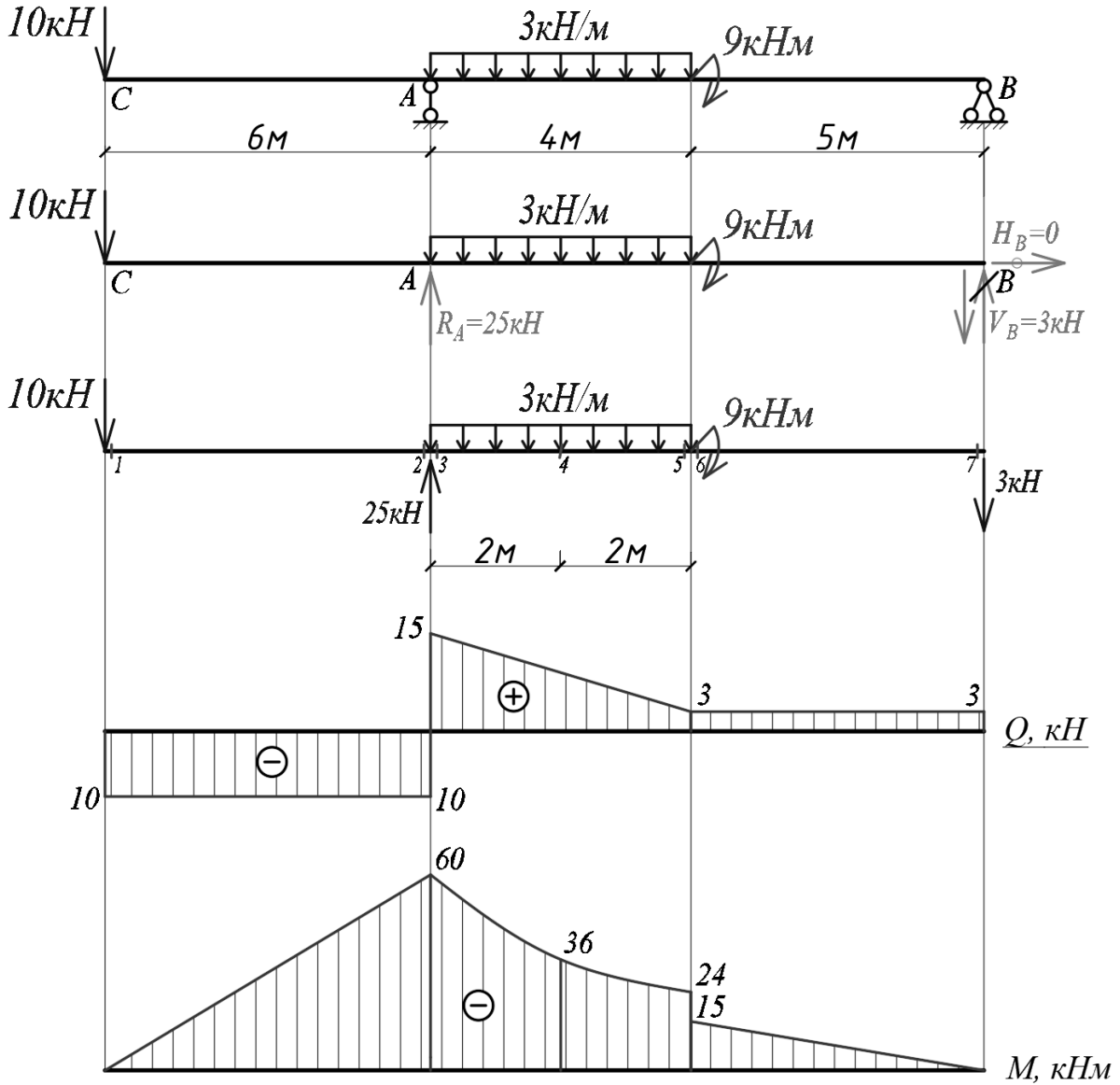
$$\sum F_y = 0: -2 + R_1 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$R_1 = \frac{2}{0,7809} = 2,561кН.$$

$$\sum F_x = 0: 8 + R_2 + 2,561 \cdot \cos \alpha = 0;$$

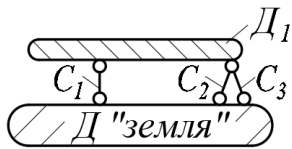
$$R_2 = -9,6кН.$$

## Розрахунок балки на двох опорах



### 1. Кінематичний аналіз.

#### 1.1 Кількісний етап:



$$D = 2, B = 0, П = 0, Ш = 0, C = 3.$$

$$\Gamma = 3 \cdot D + 2 \cdot B - 3 \cdot П - 2 \cdot Ш - C = 3 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 3 = 6 - 6 = 0.$$

Система має мінімально необхідну кількість в'язей.

#### 1.2 Якісний етап:

$$\frac{D_1 + D \text{ "земля"}}{C_1, C_2, C_3} = D I \text{ (спосіб Шухова).}$$

Висновок: система геометрично незмінювана, статично визначувана.

### 2. Визначення опорних реакцій.

$$\sum F_x = 0: H_B = 0.$$

$$\sum M_A = 0: -10 \cdot 6 + (3 \cdot 4) \cdot 2 + 9 - V_B \cdot 9 = 0; R_B = -\frac{27}{9} = -3 \text{кН}.$$

$$\sum F_y = 0: -10 + R_A - (3 \cdot 4) - 3 = 0; R_A = 25 \text{кН}.$$

Перевірка:

$$\sum M_C = -25 \cdot 6 + (3 \cdot 4) \cdot 8 + 9 + 3 \cdot 15 = 150 - 150 = 0.$$

### 3. Побудова епюр внутрішніх зусиль.

$$Q_1 = -10 \text{кН},$$

$$M_1 = 0,$$

$$Q_2 = -10 \text{кН},$$

$$M_2^{лів} = -10 \cdot 6 = -60 \text{кНм},$$

$$Q_3 = -10 + 25 = +15 \text{кН},$$

$$M_3^{лів} = -10 \cdot 6 = -60 \text{кНм},$$

$$Q_5 = -10 + 25 - (3 \cdot 4) = +3 \text{кН},$$

$$M_4^{лів} = -10 \cdot 8 + 25 \cdot 2 - (3 \cdot 2) \cdot 1 =$$

$$Q_6 = +3 \text{кН},$$

$$= -36 \text{кНм},$$

$$Q_7 = +3 \text{кН}.$$

$$M_5^{лів} = -10 \cdot 10 + 25 \cdot 4 - (3 \cdot 4) \cdot 2 =$$

$$= -24 \text{кНм},$$

$$M_6^{лів} = -24 + 9 = -15 \text{кНм},$$

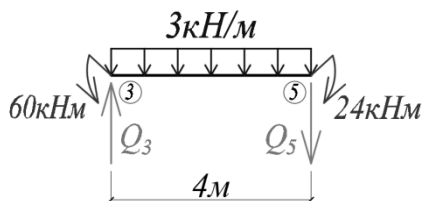
$$M_7 = 0.$$

### 4. Перевірка відповідності між епюрами $M$ і $Q$ .

$$Q_{1-2} = -\frac{60-0}{6} = -10 \text{кН};$$

$$Q_{6-7} = +\frac{15-0}{5} = +3 \text{кН};$$

$Q_{3-5}$ :



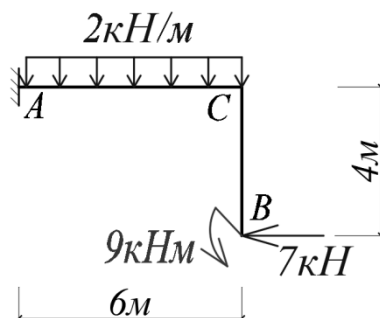
$$\sum M_3 = 0: -60 + (3 \cdot 4) \cdot 2 + Q_5 \cdot 4 + 24 = 0;$$

$$Q_5 = +\frac{12}{4} = +3 \text{кН}.$$

$$\sum M_5 = 0: -60 + Q_3 \cdot 4 - (3 \cdot 4) \cdot 2 + 24 = 0;$$

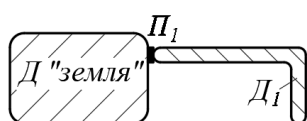
$$Q_3 = +\frac{60}{4} = +15 \text{кН}.$$

## Розрахунок консольної рами



### 1. Кінематичний аналіз.

#### 1.1 Кількісний етап:



$$D = 2, B = 0, P = 1, Ш = 0, C = 0.$$

$$\Gamma = 3 \cdot D + 2 \cdot B - 3 \cdot P - 2 \cdot Ш - C - 3 =$$

$$= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 0 - 3 = 6 - 6 = 0.$$

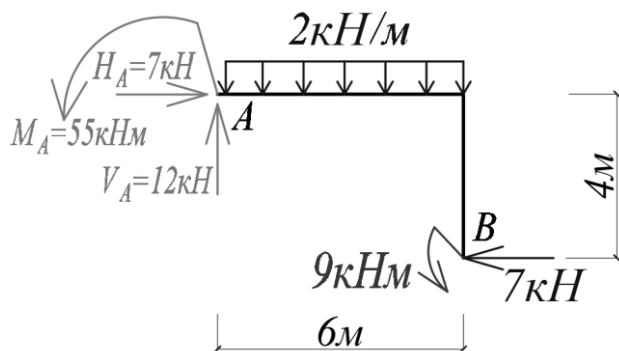
Система має мінімально необхідну кількість в'язей.

#### 1.2 Якісний етап:

$$\frac{D_1 + D \text{ "земля"}}{P_1} = D I \text{ (спосіб припайки).}$$

Висновок: система геометрично незмінювана, статично визначувана.

### 2. Визначення опорних реакцій.



$$\sum F_x = 0: H_A - 7 = 0; H_A = 7 \text{ кН.}$$

$$\sum F_y = 0: V_A - (2 \cdot 6) = 0;$$

$$V_A = 12 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0:$$

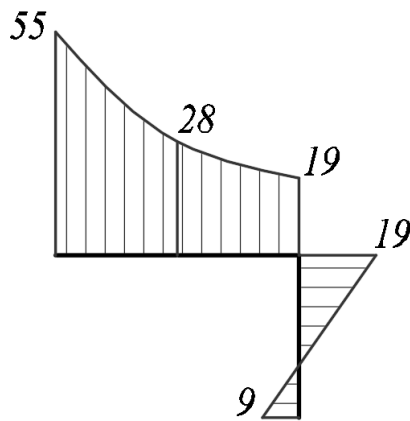
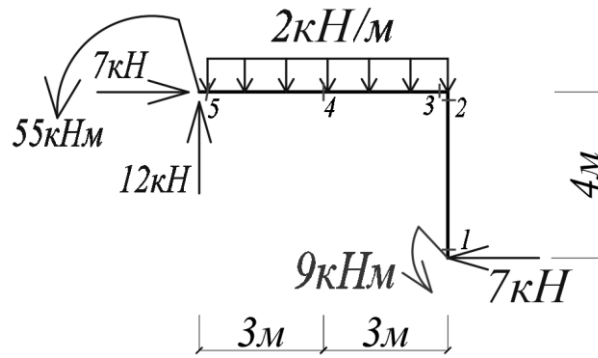
$$-M_A + (2 \cdot 6) \cdot 3 + 7 \cdot 4 - 9 = 0;$$

$$M_A = 55 \text{ кНм.}$$

Перевірка:

$$\sum M_B = -55 + 7 \cdot 4 + 12 \cdot 6 - (2 \cdot 6) \cdot 3 - 9 = 100 - 100 = 0.$$

### 3. Побудова епюр внутрішніх зусиль.



$$M_1^{ниж} = -9 \text{кНм},$$

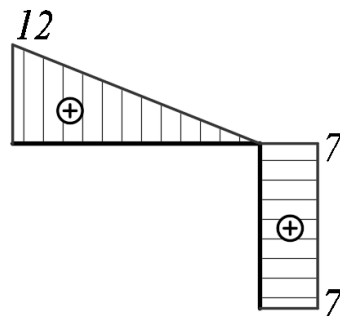
$$M_2^{ниж} = -9 + 7 \cdot 4 = +19 \text{кНм},$$

$$M_3^{прав} = -9 + 7 \cdot 4 = +19 \text{кНм},$$

$$M_4^{прав} = -9 + 7 \cdot 4 + (2 \cdot 3) \cdot 1,5 = +28 \text{кНм},$$

$$M_5^{прав} = -9 + 7 \cdot 4 + (2 \cdot 6) \cdot 3 = +55 \text{кНм}.$$

M, кНм



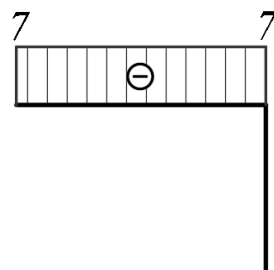
$$Q_1 = +7 \text{кН},$$

$$Q_2 = +7 \text{кН},$$

$$Q_3 = 0;$$

$$Q_5 = +(2 \cdot 6) = +12 \text{кН}.$$

Q, кН



$$N_1 = 0,$$

$$N_2 = 0,$$

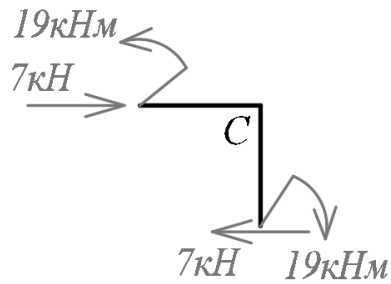
$$N_3 = -7 \text{кН},$$

$$N_5 = -7 \text{кН}.$$

N, кН

4. Перевірка рівноваги вирізаних вузлів рами.

Вузол С:



$$\sum F_x = 7 - 7 = 0,$$

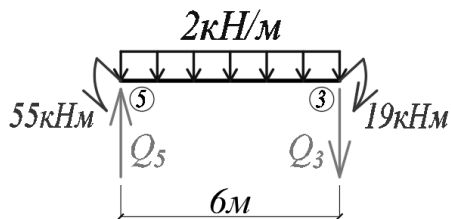
$$\sum F_y = 0,$$

$$\sum M_C = -19 + 19 = 0.$$

5. Перевірка відповідності між епюрами  $M$  і  $Q$ .

$$Q_{1-2} = + \frac{19 - (-9)}{4} = +7 \text{ кН};$$

$Q_{3-5}$ :



$$\sum M_5 = 0:$$

$$-55 + (2 \cdot 6) \cdot 3 + Q_3 \cdot 6 + 19 = 0;$$

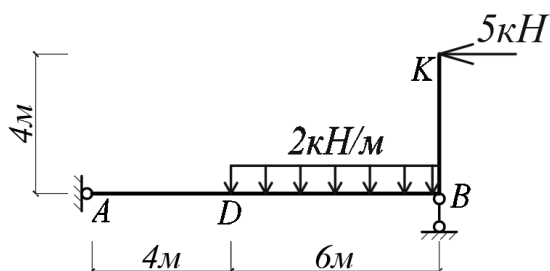
$$Q_3 = \frac{55 - 19}{6} = 0.$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$-55 + Q_5 \cdot 6 - (2 \cdot 6) \cdot 3 + 19 = 0;$$

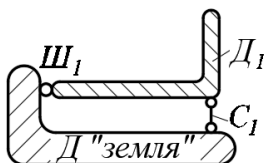
$$Q_5 = + \frac{72}{6} = +12 \text{ кН}.$$

## Розрахунок балкової рами



### 1. Кінематичний аналіз.

#### 1.1 Кількісний етап:



$$D = 2, B = 0, П = 0, Ш = 1, C = 1.$$

$$\Gamma = 3 \cdot D + 2 \cdot B - 3 \cdot П - 2 \cdot Ш - C - 3 =$$

$$= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 1 - 3 = 6 - 6 = 0.$$

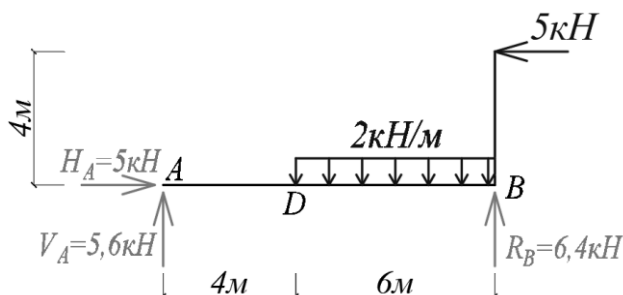
Система має мінімально необхідну кількість в'язей.

#### 1.2 Якісний етап:

$$\frac{D_1 + D_{\text{"земля"}}}{Ш_1, C_1} = D I \text{ (спосіб Полонсо).}$$

Висновок: система геометрично незмінювана, статично визначувана.

### 2. Визначення опорних реакцій.



$$\sum F_x = 0: H_A - 5 = 0; H_A = 5 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$(2 \cdot 6) \cdot 7 - 5 \cdot 4 - R_B \cdot 10 = 0;$$

$$R_B = \frac{64}{10} = 6,4 \text{ кН}.$$

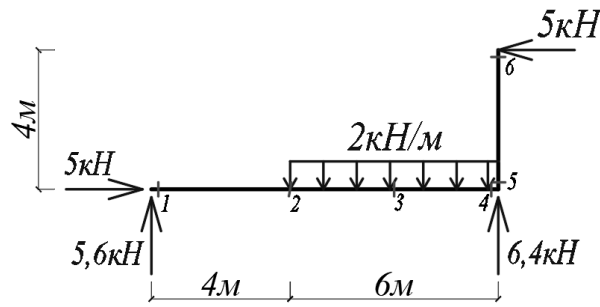
$$\sum F_y = 0: V_A - (2 \cdot 6) + 6,4 = 0;$$

$$V_A = 5,6 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum M_D = 5,6 \cdot 4 + (2 \cdot 6) \cdot 3 - 6,4 \cdot 6 - 5 \cdot 4 = 58,4 - 58,4 = 0.$$

### 3. Побудова епюр внутрішніх зусиль.



$$M_1 = 0,$$

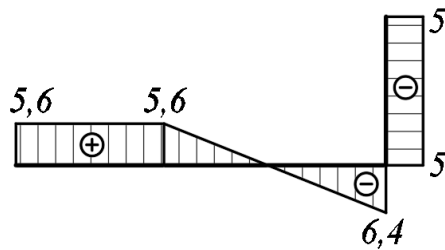
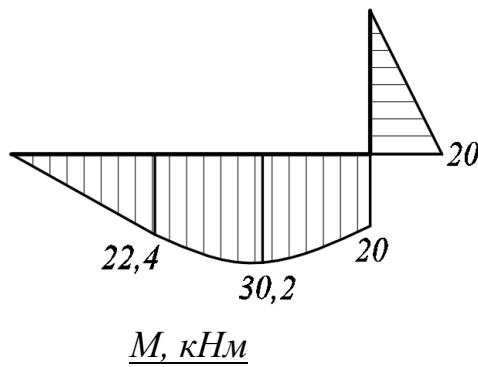
$$M_2^{лів} = +5,6 \cdot 4 = +22,4 \text{кНм},$$

$$M_3^{лів} = +5,6 \cdot 7 - (2 \cdot 3) \cdot 1,5 = +30,2 \text{кНм},$$

$$M_4^{лів} = +5,6 \cdot 10 - (2 \cdot 6) \cdot 3 = +20 \text{кНм},$$

$$M_6 = 0,$$

$$M_5^{єрх} = -5 \cdot 4 = -20 \text{кНм}.$$



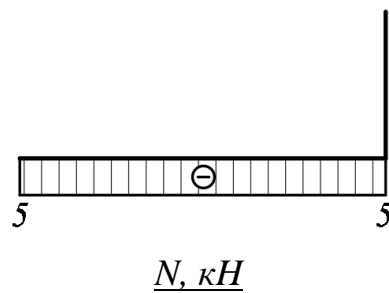
$$Q_1 = +5,6 \text{кН},$$

$$Q_2 = +5,6 \text{кН},$$

$$Q_4 = +5,6 - (2 \cdot 6) = -6,4 \text{кН},$$

$$Q_6 = -5 \text{кН},$$

$$Q_5 = -5 \text{кН}.$$



$$N_1 = -5 \text{кН},$$

$$N_2 = -5 \text{кН},$$

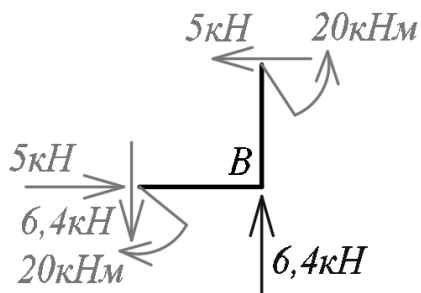
$$N_4 = -5 \text{кН},$$

$$N_6 = 0,$$

$$N_5 = 0.$$

4. Перевірка рівноваги вирізаних вузлів рами.

Вузол  $B$ :



$$\sum F_x = 5 - 5 = 0,$$

$$\sum F_y = -6,4 + 6,4 = 0,$$

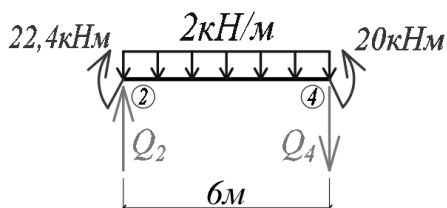
$$\sum M_B = 20 - 20 = 0.$$

5. Перевірка відповідності між епюрами  $M$  і  $Q$ .

$$Q_{1-2} = +\frac{22,4 - 0}{4} = +5,6 \text{ кН};$$

$$Q_{5-6} = -\frac{20 - 0}{4} = -5 \text{ кН};$$

$Q_{2-4}$ :



$$\sum M_2 = 0:$$

$$22,4 + (2 \cdot 6) \cdot 3 + Q_4 \cdot 6 - 20 = 0;$$

$$Q_4 = -\frac{38,4}{6} = -6,4 \text{ кН}.$$

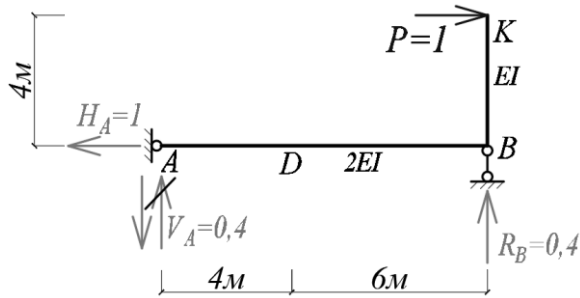
$$\sum M_4 = 0:$$

$$22,4 - (2 \cdot 6) \cdot 3 + Q_2 \cdot 6 - 20 = 0;$$

$$Q_2 = +\frac{33,6}{6} = +5,6 \text{ кН}.$$

6. Обчислення заданого переміщення (горизонтальний зсув т.К).

Створимо допоміжний стан, що відповідає шуканому переміщенню:



$$\sum F_x = 0: -H_A + 1 = 0; H_A = 1.$$

$$\sum M_A = 0: 1 \cdot 4 - R_B \cdot 10 = 0;$$

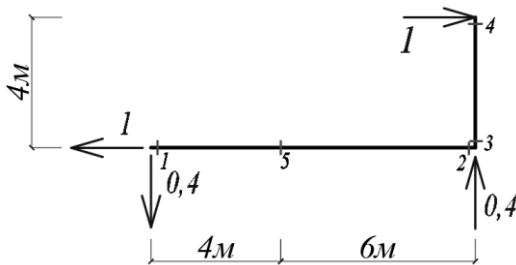
$$R_B = \frac{4}{10} = 0,4.$$

$$\sum F_y = 0: V_A + 0,4 = 0; V_A = -0,4.$$

Перевірка:

$$\sum M_D = -0,4 \cdot 4 - 0,4 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0.$$

Будуємо епюру моментів  $M_I$  в одиничному стані:



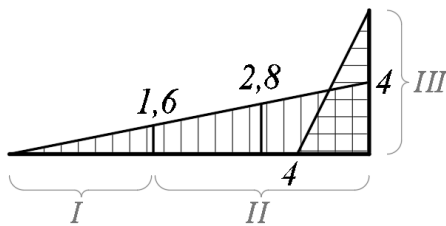
$$M_1 = 0,$$

$$M_2^{лів} = -0,4 \cdot 10 = -4м,$$

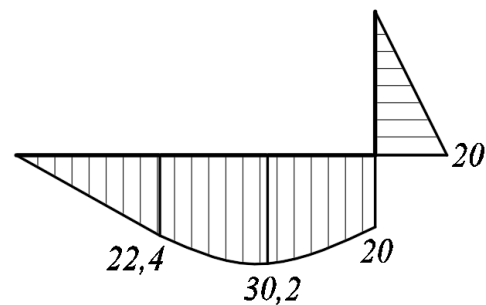
$$M_4 = 0,$$

$$M_3^{єрх} = +1 \cdot 4 = +4м,$$

$$M_5^{лів} = -0,4 \cdot 4 = -1,6м.$$



$\underline{M_I, м}$



$\underline{M, кНм}$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum \int \frac{M_I \cdot M}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 22,4 \right) + \\ &+ \frac{1}{2EI} \frac{6}{6} (-1,6 \cdot 22,4 - 4 \cdot 2,8 \cdot 30,2 - 4 \cdot 20) - \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 20 \right) = \\ &+ \frac{1}{EI} (-23,893 - 227,04 - 106,667) = \frac{1}{EI} (-357,6). \end{aligned}$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання: підручник / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов. – К.: ПАТ «ВІПОЛ», 2013. – 896 с.
2. *Баженов В.А.* Будівельна механіка: Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: навч. посібник / В.А. Баженов, Г.М. Іванченко, О.В. Шишов, С.О. Пискунов. – К.: Каравела, 2013. – 439 с.
3. *Розрахунок статично визначуваних стержневих систем: методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт / Уклад.: Ю.В. Ворона, І.Д. Кара.* – Київ: КНУБА, 2020. – 28 с.
4. *Розрахунок тришарнірної арки і статично визначуваних рам: методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи / Уклад.: І.Д. Кара, О.В. Костіна.* – Київ: КНУБА, 2022. – 32 с.

Для нотаток

Навчально-методичне видання

# **РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ**

Методичні вказівки  
до виконання розрахунково-графічної роботи  
для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»  
освітньої програми «Менеджмент організацій і адміністрування»

Укладачі: **Кара Ірина Дмитрівна,**  
**Затилюк Герман Анатолійович,**  
**Стригун Руслан Леонідович**

Комп'ютерне верстання *А.П. Селівестрової*

Підписано до друку 20.12. 2023. Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Ум. друк. арк. 1,63. Обл.-вид. арк. 1,75.

Електронний документ. Вид. № 132/III-23

Видавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів  
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002