МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 073 «Менеджмент»,
051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування»

Київ 2025

УДК 517.521
Т33

Укладачі: З. І. Наголкіна, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Л. В. Соколова, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Ю. П. Філонов, канд. фіз.-мат. наук, доцент ,
Ю. О. Чорноіван, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент В. В. Отрашевська, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент, зав. кафедри

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 9 від 27 травня 2025 року.

В авторській редакції

Т33 **Теорія** ймовірностей [електронний ресурс]: методичні вказівки до виконання самостійної роботи / уклад. : З. І. Наголкіна та ін. – Київ : КНУБА, 2025. – 69 с.

Містить основні розділи теорії ймовірностей, які використовуються під час побудови математичних моделей в економіці. Розглянуто моделі, пов’язані з проблемами оптимізації, прогнозування та теорії надійності. Наведено стислі теоретичні відомості та приклади розв’язання і аналізу типових задач. Додаються варіанти завдань для самостійної роботи.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями: 073 «Менеджмент», 051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування».

Зміст

Загальні положення

Теорія ймовірностей є важливою складовою фундаментальної математичної підготовки. Особливе значення має ця дисципліна під час підготовки фахівців економічних спеціальностей.

Метою методичних вказівок є надання студентам практичних навичок і знань з основних понять теорії ймовірностей, які необхідні для подальшого вивчення дисциплін економічного спрямування.

Необхідно знати: основні поняття і теореми, такі як випадкові події, визначення і обчислення ймовірностей, теореми про ймовірність суми і добутку випадкових подій, формулу повної ймовірності, схему Бернуллі, одновимірні і двовимірні випадкові величини, функції розподілу, кореляційні моменти і коефіцієнти кореляції.

Під час вивчення дисципліни перед здобувачем ставиться задача: вміти аналізувати реальну економічну ситуацію в термінах теорії ймовірностей, а також знаходити відповідні методи її вирішення.

Ймовірнісні моделі в економіці можуть значно допомогти фахівцям в оптимізації їх роботи.

У запропонованій методичній роботі зібрано типові задачі з теорії ймовірностей, які дають уяву про ймовірнісні схеми, що використовують для обчислень в техніці і економіці. Наведено теоретичні відомості та зразки розв’язання кожної з типових задач. В окремих випадках надано формулювання відповідних задач в економічній термінології.

Зміст і тематика посібника відповідають учбовій програмі по теорії ймовірностей для відповідних спеціальностей. Посібник буде корисним студентам різної спеціалізації, що вивчають теорію ймовірностей на першому і другому курсах і може бути рекомендований для аудиторної і самостійної роботи.

Розділ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Класична ймовірність

Стохастичним експериментом (випробуванням) називають певний комплекс умов, що можуть бути відтворені будь яку кількість разів і приводять до появи деякого наслідку, заздалегідь невідомо якого. Результат одного випробування називається **елементарною подією** (або просто подією) і позначається літерою ω. Взагалі подію називають випадковою, або стохастичною, якщо при реалізації певного комплексу умов вона може відбутися або не відбутися. Елементарну подію також називають елементарним наслідком випадкового випробування. Елементарні події позначають ω_1, ω_2, …, ω_n. В теорії ймовірностей вони не поділяються на більш простіші складові і є первинним поняттям (так в геометрії точка є первинним поняттям і не визначається через інші).

Приклад 1. При однократному підкиданні грального кубика можливі 6 елементарних наслідків $\{\omega_k\}$, коли на верхній грані випаде k очок $(k=1,2,3,4,5,6)$.

Приклад 2. При однократному підкиданні монети можливі дві елементарні події: ω_1 – випаде герб «Г», ω_2 – випаде решка «Р».

Приклад 3. При двократному підкиданні монети або при киданні двох монет можливі 4 елементарних наслідки: (Г, Г), (Г, Р), (Р, Г), (Р, Р).

З кожним випробуванням пов'язують свій простір елементарних подій. **Простором елементарних подій** називають сукупність усіх наслідків даного випробування, за умови, що результатом кожного випробування є одна і тільки одна елементарна подія, тобто одночасно з нею не може відбутися жодна з інших елементарних подій. В інтерпретації прикладу 1, кубик не може одночасно впасти на дві грані. Простір елементарних подій позначають $\Omega(\omega\in\Omega)$. Випадкова подія називається складеною, якщо її можна розкласти на елементарні. Наприклад, в інтерпретації прикладу 1, складеними будуть події:

- A {на верхній грані випаде парне число $\omega_1=2$, $\omega_2=4$, $\omega_3=6$};

- B {на верхній грані випаде число не більше ніж 4: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$, $\omega_4 = 4$}.

Випадковою подією називають будь-яку сукупність елементарних наслідків стохастичного експерименту і позначать великими латинськими буквами: $A, B, C...$, або $A_1, A_2, ..., A_n$.

Для того, щоб оцінити чисельну міру можливості деякої випадкової події вводиться поняття ймовірності.

Класичною ймовірнісною схемою називають таку модель випадкового експерименту, в якій елементарні події задовольняють умовам:

- кількість усіх елементарних подій скінченна;
- усі елементарні події рівно можливі, тобто кожна з елементарних подій не має жодних переваг над іншими елементарними подіями.

Ймовірністю події A називають числову міру об'єктивної можливості того, що ця подія відбудеться. Ймовірність є кількісною оцінкою можливості появи події A.

При виконанні вищеназваних умов ймовірність $P(A)$ в класичній схемі обчислюється за формулою:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

При цьому m – кількість елементарних наслідків, що сприяють події A, а n – кількість усіх можливих елементарних наслідків даного випробування, тобто розмірність ймовірнісного простору Ω.

При підкиданні кубика кількість усіх можливих елементарних наслідків даного випробування дорівнює 6, тобто $n = 6$. Нехай випадкова подія A полягає в тому, що при підкиданні грального кубика випаде парне число (2, 4 або 6). Загалом парних чисел на кубику 3, отже кількість елементарних наслідків, що сприяють події A дорівнює 3, тому $m = 3$. Ймовірність того, що при підкиданні кубика випаде парне число дорівнює:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Достовірною, або вірогідною називають подію, яка при виконанні певного комплексу умов обов'язково відбудеться. Достовірною подією можна назвати всю множину Ω можливостей даного випробування. Ймовірність достовірної події дорівнює 1, тобто $P(\Omega) = 1$. Наприклад, той факт, що при киданні кубика випаде одне з цілих чисел від 1 до 6 є достовірною подією.

Неможливою називають подію, яка при виконанні певного комплексу умов, або в результаті даного випробування не може відбутися. Неможлива подія позначається $\varnothing$. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю, тобто $P(\varnothing)=0$. При киданні кубика неможливою подією є, наприклад, випадіння числа 7.

Зауваження. Безпосередній підрахунок ймовірностей за класичною схемою за формулою (1) має місце тільки у разі класичної схеми випадків. Наприклад, якщо гральний кубик має форму сірникової коробки, то це не є класична схема випадків, оскільки падіння на більшу грань і на ребро є події нерівноможливі. Не є класичною схемою випадків і постріли по мішені до першого враження, оскільки простір елементарних подій не є скінченновимірним.

1.2. Відносна частота. Статистична ймовірність

Для знаходження ймовірностей, які не описуються схемою випадків, застосовують методи, що базуються на експериментах. Нехай в однакових умовах проводиться серія n випробувань, в кожному з яких може з’явитися або ні подія A. Нехай вона з’явилась m разів.

Відносною частотою μ_n називають відношення кількості випробувань m, в яких з’явилась подія A до загальної кількості проведених випробувань n:

$$\mu_n=\frac{m}{n}.$$

Емпірично (експериментально) встановлено, що для масових (великої кількості) однорідних явищ відносна частота μ_n мало відрізняється від ймовірності p. На цьому факті засноване поняття статистичної ймовірності.

Статистичною ймовірністю випадкової події A називається таке стале число, до якого прямує відносна частота при зростанні кількості випробувань $p=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}$. Статистичну ймовірність ще називають емпіричною ймовірністю. На цьому понятті ґрунтуються основи математичної статистики. Поняття статистичної ймовірності широко застосовується в економіці, менеджменті, екології, медицині, техніці.

1.3. Геометрична ймовірність

Класична схема теорії ймовірностей накладає певні умови на елементарні події: кількість елементарних подій має бути скінченною, а також елементарні події мають бути рівноможливі. На практиці мають місце події, які не вписуються в класичну схему. Тому виникає потреба в розробці інших схем, які дозволяють вивчати більш широке коло випадкових явищ. Найбільш універсальним є аксіоматичний підхід до поняття ймовірностей. В ньому нема обмежень на скінченність числа елементарних подій та їх рівноможливість. Якщо узагальнити класичну схему певним чином на випадок нескінченної множини, то отримаємо геометричну схему ймовірностей. Геометрична схема розглядається на прямій, на площині та в просторі (нескінченна кількість точок прямої, площини, простору). Наприклад, розглянемо це поняття для випадку плоскої фігури. Нехай довільна плоска фігура g є частиною довільної плоскої фігури G, $g \subset G$ (рис. 1).

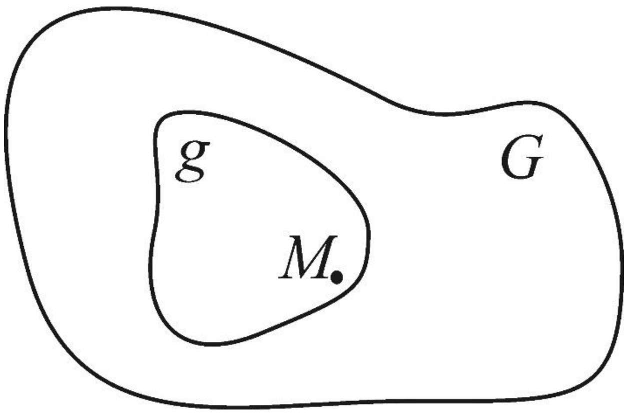


Рис. 1

В області G випадковим чином вибирається точка M. Оскільки g є частиною G, то ця точка може потрапити в g. Нехай подія A полягає в тому, що точка M попала в область g. Ймовірність потрапляння в g пропорційна площі цієї фігури і не залежить від розташування фігури в G. Ймовірність потрапляння точки M в область g обчислюється за формулою, яка в деякому розумінні є аналогом класичної формули у випадку нескінченного ймовірнісного простору:

$$P(A)=\frac{s(g)}{s(G)},$$

де $s(g)$ і $s(G)$ – площі відповідних областей.

Аналогічно в лінійному випадку, де G – відрізок прямої, а g – частина цього відрізка. У просторовому випадку G – область в просторі, g – область всередині G. Таким чином, маємо загальну формулу геометричної ймовірності:

$$P(A)=\frac{\mu(g)}{\mu(G)}.$$

Під μ розуміють міру відповідних множин. У випадку прямої – це довжина $\mu=1$, у випадку площини – це площа $\mu=s$, у випадку простору – це об'єм $\mu=v$. При цьому під простором елементарних подій слід розуміти всю область G.

1.4. Властивості класичної ймовірності

1. Ймовірність достовірної події $P(A)=\frac{n}{n}=1$.
2. Ймовірність неможливої події $P(A)=\frac{0}{n}=0$.
3. Ймовірність випадкової події $P(A)=\frac{m}{n}=1,\quad m<n$, $0\le P(A)\le 1$.
4. $P(\overline{A})=1-P(A)$, $\overline{A}$ – протилежна подія.

Завдання, які пов'язані з обчисленням ймовірностей треба розв'язувати за наступною **схемою:**

1. Визначити, що є випробуванням в даній задачі та відповідно окреслити простір елементарних подій.

2. Сформулювати, що є випадковою подією A, ймовірність якої треба обчислювати.

3. Знайти розмірність простору елементарних подій n, тобто кількість подій Ω.

4. Визначити кількість елементарних подій m, які сприяють появі події A.

5. Обчислити ймовірність події за формулою $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Завдання 1. Підкидають два гральних кубика. Нехай на першому кубику випало a очок, а на другому b. Визначити ймовірність того, що:

- сума числа очок не перевищує 8: $(a+b)\le 8$;
- добуток числа очок не перевищує 8: $(a\times b)\le 8$;
- добуток числа очок ділиться на 8: $(a\times b)\vdots 8$.

Розв'язання. Випробування полягає в тому, що підкидають два кубики і кожен з них падає на довільну грань. Простір елементарних подій складається з пар (a,b) ($a\in[1,6]$, $b\in[1,6]$). Цей простір наочно можна зобразити у вигляді таблиці:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	6,5)	(6,6)

Простір елементарних подій Ω складається з $n=36$ елементів.

Розрахуємо кількість наслідків досліду, що сприяють відповідним подіям та обчислимо ймовірності цих подій за формулою (1).

- Подія A_1 – сума кількості очок не перевищує 8: $(a+b)\le 8$.

Кількість наслідків, які сприяють появі A_1: пар $m=26$. $P(A_1)=\dfrac{26}{36}=\dfrac{13}{18}$

.

- Подія A_2 – добуток кількості очок не перевищує 8: $(a\times b)\le 8$.

Кількість наслідків, які сприяють події A_2: $m=17$. $P(A_2)=\dfrac{17}{36}$.

- Подія A_3 – добуток кількості очок ділиться 8: $(a\times b)\vdots 8$.

Кількість наслідків, які сприяють події A_3: $m=5$, $P(A_3)=\dfrac{5}{36}$.

Відповідь. $P\left(A_1\right)=\dfrac{13}{18}$, $P\left(A_2\right)=\dfrac{17}{36}$, $P\left(A_3\right)=\dfrac{5}{36}$.

1.5. Елементи комбінаторики

Великий клас ймовірнісних задач пов'язаний з комбінаторикою. Основні комбінаторні задачі полягають в знаходженні кількості комбінаторних комбінацій, які складаються за певними правилами з елементів заданої скінченної множини. Найпростішими типами таких комбінацій є перестановки, розміщення і сполучення. Нехай є деяка скінченна множина довільної природи, що складається з n елементів. Впорядковані множини вважають різними, якщо вони мають однаковий склад елементів, але різний порядок розташування. Зрозуміло, що будь яку множину, що має більше одного елемента можна впорядкувати. Нехай є скінченна невпорядкована множина $A\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$, яка має n елементів. Переставляючи місцями елементи, отримаємо вибірки , що відрізняються тільки порядком.

Перестановками називають впорядковану вибірку з n елементів по n. Кількість таких перестановок є $n!$ і позначають її:

$$P\left(n\right)=n!,\ n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n,\ \left(5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120\right),\ 0!=1.$$

Розглянемо скінченну невпорядковану множину $A\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$. Будемо утворювати вибірки, які містять k елементів з цієї n-елементної вибірки $\left(k<n\right)$, тобто утворюють впорядковані k-елементні підмножини з множини $A\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$.

Розміщеннями із n елементів по k називають такі комбінації, які складаються з k елементів, обраних із даних n елементів $\left(k<n\right)$, що відрізняються як порядком так і елементами. Такі комбінації позначаються як A_n^k:

$$A_n^k=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\ldots\left(n-k+1\right)=\frac{n!}{\left(n-k\right)!}.$$

Сполученнями називають k-елементні вибірки, які відрізняються між собою тільки складом і позначаються:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Порядок для даної комбінації не суттєвий, тобто (a,b) і (b,a) це один і той самий елемент.

Примітка. Якщо впорядкувати k-елементну вибірку, яка є сполученням, то отримаємо розміщення:

$$C_n^k \cdot k! = A_n^k,\ A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Причому має місце властивість:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Окремий випадок – це k-елементні вибірки з поверненням. Наприклад, обираємо при $k=1$ один елемент вибірки $A(a_1, a_2, ..., a_n)$, фіксуємо і повертаємо. При $k=2$ знову беремо один елемент з n і знову повертаємо. Таким чином k-елементна вибірка з поверненням має n^k елементів.

Задачі комбінаторики – це перелік і підрахунок кількості комбінацій одержаних за певними правилами. В основі обчислення кількості комбінацій лежать **правило суми** і **правило добутку**.

Правило суми. Якщо об’єкт a можна вибрати m способами, а об’єкт $b - k$ способами, причому вибір об’єкта a відрізняється від вибору b, то один з об’єктів a або b можна вибрати $m+k$ способами.

Правило добутку. Якщо об’єкт a можна вибрати m способами, і при кожному виборі a об’єкт b можна вибрати k способами, то вибір пари об’єктів (a,b) можна зробити $m \cdot k$ способами. Вибір пари в зворотному порядку можна зробити $k \cdot m$ способами.

Завдання 2. Серед 9 лотерейних білетів є 4 виграшних. Навмання взяли 5 білетів. Визначити ймовірність того, що серед них 3 виграшних.

Розв’язання. Спочатку треба визначити, що є випробуванням в даній схемі. Випробування полягає в тому, що з 9 білетів вибирають 5. Простір елементарних подій складається з 5-ти елементних підмножин з 9-елементної множини. Ці 5-ти елементні підмножини і є елементарними наслідками. Їх кількість визначається кількістю сполучень (порядок не суттєвий)

$$n = C_9^5 = \frac{9!}{5!4!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{5!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126.$$

Випадкова подія A полягає в тому, що серед обраних 5 білетів 3 – виграшних і 2 невиграшних. За умовою задачі вся множина з 9 білетів розділяється на дві підмножини: 4 – виграшних і, відповідно, 5 – невиграшних (9 – 4 = 5). З 4-х виграшних 3 можна взяти C_4^3 способами. Тоді 2 невиграшних можна взяти C_5^2. За правилом добутку кількість елементарних подій, що сприяє появі події A є $m = C_4^3 C_5^2$. За класичною формулою ймовірність події A визначається:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3 C_5^2}{C_9^5} = \frac{\frac{4!}{3!1!}\cdot\frac{5!}{2!3!}}{126} = \frac{4\cdot 10}{126} = \frac{40}{126} = \frac{20}{63}.$$

Відповідь. $P(A) = \dfrac{20}{63}.$

Завдання 3. У ліфт 10-поверхового будинку на першому поверсі сіло четверо пасажирів. Кожний з них незалежно від інших з однаковою ймовірністю може вийти на довільному поверсі, починаючи з другого.

Визначити ймовірність того, що

а) усі пасажири вийшли на різних поверхах;

б) хоча б двоє вийшли на одному поверсі.

Розв'язання. *а*) Випробування полягає в тому, що кожен з 4-х пасажирів може вийти на одному з 9-ти поверхів (починаючи з 2-го):

- 1-й може вийти на будь-якому з 9 поверхів,
- 2-й може вийти на будь-якому з 9 поверхів
- 3-й може вийти на будь-якому з 9 поверхів
- 4-й може вийти на будь-якому з 9 поверхів.

Таким чином простір елементарних подій складається з усіх таких можливостей і дорівнює $n = 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 9^4$. Подія A полягає в тому, що всі пасажири вийдуть на різних поверхах:

- 1-й пасажир може вийти на одному з 9 поверхів;
- 2-й пасажир може вийти на одному з 8 поверхів, оскільки один вже зайнятий;

- 3-й пасажир може вийти на одному з 7 поверхів, оскільки два вже зайняті;
- 4-й пасажир може вийти на одному з 6 поверхів, оскільки три вже зайняті.

За правилом добутку кількість елементарних подій, що сприяє появі події *A* визначається розміщенням: $A_9^4 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$. Ймовірність появи події A:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{9^4} = \frac{336}{729} \approx 0.461.$$

б) Подія B полягає в тому, що хоча б двоє пасажирів вийшли на різних поверхах. Подія, протилежна події B, позначається $\overline{B}$ і полягає в тому, що всі пасажири вийшли на різних поверхах, тобто $\overline{B} = A$. І тому $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(A) \approx 0.539$.

Відповідь. *а*) $P(A) \approx 0.461$, *б*) $P(B) \approx 0.593$.

Розділ 2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1. Правила, пов’язані з додаванням і множенням ймовірностей

Нехай проводиться стохастичний експеримент із яким пов'язаний певний простір елементарних подій. Випадкові події A і B належать цьому простору, тобто існують елементарні наслідки, що сприяють події A і елементарні наслідки, що сприяють події B.

Добутком випадкових подій A і B називають таку випадкову подію C, якій сприяють лише ті наслідки, що одночасно сприяють і A і B. Позначається добуток $A\cdot B$, або AB, або $A\bigcap B$.

Події A і B є несумісними подіями, якщо їх добуток є неможливою подією $A\cdot B = \varnothing$. Події A і B є сумісними подіями, якщо їх добуток $A\cdot B \neq \varnothing$.

Сумою випадкових подій A і B називають випадкову подію C, якій сприяють ті наслідки, які є сприятливими хоча б для однієї з подій або A або B. Позначають суму $A+B$, $A\bigcup B$. Таким чином $A\bigcup B$ настає тоді і тільки тоді, коли настає або A, або B, або і A і B.

Теорема додавання. Ймовірність суми двох подій обчислюється за формулою

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B). \tag{2}$$

Якщо події несумісні, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{3}$$

Якщо подія A є об'єднанням скінченої кількості попарно несумісних подій $A=A_1+A_2+\ldots+A_n,\ A_i\bigcap A_j=0,\ i\neq j$, то

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots P(A_n). \tag{4}$$

Умовна ймовірність. Ймовірність настання події A, обчислена у припущенні, що подія B відбулася, називається умовною ймовірністю події A при умові, що B відбулася позначається $P(A/B)$.

Теорема добутку випадкових подій. Ймовірність добутку двох подій обчислюється за формулами

$$P(A\cdot B)=P(A/B)P(B), \tag{5}$$

$$P(A\cdot B)=P(B/A)P(A). \tag{6}$$

Події $A_1,A_2,A_3,...,A_n$ називають незалежними в сукупності, якщо кожна з них не залежить від настання інших. І тому

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot\ldots\cdot P(A_n). \tag{7}$$

Події A і B називають незалежними, якщо настання події A не залежить від того настала подія B чи ні, тобто $P(A/B)=P(A)$, $P(B/A)=P(B)$. І тому, користуючись формулами добутку (5) та (6) маємо

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B). \tag{8}$$

На практиці висновок про залежність чи незалежність тих чи інших подій роблять на основі інтуїтивних міркувань, або з аналізу ймовірнісної схеми, пов'язаною з конкретною задачею.

При розв'язані задач про ймовірність складених подій рекомендується дотримуватись такої схеми:

- визначити, в чому полягає випробування, окреслити простір елементарних подій;
- визначити випадкові події, ймовірність яких треба знайти;

- визначити склад цих подій: якщо це сума, то треба з'ясувати сумісність, або несумісність складових подій; якщо це добуток, то з'ясувати залежність або незалежність відповідних подій;
- відповідно до аналізу задачі підібрати формули.

Завдання 4. У крузі радіуса 15 одиниць навмання з'являється точка. Визначити ймовірність того, що вона потрапить в одну з двох фігур, що не перетинаються, площі яких дорівнюють відповідно 2.7 і 7.9 квадратних одиниць.

Розв'язання. Випробування полягає в довільному виборі точки всередині круга, тобто ймовірнісним простором будуть всі точки круга. Еквівалентом розмірності елементарного простору буде площа всього круга. Випадкова подія A полягає в тому, що довільна точка потрапить, або в фігуру з площею $S_1 = 2.7$, або в фігуру з площею $S_2 = 7.9$. Позначимо A_1 випадкову подію потрапляння в фігуру з площею $S_1 = 2.7$, а A_2 випадкову подію потрапляння в фігуру з площею $S_2 = 7.9$. Оскільки ці фігури не перетинаються, то події A_1 та A_2 несумісні, а це означає, що $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$. Скористаємося формулою геометричної ймовірності: $P(A_1) = S_1/S$, $P(A_2) = S_2/S$, де S – площа круга. $S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 15^2$. Враховуючи вирази для $P(A_1)$ і $P(A_2)$, маємо:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = (2.7 + 7.9)/(\pi \cdot 225) \approx 0.015.$$

Відповідь. $P(A) \approx 0.015$.

Завдання 5. У двох партіях 83% і 35% доброякісних виробів відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Знайти ймовірність того, що при цьому буде:

а) хоча б один бракований виріб;

б) два бракованих вироби;

в) один доброякісний і один бракований вироби.

Розв'язання. Випробування полягає в тому, що з кожної з двох партій беруть по одному виробу. Простір елементарних подій складається з різних комбінацій елементів цих двох партій. Можливі такі комбінації: (д, д), (д, б). (б, д), (б, б). Оскільки відсоток доброякісних і бракованих виробів в кожній партії різний, то ці комбінації не є рівноможливими.

а) Позначимо через A – випадкову подію, що вибрано «*хоча б один бракований виріб*». В цьому випадку зручно знайти ймовірність протилежної події $\overline{A}$, що не вибрано «*жодного бракованого виробу*». Позначимо через A_1 – доброякісний виріб з 1-ої партії. $P\left(A_1\right)=0.83$. Відповідно $\overline{A}_1$ – бракований виріб з 1-ої партії $P\left(\overline{A}_1\right)=1-0.83=0.17$. Позначимо A_2 – доброякісний виріб з 2-ої партії. $P\left(A_2\right)=0.35$. Відповідно $\overline{A}_2$ – бракований виріб з 2-ої партії. $P\left(\overline{A}_2\right)=1-0.35=0.65$. Тоді $\overline{A}=A_1\bigcap A_2$ – обидва доброякісні і з першої партії і з другої. Інтуїтивно зрозуміло, що ці події незалежні. $P\left(\overline{A}\right)=0.83\cdot 0.35=0.2905$. Таким чином $P\left(A\right)=1-0.2905=0.7095$.

б) Позначимо через B випадок «*обидва вироби браковані*» – $B=\overline{A}_1\bigcap\overline{A}_2$. Тоді $P\left(B\right)=0.17\cdot 0.65=0.1105$.

в) Позначимо через C випадок «*один виріб доброякісний і один виріб бракований*» – $C=\left(A_1\bigcap\overline{A}_2\right)+\left(\overline{A}_1\bigcap A_2\right)$. Оскільки події $A_1\bigcap\overline{A}_2$ та $\overline{A}_1\bigcap A_2$ несумісні, то $P\left(C\right)=P\left(A_1\bigcap\overline{A}_2\right)+P\left(\overline{A}_1\bigcap A_2\right)$, де $P\left(A_1\bigcap\overline{A}_2\right)=0.83\cdot 0.65=0.5395$, $P\left(\overline{A}_1\bigcap A_2\right)=0.17\cdot 0.35=0.0595$. В результаті отримуємо: $P\left(C\right)=0.5395+0.0595=0.599$.

Зауваження. Треба відмітити, що події $\overline{A}=A_1\bigcap A_2$, $B=\overline{A}_1\bigcap\overline{A}_2$, $C=\left(A_1\bigcap\overline{A}_2\right)+\left(\overline{A}_1\bigcap A_2\right)$ утворюють повну групу попарно несумісних подій. І тому:

$$P\left(A_1\bigcap A_2\right)+P\left(\overline{A}_1\bigcap\overline{A}_2\right)+P\left(A_1\bigcap\overline{A}_2\right)+P\left(\overline{A}_1\bigcap A_2\right)=$$
$$=0.2905+0.1105+0.5305+0.0595=1.$$

Відповідь. *а*) $P\left(A\right)=0.7095$; *б*) $P\left(B\right)=0.1105$; *в*) $P\left(C\right)=0.599$.

Задача економічного змісту. Аудитор перевіряє податкову звітність двох підприємств. В першому 67% підприємців вчасно сплачують податки, в другому 43%. Взято для перевірки довільним чином по одному підприємцю з цих підприємств. Знайти ймовірність того, що при цьому буде:

а) хоча б один з цих підприємців вчасно сплачує податки;

б) обидва підприємця вчасно сплачують податки;

в) один сплачує вчасно, і один не вчасно.

Задача екологічного змісту. Ймовірність перевищення викиду шкідливих речовин при роботі двигуна автомобіля 1 типу складає 0.2, для автомобілів 2 типу – 0.05. Перевіряються на викид два автомобіля. Знайти ймовірності таких подій:

а) хоча б один автомобіль перевищить шкідливий викид;

б) один перевищить, а один ні;

в) жоден не перевищить.

Завдання 6. Два стрільці стріляють по цілі. Ймовірність попадання по цілі першим стрільцем з одного пострілу дорівнює 0.25, а ймовірність попадання по цілі другим стрільцем з одного пострілу – 0.58. Перший стрілець зробив два постріли, а другий три. Знайти ймовірність того, що ціль не була вражена.

Розв'язання. Випробування полягає в тому, що перший стрілок стріляє по цілі два рази, а другий три. Простір елементарних подій складається з різних комбінацій подій попадання і непопадання першим і другим стрілками при п'яти пострілах. Позначимо B випадкову подію «ціль не було вражено». Нехай B_1, B_2 – випадкові події: B_1 – подія «перший стрілок не влучив в ціль», а B_2 – подія «другий стрілок не влучив в ціль». З умови задачі випливає, що випадкові події – постріли і, відповідно, їх результати «влучання» або «не влучання» – незалежні між собою. Подія $B = B_1 \cap B_2$ «*не влучив ні перший, ні другий*». Імовірність подій

$$P(B_1) = (1-0.25)^2 = 0.5625, P(B_2) = (1-0.58)^2 = 0.074.$$

Ціль не була уражена з ймовірністю:

$P(B) = P(B_1) \cdot P(B_2) = 0.5625 \cdot 0.074 = 0.04162$ – ймовірність того, що жоден стрілкць не влучив у ціль.

Відповідь. $P(A) = 0.04162$.

2.2. Ймовірність появи хоча б однієї події

Теореми про суму і добуток ймовірностей застосовуються для обчислення ймовірності появи хоча б однієї події з серії незалежних подій. Нехай події A_1, A_2, A_3, …, A_n незалежні в сукупності, причому $p\left(A_i\right)=p_i$. Нехай в результаті випробування можуть наступити, або всі події, або частина з них, або жодна з них. Нехай подія A відбувається, коли з'являється хоча б одна з подій A_1, A_2, A_3, …, A_n які є незалежні в сукупності. Щоб обчислити ймовірність появи події A зручно перейти до обчислення ймовірності протилежної події $\overline{A}$, яка означає, що не відбулася жодна з подій A_1, A_2, A_3, …, A_n. Це означає, що $p\left(\overline{A}_i\right)=q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n$, де $q_i=1-p_i$ – ймовірність протилежної події.

Оскільки $p\left(A\right)+p\left(\overline{A}\right)=1$, то $p\left(\overline{A}_i\right)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n$.

Зауваження. Якщо всі події A_i мають однакову ймовірність $p_i=p$, то $p\left(A\right)=1-q^n$.

2.3. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Важливим застосуванням поняття умовної ймовірності є так звана формула повної ймовірності і формула Байєса. Ці формули застосовують тоді, коли існують кілька можливостей (сценаріїв) розвитку подій. Ці сценарії ще називають гіпотезами. Наприклад, при вступі до вишу абітурієнт має кілька варіантів обрання спеціальності, при купівлі квартири ви можете розглядати варіанти різних районів, або в одному будинку різні поверхи. Відповідно від цих факторів залежить ціна. При виникненні аварії на підприємстві, забруднення навколишнього середовища складається з забруднення різних екосистем: повітря, води, ґрунту, тощо.

Для врахування ймовірностей всіх можливих наслідків в результаті деякої гіпотетичної події (якщо вона відбудеться) застосовують так звану схему Байєса. Формула повної ймовірностей – важливий елемент цієї схеми.

На практиці, як правило, мають справу не з ізольованою подією, а такою подією, яка відбувається одночасно з іншими. Нехай подія A відбувається тоді і тільки тоді, коли має місце одна з подій H_1, H_2, H_3, …,

H_n, які утворюють повну групу гіпотез. Слід відмітити, що і гіпотези, і подія A визначені на одному ймовірнісному просторі Ω.

Повною групою подій H_1, H_2, H_3, …, H_n, або розбиттям простору називають сукупність подій H_1, H_2, H_3, …, H_n, які задовольняють наступним умовам:

- $H_1 + H_2 + H_3 + ... + H_n = \Omega$;
- $H_i \bigcap H_j = \varnothing$, $i \neq j$ – (попарно несумісні події);
- $P(H_i) \neq 0$;
- $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) + \ldots + P(H_n) = 1$.

В даному випадку елементи повної групи подій називаються гіпотезами. При заданому наборі гіпотез визначення ймовірності події A, якщо відома умовна ймовірність настання події в результаті однієї з гіпотез $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$,…, $P(A/H_n)$, обчислюється за формулою:

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + \ldots + P(A/H_n)P(H_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i). \tag{9}$$

Ця формула і називається формулою повної ймовірності. Гіпотези, які приймаємо перед випробуванням, називають апріорними. Після випробування можна, в залежності від результату, переглянути ймовірність цих гіпотез, тобто знайти ймовірність апостеріорних гіпотез. В цьому і полягає схема Байєса. Умовна ймовірність кожної з гіпотез при умові, що випробування відбулося позначається $P(H_i/A)$ і знаходиться за формулою:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)P(H_i)}{P(A)}. \tag{10}$$

Причому можна показати, що апостеріорні гіпотези утворюють повну групу:

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i/A) = 1.$$

Завдання 7. Фірма отримала три партії персональних комп'ютерів (ПК). В першій партії – 650 ПК, в другій – 140 ПК і в третій – 210 ПК. В першій партії – 6% браку, в другій – 5% і в третій – 4%. Навмання взяли один комп'ютер. Знайти ймовірність того, що він бракований.

Розв'язання. Випробування полягає в тому, що з 1000 ПК навмання взяли один. Подія A полягає в тому, що «ПК бракований».

Можливі три гіпотези:

H_1 - бракований ПК належить до першій партії, $P(H_1)=\dfrac{650}{1000}$.

H_2 - бракований ПК належить другій партії, $P(H_2)=\dfrac{140}{1000}$.

H_3 - бракований ПК належить третій партії, $P(H_3)=\dfrac{210}{1000}$.

Перевіримо, що гіпотези H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу, тобто $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$. Дійсно

$$P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=\frac{650}{1000}+\frac{140}{1000}+\frac{210}{1000}=1.$$

Умовні ймовірності браку в кожній партії є:

$P(A/H_1)=6\%=0.06$, $P(A/H_2)=5\%=0.05$, $P(A/H_3)=4\%=0.04$.

За формулою повної ймовірності (9) маємо:

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)+P(A/H_3)P(H_3)=$$
$$=0.65\cdot 0.06+0.140\cdot 0.06+0.210\cdot 0.04=0.0544.$$

Відповідь. $P(A)=0.0544$ – ймовірність отримати бракований ПК

Завдання 8. До податкової інспекції на певний момент надійшли звіти з трьох приватних підприємств: З підприємства № 1 – 10%, № 2 –50%, № 3 – 40%. Серед цих документів не виявлено порушень відповідно на підприємстві № 1 в 70%, на підприємстві № 2 – 90%, на підприємстві № 3 – 80%. Для перевірки взяли один звіт. Він виявився без порушень. Яка ймовірність того, що це звіт з підприємства № 1.

Розв'язання. Аналогічно до попередньої задачі, позначимо подію A – «*звіт без порушень*». При цьому в якості гіпотез H_1, H_2, H_3 візьмемо:

- H_1 – звіт підприємства № 1, $P(H_1)=10\%=0.1$;

- H_2 – звіт підприємства № 2, $P(H_2) = 50\% = 0.5$;
- H_3 – звіт підприємства № 3, $P(H_3) = 40\% = 0.4$.

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

Події утворюють повну групу. Причому $P(A/H_1) = 70\% = 0.7$, $P(A/H_2) = 90\% = 0.9$, $P(A/H_3) = 80\% = 0.8$. За формулою повної ймовірності обчислимо $P(A)$:

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + P(A/H_3)P(H_3) =$$
$$= 0.7 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.4 = 0.84.$$

За формулою (10) знайдемо

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.07}{0.84} = 0.083.$$

Відповідь. $P(H_1 / A) = 0.083$ - ймовірність того, що звіт подано підприємством № 1.

Задачі економічного змісту.

1. Ймовірність того, що клієнт банку не поверне вчасно борг в період економічного зростання 0.04, а в період економічної кризи – 0.13. Припустимо, що почався період економічного зростання з ймовірністю 0.65. Чому дорівнює ймовірність, що випадково вибраний клієнт поверне борг.

2. Економіст - аналітик підрозділяє економічну ситуацію на три категорії – позитивну з ймовірністю 0.15, посередню - - 0.6 і погану з ймовірністю - 0.25. Індекс економічної спроможності населення зростає з ймовірністю 0.6 під час позитивної ситуації, з ймовірністю 0.1 під час посередньої і з ймовірністю 0.05 під час поганої. Нехай індекс змінився в сторону зростання. Яка ймовірність, що економіка на підйомі.

Задачі екологічного змісту.

1. Досліджується деяка спільнота на залежність захворювання на грип при використанні певної вакцини. Розглядають три типи вакцин. Вакциною 1-го типу вакциновано 50% людей, вакциною 2-го типу вакцинувались 30% людей, вакциною 3-го типу вакциновано 20%. В результаті випробування після вакцинації вакцинами № 1 захворіли 5%, № 2 – захворіли 10%, № 3 – захворіли 5%. Для встановлення ефективності

вакцини потрібно знайти найменшу умовну ймовірність захворювання після вакцинації кожною вакциною. Яка вакцина більш ефективна?

2. Для перевірки на якість надійшло 100 одиниць молочних продуктів від трьох фермерських господарств. Від господарства № 1 – 40 од., від господарства № 2 – 35 од., решта – від господарства № 3. Вміст пальмової олії в продуктах господарства № 1 перевищує норму на 10%, в продуктах підприємства № 2 – на 5%, в продуктах підприємства № 3 – на 20%. Взято 1 одиницю товару. Знайти ймовірність того, що в ній не буде перевищено норму вмісту пальмової олії.

Розділ 3. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

3.1. Схема Бернуллі

Розглянемо схему повторних випробувань. Повторні випробування – це послідовне проведення n разів одного й того ж випробування, або одночасне проведення n однакових випробувань. Наприклад, можна 10 разів послідовно підкидати одну монету, або одночасно підкинути 10 однакових монет. В залежності від умов, що накладають на послідовність випробувань, розглядають декілька схем. На практиці частіше застосовується схема Бернуллі. Ця схема описує кратне повторення незалежних однакових випробувань, у кожному з яких подія A з’являється з однаковою ймовірністю p і не з’являється з ймовірністю $q=1-p$. За традицією появу події A називають – «успіхом», а не появу – «невдачею».

Схемою Бернуллі називають послідовність випробувань, яка задовольняє умовам:

- кожне випробування має лише два наслідки – «успіх» – подія A відбулася, або «невдача» – подія не відбулася $\overline{A}$;
- повторні випробування є незалежними, тобто ймовірність успіху в кожному випробуванні $p(A)=p$ не залежить від наслідків усіх інших випробувань;
- ймовірність успіху в кожному випробуванні не залежить від номера випробування і є величиною сталою.

Схему Бернуллі також називають схемою незалежних випробувань, або біноміальною схемою випробувань.

Приклади.

- **Послідовне підкидання грального кубика.** Ймовірність впасти на конкретну грань $p(A)=1/6$.

- **Кидання баскетболістом м'яча у кошик.** Успіхом вважають попадання в кошик. В залежності від майстерності гравця ймовірність може бути, наприклад $p(A)=0.8$.

- **Контроль якості продукції.** Успіхом вважають відбір доброякісного виробу з певною ймовірністю.

При використанні схеми Бернуллі основна задача полягає в знаходженні ймовірності того, що в серії з n випробувань подія A з'явиться m раз, де $0 \le m \le n$. Ймовірність того, що при n випробуваннях подія A (з ймовірністю в кожному випробуванні $p(A)=p$, а $p(\overline{A})=1-p=q$) з'явиться m раз обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (11)$$

Формула (11) також називається біноміальною, оскільки вона пов'язана з формулою бінома Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Слід відмітити, що у випадку, коли доданками p і q є ймовірності події A і, відповідно, протилежної події $\overline{A}$, то $(p+q)^n = 1^n = 1$ і тоді

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} P_n(m)=1^n=1.$$

В тому випадку, коли m набуває значення з інтервалу $k_1 \le m \le k_2$:

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) = \sum_{m=k_1}^{k_2} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Це є наслідком теореми про ймовірність суми попарно несумісних подій, оскільки події $(m=k_1)$, $(m=k_1+1)$, …, $(m=k_2)$ є попарно несумісними. Оскільки, $P_n(0)=q^n$, то $P_n(1 \le m \le n)=1-q^n$.

Іншими важливими наслідками формули Бернуллі, коли m набуває значення з інтервалу є:

- ймовірність появи події A (успіху) менше k разів $0 \le m \le k-1$

$$P_n(0 \le m \le k-1) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1);$$

- ймовірність появи події A не менше k разів $k \le m \le n$

$$P_n(k \le m \le n) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n);$$

- ймовірність появи події A більше k разів $k+1 \le m \le n$

$$P_n(k+1 \le m \le n) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n);$$

- ймовірність появи події A не більше k разів $0 \le m \le k$

$$P_n(0 \le m \le k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k).$$

Найімовірнішим числом успіхів у схемі Бернуллі називають таке значення $m = m_0$, яке має найбільшу ймовірність. Воно задовольняє нерівності

$$np - q \le m_0 \le np + p \tag{12}$$

Якщо обидва кінці цієї нерівності цілі числа, то треба взяти обидва значення. Якщо вони не цілі, то треба взяти найбільше ціле число, яке міститься в цьому інтервалі.

Завдання 9. Ймовірність виграшу на один квиток дорівнює 0.6. Куплено 16 квитків. Знайти найбільш ймовірне число виграшних квитків.

Розв'язання.

$$q = 1 - 0.6 = 0.4.$$

За формулою (12) маємо нерівність:

$$16 \cdot 0.6 - 0.4 \le m_0 \le 16 \cdot 0.6 + 0.6,$$

$$9.2 \le m_0 \le 10.4,\ m_0 = 10.$$

Відповідно ймовірність можна знайти за формулою (11):

$$P_{16}(10) = C_{16}^{10} \cdot 0.6^{10} \cdot 0.4^6.$$

Відповідь. $P_{16}(10) = C_{16}^{10} \cdot 0.6^{10} \cdot 0.4^6$.

3.2. Поліноміальна схема Бернуллі

Розглянемо одне з можливих узагальнень схеми Бернуллі – поліноміальну схему. **Поліноміальною схемою** називають послідовність n однакових незалежних випробувань, в кожному з яких може відбутися одна і тільки одна з k попарно несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$, які мають ймовірності $p_1, p_2, ..., p_k$ відповідно, $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$, кількість появ відповідно цих подій n_1, n_2, ..., n_k.

Приклади поліноміальної схеми:

а) послідовне проведення футбольних матчів. Результат складається з 3-х подій з різними ймовірностями: A_1 – перемога, A_2 – нічия, A_3 – поразка;

б) контроль на базі n одиниць продукції, які постачаються k різними постачальниками.

Ймовірність в цій схемі обчислюється за формулою:

$$P_n\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}.$$

В даній формулі на прикладі контролю n одиниць продукції введені позначення: 1-й постачальник надав n_1 елементів продукції з ймовірністю p_1, 2-й надав n_2 елементів з ймовірністю p_2,..., k-й надав n_k елементів з ймовірністю p_k.

Завдання 10. На кожний лотерейний білет з ймовірністю $p_1 = 0.1$, може випасти крупний виграш, з ймовірністю $p_2 = 0.1$ може випасти дрібний виграш і з ймовірністю $p_3 = 0.8$ білет може виявитись без виграшу. Куплено 14 квитків. Знайти ймовірність того, що серед них буде 1 крупний і 2 дрібних виграші.

Розв'язання. Розглядається схема, що складається з 14 випробувань, в кожному з яких перевіряють білет:

- з ймовірністю $p_1 = 0.1$ це може бути подія A_1 – крупний виграш;
- з ймовірністю $p_2 = 0.1$ це може бути подія A_2 – дрібний виграш;
- з ймовірністю $p_3 = 0.8$ це може бути подія A_3 – відсутній виграш.

Користуючись поліноміальною схемою знайдемо

$$P_{14}\left(1, 2, \ldots, 11\right) = \frac{14!}{1!2!11!}\left(0.1\right)^1\left(0.1\right)^2\left(0.8\right)^{11} \approx 0.094.$$

Відповідь. ≈ 0.094.

3.3. Граничні теореми для схеми Бернуллі

На практиці виникає необхідність в обчисленні біноміальних ймовірностей (11) для великих значень n і m. При цьому формули Бернуллі (11) стають незручними і призводять до громіздких обчислень. Тому виникає потреба в наближених формулах, зручних для обчислень. Такі формули називають асимптотичними і вони випливають із граничних теорем для схем Бернуллі. Розрізняють формули Пуассона і Муавра-Лапласа.

3.3.1. Формула Пуассона

Нехай здійснюється n незалежних випробувань за схемою Бернуллі. При цьому $n \to \infty$, $p \to 0$ і $\lambda = np$. Тоді ймовірність появи події A m разів обчислюється за наближеною формулою Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \tag{13}$$

В тих випадках, коли події з'являються поступово одна за одною, параметр λ називають інтенсивністю.

Завдання 11. Ймовірність збою в роботі мобільного оператора при з'єднанні абонентів дорівнює $p = 0.002$. Відбуваються 1000 викликів по мобільній мережі. Знайти ймовірність 9 збоїв.

Розв'язання. Для підрахунку $P_{1000}(9)$ скористаємося формулою Пуассона (13). При цьому параметр $\lambda = np = 1000 \cdot 0.002 = 2$.

$$P_{1000}(9) = \frac{2^9 e^{-2}}{9!}.$$

На практиці цією формулою доцільно користуватися, якщо

$$npq < 10, \quad q = 1 - p.$$

До недоліків формули Пуассона відноситься умова $p \to 0$. Якщо ж $0 < p < 1$ $\left(npq \geq 10\right)$, то ймовірність появи події A в незалежних випробуваннях можна обчислити за **локальною формулою Муавра-Лапласа.**

3.3.2. Локальна формула Муавра-Лапласа

Якщо ймовірність появи події A в кожному незалежному випробуванні стала і дорівнює p, то ймовірність появи події A рівно m раз в n випробуваннях обчислюється за локальною формулою Муавра - Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

де $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

Функція вигляду $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ називається **функцією Лапласа**. Функція Лапласа парна. Її значення наведені у відповідних таблицях. Розглянемо приклад застосування даної функції.

Приклад. Знайти ймовірність того, що подія A з’явиться рівно 80 разів у 400 випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в одному випробуванні $p = 0.2$.

Розв’язання. Обчислимо $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{80 - 400 \cdot 0.2}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} = \dfrac{0}{\sqrt{64}} = 0$, $q = 1 - p = 1 - 0.2 = 0.8$. Значення $\varphi(0)$ знаходять за таблицями функцій Лапласа: $\varphi(0) = 0.3989$.

$$P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 0.3989 = 0.0496.$$

Формула Муавра-Лапласа має локальний характер, тобто вона дає змогу знайти ймовірність появи події A рівно m раз. У випадку, коли потрібно знайти ймовірність появ події A з інтервалу, наприклад $k_1 \le m \le k_2$, то треба користуватися інтегральною формулою Муавра-Лапласа.

3.3.3. Інтегральна формула Муавра-Лапласа

$$P_n\left(k_1 \le m \le k_2\right) = \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right), \tag{14}$$

де $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Інтегральна функція Лапласа має своєю підінтегральною функцією функцію $\varphi(x)$, визначену вище:

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt. \tag{15}$$

Дана функція ще називається інтегральною функцією Лапласа в канонічному вигляді. Вона також затабульована (див. додаток).

Функція Лапласа має наступні властивості:

- $\Phi(x)$ – непарна. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ для всіх $x \in (-\infty, \infty)$;
- $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 0.5$, $\Phi(-\infty) = -0.5$;
- при $x > 5$ значення практично дорівнюють 0.5.

Завдання 12. Ймовірність появи деякої події у кожному з $n = 100$ незалежних випробувань дорівнює $p = 0.8$. Визначити ймовірність того, що число появ події задовольняє нерівності $80 \le m \le 90$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (14):

$$P_{100}\left(80 \le m \le 90\right) = \Phi\left(x_2\right) - \Phi\left(x_1\right),$$

де $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{80 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 0$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{90 - 80}{4} = 2.5$.

$$P_{100}\left(80 \le m \le 90\right) = \Phi(2.5) - \Phi(0) = 0.4938 - 0 = 0.4938.$$

За таблицями маємо: $\Phi(0) = 0$, $\Phi(2.5) = 0.4938$.

Відповідь. $\Phi(0) = 0$, $\Phi(2.5) = 0.4938$.

Розділ 4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

В попередніх розділах розглядалися випадкові події та дії над ними в різних схемах. Однак важливим в дослідженні може бути не тільки факт настання випадкової події, а і числові величини, які з нею пов'язані. Такі числові величини називають випадковими величинами.

Наприклад: 1) кількість m виграшних лотерейних білетів серед n вибраних; 2) кількість m пошкоджених виробів у випадково відібраній серії з n виробів; 3) дальність польоту снаряда при пострілі; 4) час очікування транспорту на зупинці.

Випадковою величиною називають величину, яка в результаті випробування набуває того або іншого числового значення, заздалегідь невідомо якого саме. Випадкові величини розрізняють за множиною їх значень. Якщо випадкова величина приймає окремі ізольовані значення, то вона називається дискретною випадковою величиною (приклади 1, 2). Якщо ж значення випадкової величини не відокремлені одне від одного, а суцільно заповнюють весь проміжок, то така випадкова величина є неперервною (приклади 3, 4). Знання лише значень випадкової величини не дає достатньої інформації про характер її змінення. Для повного описання випадкової величини потрібно знати ймовірності з якими вона набуває тих або інших значень.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між усіма її можливими значеннями і відповідними ймовірностями.

4.1. Дискретні випадкові величини

Закони розподілу дискретної випадкової величини можуть виражатися різними аналітичними формулами. Найбільш розповсюдженими є:

- біноміальний закон розподілу, або розподіл за схемою Бернуллі, який можна задати аналітично: $P_m\left(n\right) = C_n^m p^m q^{n-m}$;
- розподіл Пуассона $P_n\left(m\right) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$;
- геометричний розподіл $P\left(x = k\right) = pq^{k-1}$.

Геометричний розподіл має дискретна випадкова величина, яка дорівнює кількості спроб до появи першого успіху в схемі незалежних випробувань. Це означає, що випробування припиняються як тільки з'явиться успіх – подія A, причому $p\left(A\right)=p$, а невдачі $p\left(\overline{A}\right)=q$.

Закони розподілу дискретної випадкової величини можуть задаватися також табличним і графічним способами.

Розглянемо закон розподілу дискретної випадкової величини X в табличному вигляді:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_2

Табличний запис означає, що дискретна випадкова величина X набуває значення x_i з ймовірністю $p_i=P\left(X=x_i\right)$. Оскільки внаслідок одного випробування випадкова величина приймає одне і тільки одне значення, то події $X=x_1$, $X=x_2$,…, $X=x_n$ утворюють повну групу і тому $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$. Якщо в системі координат відмітити точки з координатами $\left(x_i,p_i\right)$ та з'єднати їх, то отримаємо ламану, яка представляє собою графічне зображення розподілу і називається багатокутником розподілу (рис. 2).

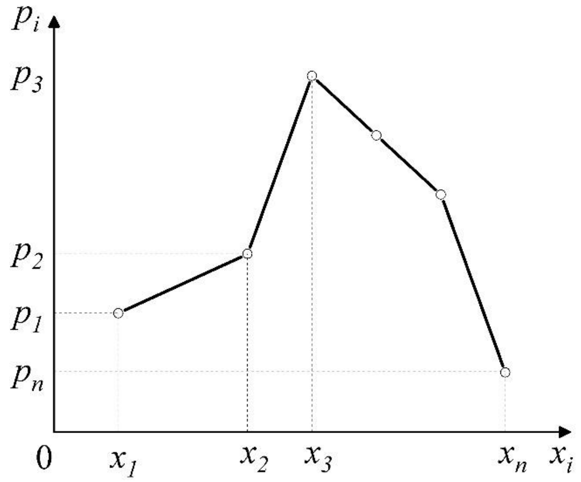


Рис. 2.

Табличний вигляд біноміального розподілу:

$x_k = k$	0	1	2	k	…	n
$p_k = P_n(k)$	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	$P_n(k)$		$P_n(n)$

Табличний вигляд геометричного розподілу:

$x_k = k$	1	2	3	4	…
$p_k = pq^{k-1}$	p	$q \cdot p$	$q^2 p$	$q^3 p$	…

4.2. Числові характеристики дискретних випадкових величин

Основними характеристиками випадкових величин є закон розподілу, математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

Закон розподілу. Закон розподілу дає повну інформацію як про дискретну, так і про неперервну випадкову величину. Для неперервної випадкової величини він визначається неперервною функцією, а для дискретної – ступінчастою. Слід відмітити, що неперервна випадкова величина не може набувати ізольованого значення, або набуває його з імовірністю 0. Функцією розподілу випадкової величини, або інтегральною функцією розподілу називають функцію дійсної змінної $F(x)$, де $x \in (-\infty, \infty)$, що задається співвідношенням $F(x) = P(X < x)$. Геометрично функція розподілу інтерпретується як імовірність того, що випадкова точка X опиниться лівіше заданої точки x (Рис. 3).

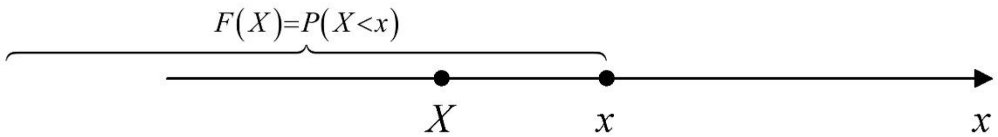


Рис. 3.

Слід розрізняти випадкову величину X та її значення x, тобто $X(\omega) = x$, де під ω розуміють елемент простору елементарних подій, $\omega \in \Omega$. Ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал $[a, b]$ знаходиться наступним чином:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – функція розподілу випадкової величини.

Для дискретної випадкової величини, яка задана таблицею розподілу, функція розподілу задається співвідношенням $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$, де x – аргумент функції $F(x)$. Нерівність $x_i < x$ означає, що додавання ведеться за всіма i для яких значення x_i менше x. У цьому випадку графік функції розподілу представляє собою ступінчасту фігуру (Рис. 4).

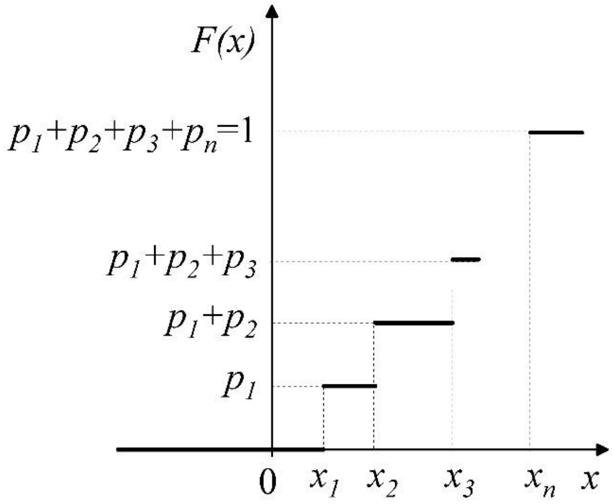


Рис. 4.

На практиці часто немає потреби так докладно описувати випадкові величини, а достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їх істотні ознаки. Такі числові параметри називають числовими характеристиками випадкової величини. Розглянемо спочатку найважливіші числові характеристики дискретних випадкових величин: математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Математичне сподівання. Математичне сподівання є узагальненим поняттям середнього арифметичного сукупності значень випадкової величини. Враховують різну вагу цих значень, що для випадкової величини має сутність ймовірності. Якщо дискретна випадкова величина задана розподілом, математичне сподівання дорівнює

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \qquad (16)$$

Математичне сподівання дорівнює сумі добутків всіх можливих значень випадкової величини на їх відповідні ймовірності.

Основні властивості математичного сподівання:

- Математичне сподівання сталої величини є стала:

$$MX = C.$$

Дійсно, $MC = \sum_{i=1}^{n} Cp_i = C\sum_{i=1}^{n} p_i = C \cdot 1 = C$.

- Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання:

$$MCX = CMX.$$

Дійсно, $M \cdot CX = \sum_{i=1}^{n} Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = C \cdot MX$.

- Математичне сподівання суми дорівнює сумі математичних сподівань.

$$M\left(X+Y\right) = M\left(X\right) + M\left(Y\right).$$

- Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань.

$$M\left(X \times Y\right) = M\left(X\right) \cdot M\left(Y\right).$$

Дисперсія випадкової величини. Для характеристики випадкової величини інколи буває недостатньо знати значення математичного сподівання. Бувають різні випадкові величини з однаковим середнім значенням. Треба знати розсіювання значень випадкової величини навколо її середнього (центра розсіювання). Такими числовими характеристиками є дисперсія та середньо квадратичне відхилення. Якщо взяти середнє відхилення випадкової величини від її середнього, то отримаємо 0. Дійсно,

$$M\left(X - MX\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - MX\right)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - MX\sum_{i=1}^{n} p_i = MX - MX = 0.$$

Це означає, що відхилення можуть бути різних знаків і тому розсіяння дорівнює нулю. Тому за міру розсіяння слід взяти середнє від квадрату відхилення, яке і називають дисперсією.

Дисперсією називають математичне сподівання квадрату відхилення значень випадкової величини від її середнього

$$DX = M\left(X - MX\right)^2.$$

Якщо дискретна випадкова величина задана своїм розподілом, то дисперсія обчислюється за формулою:

$$DX = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - MX \right)^2 \cdot p_i . \tag{17}$$

Зручно також користуватись ще однією формулою дисперсії:

$$DX = M\left(X - MX\right)^2 = M\left(X^2 - 2X \cdot MX + \left(MX\right)^2\right) =$$

$$= MX^2 - 2MX \cdot MX + \left(MX\right)^2 = MX^2 - \left(MX\right)^2 .$$

$$DX = MX^2 - \left(MX\right)^2 . \tag{18}$$

Для дискретної випадкової величини:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - MX\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i MX + \left(MX\right)^2\right) p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2MX \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \left(MX\right)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(MX\right)^2 .$$

Властивості дисперсії:

- Дисперсія від сталої величини дорівнює нулю: $DC = 0$. Дійсно, користуючись означенням дисперсії:

$$DC = M\left(C - MC\right)^2 = M\left(C - C\right) = 0 .$$

- Сталий множник, піднесений до квадрату, можна виносити за знак дисперсії:

$$D\left(CX\right) = C^2 DX .$$

Дійсно, згідно з означенням дисперсії:

$$D\left(CX\right) = M\left(CX - MCX\right)^2 =$$

$$= M\left(C^2 X^2 - 2CX \cdot CMX + C^2 \left(MX\right)^2\right) =$$

$$= C^2 M\left(X - MX\right)^2 = C^2 DX .$$

- Дисперсія алгебраїчної суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D\left(X \pm Y\right) = DX \pm DY .$$

Якщо випадкова величина має певну розмірність, то дисперсія має розмірність в квадраті. Доцільно розглядати числову характеристику розсіювання випадкової величини, що має розмірність цієї ж випадкової величини. Така характеристика називається середнім квадратичним відхиленням позначається $\sigma(X)$ і знаходиться за формулою

$$\sigma(X)=\sqrt{DX}\ . \qquad (19)$$

Завдання 13. Дискретну випадкову величину задано розподілом:

X	3	5	7	9	11
p	?	0.1	0.4	0.2	0.1
$[a, b]$		[7, 11]			

а) Знайти невідому ймовірність.

б) Побудувати багатокутник розподілу.

в) Знайти математичне сподівання MX, дисперсію DX за двома формулами та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

г) Знайти моду і медіану розподілу.

д) Знайти функцію розподілу $F(X)$ і накреслити її графік.

е) Знайти імовірність попадання випадкової величини в інтервал $[a,b]$.

Розв'язання.

а) $p_1=1-(0.1+0.4+0.2+0.1)=0.2$.

б) Багатокутник розподілу – це ламана лінія, яка з'єднує точки (3,0.2), (5,0.1), (7.0,4), (9,0.2), (11,0.1). Багатокутник розподілу побудовано на рис. 5.

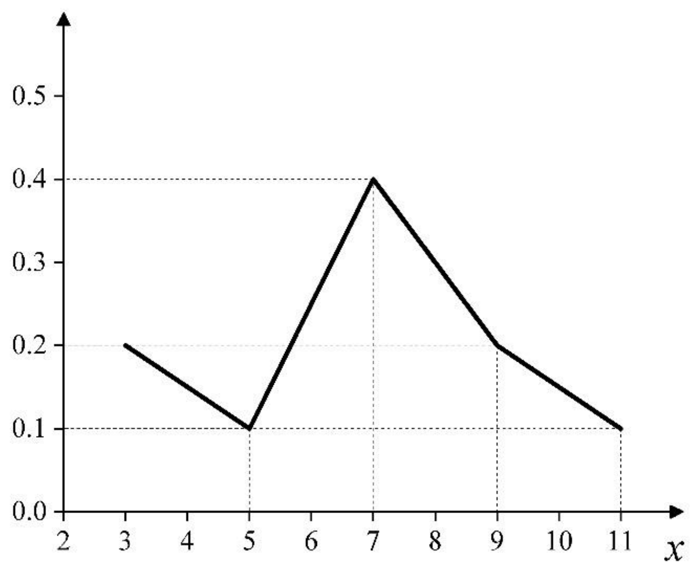


Рис. 5.

в) Обчислюємо математичне сподівання за формулою (16):

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 3\cdot 0.2 + 5\cdot 0.1 + 7\cdot 0.4 + 9\cdot 0.2 + 11\cdot 0.1 = 6.8,$$

дисперсію за двома формулами (17) і (18):

$$DX = \sum_{i=1}^{5} \left(x_i - MX \right)^2 \cdot p_i =$$

$$= \left(3 - 6.8\right)^2 \cdot 0.2 + \left(5 - 6.8\right)^2 \cdot 0.1 + \left(7 - 6.8\right)^2 \cdot 0.4 +$$

$$+ \left(9 - 6.8\right)^2 \cdot 0.2 + \left(11 - 6.8\right)^2 \cdot 0.1 = 5.96$$

$$DX = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i - \left(MX \right)^2 = 1.8 + 2.5 + 19.6 + 16.2 + 12.1 - 46.24 = 5.96 .$$

Середнє квадратичне відхилення знаходимо за формулою (19):

$$\sigma\left(X \right) = \sqrt{DX} = 2.44.$$

г) Значення випадкової величини з найбільшою ймовірністю називають модою $\left(Mod = 7 \right)$, середина розподілу є медіана $\left(Me = 7 \right)$.

д) Побудуємо функцію розподілу даної дискретної випадкової величини за формулою:

$$F\left(x\right) = \sum_{x_i < x} p_i .$$

Функцією розподілу випадкової величини X називають ймовірність того, що $X < x$ і позначать $F\left(x\right) = P\left(X < x\right)$.

$$F\left(x\right) = \begin{cases} 0; x < 3 \\ 0.2; 3 \le x < 5 \\ 0.2 + 0.1 = 0.3; 5 \le x < 7 \\ 0.2 + 0.1 + 0.4 = 0.7; 7 \le x < 9 \\ 0.2 + 0.1 + 0.4 + 0.2 = 0.9; 9 \le x < 11 \\ 0.2 + 0.1 + 0.4 + 0.2 + 0.1 = 1; x \ge 11 \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 6.

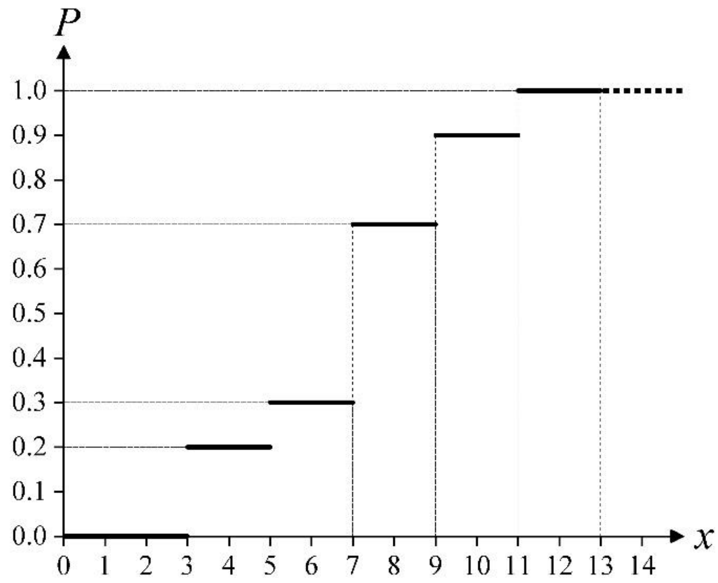


Рис. 6.

е) Ймовірність попадання в інтервал $[a,b]$ даної дискретної випадкової величини знаходимо за формулою:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

Отже $P(7 \le X \le 11) = F(11) - F(7) = 1 - 0.7 = 0.3.$

4.3. Неперервні випадкові величини

Неперервною називають таку випадкову величину, можливі значення якої суцільно заповнюють певний інтервал. Законом розподілу неперервної випадкової величини називають функцію дійсної змінної $F(x) = P(X < x)$. При цьому $F(x)$ неперервна і має такі ж властивості, як і для дискретної випадкової величини, а саме:

- Областю значень функції $F(x)$ є відрізок $[0,1]$, тобто $0 \le F(x) \le 1$.
- $F(x)$ – неспадна функція, тобто, якщо $x_1 < x_2 \to F(x_1) \le F(x_2)$.
- Ймовірність потрапляння в інтервал $[a,b]$ випадкової величини X: $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$.

•Якщо $X \in (a,b)$, то $F(x)=0$ для $x \in (-\infty, a)$, $F(x)=1$, $x \in (b, \infty)$.

При цьому ймовірність прийняти неперервною випадковою величиною конкретне значення є 0.

Для неперервної випадкової величини існує диференціальна функція розподілу, або щільність розподілу, яка є похідною від функції розподілу:

$$f(x)=F'(x).$$

Тоді

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Щільність розподілу є невід'ємною функцією, тобто $f(x)\geq 0$ при всіх дійсних значеннях x і має властивість:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

При цьому ймовірність попадання неперервної випадкової величини X в інтервал $[a,b]$ може бути обчислено за формулою:

$$P(a \leq X \leq b)=\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

4.4. Числові характеристики неперервних випадкових величин

Математичне сподівання:

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Для випадку, якщо $a \leq X \leq b$

$$MX=\int_{a}^{b} xf(x)dx. \qquad (19)$$

Дисперсія:

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty} (x-MX)^2 f(x)dx \text{ або } DX=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(MX)^2,$$

відповідно, якщо $a \leq X \leq b$

$$DX = \int_a^b x^2 f(x)dx - (MX)^2,$$

$$DX = \int_a^b (x - MX)^2 f(x)dx. \qquad (20)$$

Середнє квадратичне відхилення відповідно:

$$\sigma = \sqrt{D}.$$

4.5. Типи розподілів неперервних випадкових величин

Рівномірний розподіл. Рівномірним розподілом неперервної випадкової величини називають розподіл, диференціальна функція якого є сталою величиною C на певному проміжку (a,b) і нулю поза цим проміжком

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, a) \\ C \\ 0, x \in (b, \infty) \end{cases}$$

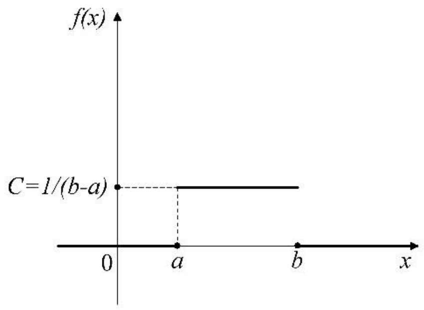
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \to \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_a^b Cdx + \int_b^{\infty} f(x)dx = 1.$$

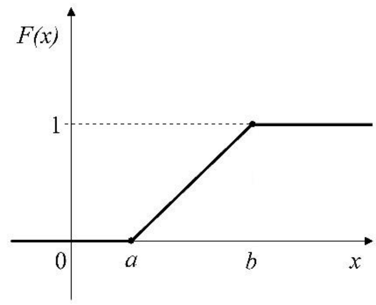
$$\int_a^b Cdx = C\int_a^b dx = C(b-a) = 1 \to C = \frac{1}{b-a}.$$

Таким чином, диференціальна та інтегральна функція рівномірного розподілу мають вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, a) \\ \dfrac{1}{b-a} \\ 0, x \in (b, \infty) \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, a) \\ \dfrac{x-a}{b-a} \\ 1, x \in (b, \infty) \end{cases}$$

Графіки диференціальної і інтегральної функцій рівномірного розподілу наведені на Рис. 7*а* та 7*б* відповідно.





а *б*

Рис. 7

При цьому числові характеристики MX і DX відповідно:

$$MX = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}.$$

$$DX = \int_a^b x^2 f(x) dx - (MX)^2 =$$

$$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Ймовірність попадання в інтервал рівномірно розподіленої випадкової величини дорівнює:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Показниковий закон розподілу. Диференціальна функція показникового закону задається співвідношенням

$$f(x) = \begin{cases} 0; x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}; x \ge 0 \end{cases}$$

Знайдемо інтегральну функцію:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Таким чином інтегральна функція має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0; x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}; x \ge 0 \end{cases}$$

Відповідно числові характеристики

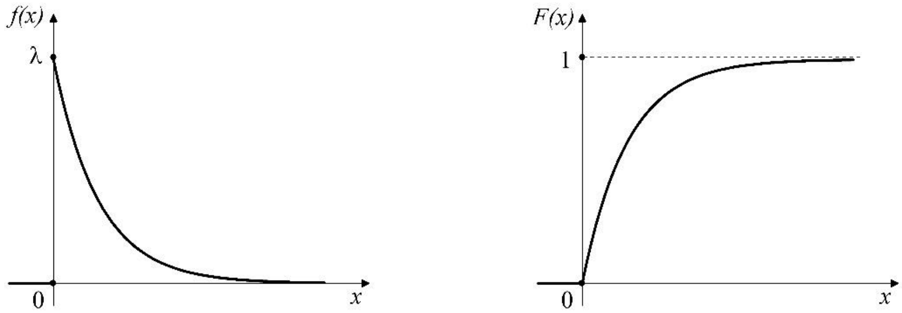
$$MX = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \begin{bmatrix} x = u, du = dx \\ \lambda e^{-\lambda x}dx = dv, v = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{-\lambda} \end{bmatrix} =$$

$$= -x\lambda e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\lambda x}dx = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Ймовірність попадання в інтервал для показниково розподіленої випадкової величини є

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \left(1 - e^{-\lambda\beta}\right) - \left(1 - e^{-\lambda\alpha}\right) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$$

Графіки диференціальної і інтегральної функцій показникового розподілу зображені на Рис. 8*а* та 8*б* відповідно.



а *б*

Рис. 8.

Слід відмітити, що показниковий закон застосовується при обчисленні ймовірностей в теорії надійності.

Завдання 14. Неперервна функція розподілу задана інтегральною функцією: знайти диференціальну функцію розподілу, числові характеристики і ймовірність попадання в інтервал $(2 \le X \le 3)$.

Розв'язання.

$$F(x)=\begin{cases} 0, x\le 0 \\ \dfrac{x^3}{64}, 0<x\le 4, \\ 1, x>4 \end{cases}$$

Знайдемо диференціальну функцію розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, x\le 0 \\ \dfrac{3x^2}{64}, 0<x\le 4 \\ 1, x>4 \end{cases}$$

Ймовірність попадання в інтервал можна обчислити за формулами:

$$P(2\le X\le 3)=F(3)-F(2)=\frac{3^3}{64}-\frac{2^3}{64}=\frac{19}{64},$$

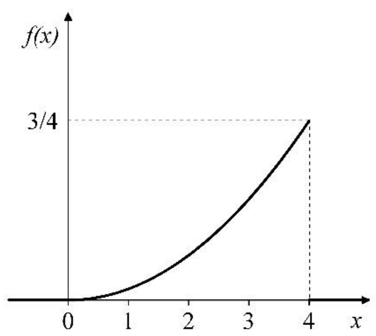
$$P(2\le X\le 3)=\int_2^3\frac{3x^2}{64}dx=\frac{3^3}{64}-\frac{2^3}{64}=\frac{19}{64}.$$

За формулами (19) і (20) обчислимо числові характеристики:

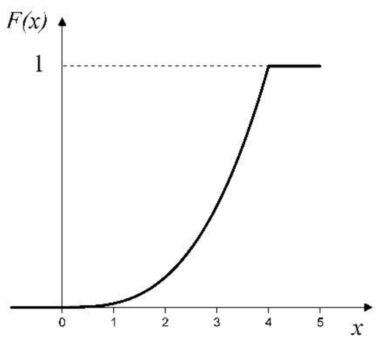
$$MX=\int_0^4 x\frac{3x^2}{64}dx=\left.\frac{3x^4}{256}\right|_0^4=3,\ DX=\int_a^b x^2 f(x)dx-(MX)^2,$$

$$DX=\int_0^4 x^2\frac{3x^2}{64}dx-(MX)^2=\frac{3\cdot 4^5}{5\cdot 64}-9=0.6,\ \sigma=\sqrt{0.6}=0.77.$$

Графіки диференціальної і інтегральної функцій розподілу зображено на рис. 9 *а* і *б* відповідно.



а



б

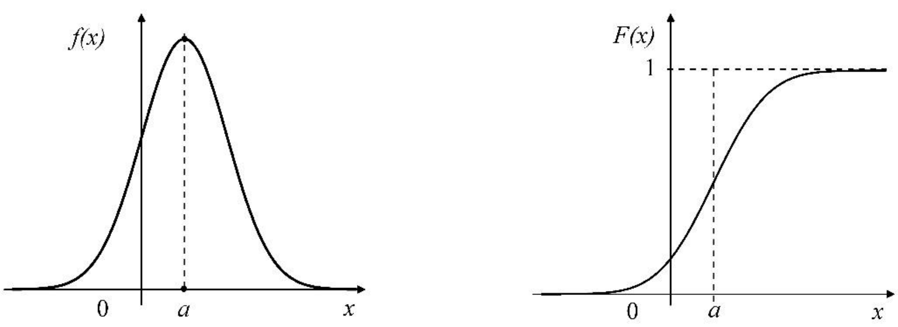
Рис. 9

Нормальний закон розподілу. Серед усіх законів розподілу неперервних випадкових величин важливу роль відіграє нормальний закон розподілу. Головна особливість цього закону полягає в тому, що він є граничним законом, до якого при певних умовах наближаються багато інших законів розподілу. Випадкова величина задана за нормальним законом, якщо її диференціальна функція розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де параметри $a = MX$, $\sigma = \sqrt{D}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Графіком диференціальної функції розподілу є крива, зображена на рис. 10, *а*. На рис. 10, *б* зображено графік інтегральної функції розподілу.



а *б*

Рис. 10

Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Ймовірність попадання в інтервал нормально розподіленої випадкової величини обчислюється за формулою

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Щоб обчислити ймовірність попадання в інтервал розглядають інтегральну функцію Лапласа канонічного вигляду, а саме:

$$\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Ця функція відповідає нормальному розподілу з параметрами $\left(a=0,\sigma=1\right)$ і є затабульованою (див. Додаток)

Далі буде показано, як інтегральну функцію нормального розподілу звести до канонічного інтеграла Лапласа. Для цього слід ввести заміну

$$t=\frac{x-a}{\sigma}.$$

Тоді ймовірність попадання в інтервал обчислюється за формулою

$$P\left(\alpha\le X\le\beta\right)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

При обчисленні за таблицями слід враховувати, що інтегральна функція Лапласа $\Phi\left(x\right)$ – непарна і тому

$$P\left(-\infty\le X\le+\infty\right)=\Phi\left(+\infty\right)-\Phi\left(-\infty\right)=2\Phi\left(+\infty\right)=1,\ \Phi\left(+\infty\right)=0.5.$$

Таким чином,

$$\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi\left(0\right)-\Phi\left(-\infty\right)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=0-0.5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0.5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

При обчисленні попадання в інтервал за допомогою інтегральної функції Лапласа канонічного вигляду слід враховувати межі інтегрування

$$P\left(\alpha\le X\le\beta\right)=\Phi\left(\beta\right)-\Phi\left(\alpha\right)=$$

$$0.5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\beta}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\left(0.5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\alpha}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)=\hat{\Phi}\left(\beta\right)-\hat{\Phi}\left(\alpha\right).$$

А саме $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0.5+\hat{\Phi}(x)$, де $\hat{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Для обчислення заданого відхилення нормально розподіленої випадкової величини з відповідними параметрами $a=MX$, $\sigma=\sqrt{D}$ користуються властивістю непарності інтегральної функції Лапласа:

$$P\{|X-a|\le\varepsilon\}=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Завдання 15. Задано математичне сподівання $a=9$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=3$ нормально розподіленої випадкової величини X. Обчислити ймовірність того, що:

- випадкова величина X набуває значень на проміжку (α,β), $\alpha=9$, $\beta=18$;
- абсолютна величина відхилення $|X-a|\le\varepsilon$, $\varepsilon=6$.

Розв'язання. Випадкова величина X має нормальний розподіл, а це означає, що щільність або диференціальна функція розподілу має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-9)^2}{2\cdot 3^2}}.$$

Тоді ймовірність попадання в заданий інтервал задається формулою:

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де канонічна $\Phi(x)$ – функція Лапласа, яка задана в таблицях. Таблиці додаються.

Ймовірність заданого відхилення обчислюється за формулою, яка враховує непарність функцій Лапласа. Тобто:

$$P(|X-a|\le\varepsilon)=P(-\varepsilon\le X-a\le\varepsilon)=$$

$$=\Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\varepsilon+a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

В даному випадку буде:

а) $P\left(9 \le X \le 18\right) = \Phi\left(\dfrac{18-9}{3}\right) - \Phi\left(\dfrac{9-9}{2}\right) =$

$= \Phi\left(3\right) - \Phi\left(0\right) = 0.4999 - 0 = 0.4999.$

б) $P\left(\left|X - 9\right| \le 6\right) = 2\Phi\left(\dfrac{6}{3}\right) = 2\Phi\left(2\right) = 2 \cdot 0.4772 \approx 0.954.$

Розділ 5. ДВОВИМІРНА ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА

В багатьох практичних задачах результат випробування описується не однією випадковою величиною, а кількома. У цьому випадку мають справу з багатовимірною випадковою величиною, можливі значення якої визначаються двома, трьома або n числами. Такі величини називають багатовимірними. Наприклад, при виготовленні бетонних плит контрольованими розмірами є довжина, ширина та висота. Фінансова звітність $\left(X, Y\right)$: X – інвестиції, Y – дохідність по різним суб'єктам господарювання. При пострілах по мішені – випадкова точка $\left(X, Y\right)$ – координати точки. Тризначна випадкова величина – випадкова точка з координатами $\left(X, Y, Z\right)$. Слід відмітити, що властивості системи випадкових величин не вичерпуються властивостями окремих її складових. Окрім цього вони також включають взаємні зв'язки (залежності) між випадковими величинами. Будемо розглядати двовимірну дискретну випадкову величину. Закон розподілу такої величини $\left(X, Y\right)$ задається кореляційною таблицею:

	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p\left(x_1, y_1\right) = = p_{11}$	$p\left(x_1, y_1\right) = = p_{21}$	…	$p\left(x_i, y_1\right) = = p_{i1}$	…	$p\left(x_n, y_1\right) = = p_{n1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{i2}	…	p_{n2}
…	…	…	…	…	…	…
y_j	p_{1j}	p_{2j}	…	p_{ij}	…	p_{nj}
…	…	…	…	…	…	…

y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{im}	…	p_{nm}
…	…	…	…	…	…	…

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p\left(x_i, y_j\right) = p_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

Тоді, користуючись кореляційною таблицею, можна знайти розподіли відповідно для одновимірних величин X і Y. Так , наприклад, знайдемо ймовірність того, що випадкова величина $\boldsymbol{X = x_i}$:

$$p_i = p\left(X = x_i\right) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{ij} + \ldots + p_{im}.$$

Аналогічно додаючи значення ймовірностей, що знаходяться в j рядку:

$$p\left(Y = y_j\right) = p\left(y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{1j} + p_{2j} + \ldots + p_{ij} + \ldots + p_{nj},$$

$$p\left(x_i\right) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},\ p\left(y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Користуючись кореляційною таблицею можна скласти розподіли для кожної компоненти двовимірної випадкової величини.

Розподіли для випадкових величин X і Y.

x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$p_1(x_1)$	p_2	…	p_i	…	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(x_i\right) = 1.$$

y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
$p_1(y_1)$	p_2	…	p_j	…	p_m

$$\sum_{j=1}^{m} p\left(y_j\right) = 1.$$

5.1. Числові характеристики двовимірної випадкової величини

Користуючись одновимірними розподілами можна знайти числові характеристики відповідно випадкових величин:

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p\left(x_i\right) \tag{21}$$

$$MY = \sum_{j=1}^{m} y_j p\left(y_j\right) \tag{22}$$

$$DX = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - MX\right)^2 p\left(x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p\left(x_i\right) - MX^2 \tag{23}$$

$$DY = \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - MY\right)^2 p\left(y_j\right) = \sum_{j=1}^{m} y_i^2 p\left(y_j\right) - MY^2 \tag{24}$$

$$\sigma\left(X\right) = \sqrt{DX}\,,\ \sigma\left(Y\right) = \sqrt{DY}\,.$$

Якщо зафіксувати значення одного з аргументів, наприклад $Y = y_j$, то отриманий розподіл випадкової величини X називається умовним розподілом X за умови $Y = y_j$. Ймовірності $p_j\left(x_i\right)$ такого розподілу будуть умовними ймовірностями подій $X = x_i$, за умови, що подія $Y = y_j$ відбулася. Нагадаємо формулу умовної ймовірності випадкової події:

$$P\left(A \cdot B\right) = P\left(A\right) P\left(B/A\right),\ P\left(B/A\right) = \frac{P\left(A \cdot B\right)}{P\left(A\right)}.$$

Формально перенесемо цю формулу для визначення умовної ймовірності $P\left(X/Y\right)$. Відповідно можна знайти числові характеристики умовних величин:

$$P\left(X = x_i / Y = y_i\right) = P\left(x_i / y_i\right) = \frac{p_{ij}}{p\left(y_j\right)},$$

$$M\left(X/y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i p\left(\frac{x_i}{y_j}\right) \tag{25}$$

$$M\left(Y/x_i\right) = \sum_{j=1}^{m} y_j p\left(\frac{y_j}{x_i}\right) \tag{26}$$

5.2. Кореляційний момент і коефіцієнт кореляції двовимірної випадкової величини

Для двовимірної випадкової величини вводиться поняття кореляційного моменту μ_{XY}, який характеризує зв'язок між X і Y:

$$\mu_{XY} = \mu\left(X,Y\right) = M\left(X - MX\right)\left(Y - MY\right).$$

Якщо випадкові величини незалежні, то $MXY = MX \cdot MY$ і кореляційний момент $\mu_{XY} = 0$

$$M\left(X - MX\right)\left(Y - MY\right) = M\left(X - MX\right) \cdot M\left(Y - MY\right) = 0.$$

Кореляційний момент в загальному випадку описується формулою:

$$\mu_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i - MX\right)\left(y_j - MY\right)p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - MXy_j p_{ij} - MYx_i p_{ij} + MYMXp_{ij}.$$

Остаточно отримуємо:

$$\mu_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - MX \cdot MY. \qquad (27)$$

Кореляційний момент $\mu\left(X,Y\right)$ характеризує степінь залежності двох випадкових величин. Кореляційний момент має розмірність добутку розмірностей випадкових величин X і Y. Це ускладнює використання кореляційного моменту для оцінки міри залежності випадкових величин X та Y. І тому вводиться коефіцієнт кореляції:

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_Y \sigma_X}. \qquad (28)$$

Коефіцієнт кореляції є безрозмірною величиною і задовольняє умові $\left|r_{XY}\right| \le 1$. Якщо $r_{XY} = 0$, то випадкові величини незалежні. Якщо $r_{XY} = 1$, то залежність між випадковими величинами лінійна.

Завдання 16. Двовимірна випадкова величина задана кореляційною таблицею. Знайти кореляційний момент і коефіцієнт кореляції. Знайти умовне математичне сподівання $M\left(X/y_j\right)$, $M\left(Y/x_i\right)$ $\left(i=2, j=1\right)$.

Розв'язання. Дано двовимірну випадкову величину, яка задана кореляційною таблицею.

$X\ /\ Y$	1	3	4
2	0.2	**?**	0.05
4	0.1	0.11	0.14
5	0.08	0.05	0.12

$$\sum p_{ij}=1.$$

Спочатку треба знайти невідому ймовірність p_{21}. Оскільки сума всіх ймовірностей має дорівнювати 1, маємо

$$p_{21}=1-\left(0.2+0.05+0.1+0.11+0.14+0.08+0.05+0.12\right)=0.15.$$

Далі складемо окремо розподіли випадкових величин X і Y, а також знайдемо відповідні числові характеристики.

Розподіл випадкової величини X:

X	1	3	4
P	0.38	0.31	0.31

$$MX=1\cdot 0.38+3\cdot 0.31+4\cdot 0.31=2.55.$$

$$DX=\left(1-2.55\right)^2\cdot 0.38+\left(3-2.55\right)^2\cdot 0.31+\left(4-2.55\right)^2\cdot 0.31=1.6275.$$

Дисперсію також можна обчислити за іншою формулою:

$$DX=\left(1\right)^2\cdot 0.38+\left(3\right)^2\cdot 0.31+\left(4\right)^2\cdot 0.31-\left(2.55\right)^2=1.6275,$$

$$\sigma_X=\sqrt{DX}=1.6275.$$

Розподіл випадкової величини Y:

Y	2	4	5
P	0.4	0.35	0.25

Відповідно:

$$MY=2\cdot 0.4+4\cdot 0.35+5\cdot 0.25=3.45,$$

$$DY = (2-0.345)^2 \cdot 0.4 + (4-0.345)^2 \cdot 0.35 + (5-0.345)^2 \cdot 0.25 = 1.5475$$

$$DY = (2)^2 \cdot 0.4 + (4)^2 \cdot 0.35 + (5)^2 \cdot 0.25 - (3.45)^2 = 1.5475$$

$$\sigma_Y = \sqrt{DY} = 1.244.$$

Знайдемо умовні математичні сподівання. Для цього спочатку треба знайти умовні ймовірності.

Умовні ймовірності. $P(X/y=2)$:

$$P(x=1/y=2) = \frac{P(x=1, y=2)}{p(y=2)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5,$$

$$P(x=3/y=2) = \frac{P(x=3, y=2)}{p(y=2)} = \frac{0.15}{0.4},$$

$$P(x=4/y=2) = \frac{P(x=4, y=2)}{p(y=2)} = \frac{0.05}{0.4}.$$

Перевірка:

$$P(x=1/y=2) + P(x=3/y=2) + P(x=4/y=2) = 1,$$

$$P(x=2/y=1) + P(x=4/y=1) + P(x=5/y=1) = 1.$$

Умовне математичне сподівання:

$$M(X/y=2) =$$

$$= 1 \cdot P(x=1/y=2) + 3 \cdot P(x=3/y=2) + 4 \cdot P(x=4/y=2) =$$

$$= \frac{1 \cdot 0.2}{0.4} + \frac{3 \cdot 0.15}{0.4} + \frac{4 \cdot 0.05}{0.4} = 2.125.$$

Умовні ймовірності:

$$P(y=2/x=3) = \frac{P(y=2, x=3)}{P(x=3)} = \frac{0.15}{0.31},$$

$$P(y=4/x=3) = \frac{P(y=4, x=3)}{P(x=3)} = \frac{0.11}{0.31},$$

$$P(y=5/x=3) = \frac{P(y=5, x=3)}{P(x=3)} = \frac{0.05}{0.31}.$$

Перевірка

$$P(y=2/x=3) + P(y=4/x=3) + P(y=5/x=3) = 1.$$

Умовне математичне сподівання $M\left(X/y=3\right)$:

$$M\left(X/y=3\right)=2\cdot\frac{0.15}{0.31}+4\cdot\frac{0.11}{0.31}+5\cdot\frac{0.05}{0.31}=3.1935.$$

Далі знайдемо кореляційний момент за формулою (27):

$$\mu\left(X,Y\right)=1\cdot2\cdot0.2+1\cdot4\cdot0.1+1\cdot5\cdot0.08+3\cdot2\cdot0.15+3\cdot5\cdot0.05+$$
$$+4\cdot2\cdot0.05+4\cdot4\cdot0.14+4\cdot5\cdot0.12-MX\cdot MY=0.4125,$$

та коефіцієнт кореляції за формулою (28):

$$\left|r_{XY}\right|=\frac{\mu\left(X,Y\right)}{\sigma_Y\sigma_X}.$$

Обчислимо коефіцієнт кореляції

$$\left|r_{XY}\right|=\frac{0.4125}{1.24\cdot1.62}=0.2053.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Підкидають два гральних кубика. Визначити ймовірність того, що:

- сума числа очок не перевищує числа *C*;
- добуток числа очок не перевищує числа *C*;
- добуток числа очок ділиться на числа *C*.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	7	6	9	5	9	11	10	7	12	4
Вар. №	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	6	8	7	9	10	5	8	4	6	3
Вар. №	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	11	10	9	7	8	4	9	5	7	11

Завдання 2. Серед n лотерейних білетів є k виграшних. Навмання взяли m білетів. Визначити ймовірність того, що серед них r виграшних.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n	10	11	12	11	9	15	8	9	12	13	11	8	9	10	11
k	4	5	5	3	4	6	3	5	5	7	3	2	4	6	4

m	5	4	4	4	3	4	4	4	4	5	4	3	4	5	5
r	2	3	3	2	1	3	2	3	2	2	1	1	3	3	2
Вар. №	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	11	10	8	10	11	10	9	11	12	7	8	10	12	9	11
k	5	4	3	4	5	3	4	5	5	4	3	6	5	3	5
m	4	6	5	6	5	4	3	6	4	3	2	4	5	4	6
r	1	3	2	2	4	2	3	3	3	2	1	2	4	1	3

Завдання 3. У ліфт r -поверхового будинку сіли n пасажирів $(n<r)$. Кожний з них незалежно від інших з однаковою ймовірністю може вийти на довільному поверсі, починаючи з другого. Визначити ймовірність того, що:

- усі вийшли на різних;
- хоча б двоє вийшли на одному.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
r	7	8	9	8	10	11	12	9	10	7	8	9	12	13	11
n	3	4	4	5	5	4	5	4	5	3	4	4	6	5	5
Вар. №	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
r	10	11	9	8	9	10	11	10	13	12	9	10	11	11	8
n	4	4	3	3	3	4	5	4	5	4	3	3	4	3	

Завдання 4. У крузі радіуса r од. знаходяться дві фігури довільної форми, що не перетинаються. Площі цих фігур дорівнюють s_1 і s_2 кв. од. відповідно. У круг навмання кидається точка. Визначити ймовірність того, що точка потрапить в одну з цих фігур.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
r	6	7	8	9	10	9	11	10	7	54	9	3	9	10	8
s_1	3.3	3.4	2.6	5.1	4	3.1	2.3	3.3	1.7	2.6	3.4	1.1	3.2	4.2	3.2
s_2	1.5	4.2	3.5	2.6	3.5	7.2	5.3	6.1	3.6	4.5	3.4	3.7	4.3	3.2	2.4
Вар. №	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
r	7	5	9	4	9	10	12	7	9	9	5	7	4	5	9
s_1	3.4	3.2	2.3	3.7	3.1	4.2	5.3	4.2	3.2	2.3	2.6	3.2	2.7	3.1	4.1
s_2	4.5	3.5	6.3	2.4	5	4.5	4.7	3.1	2.7	4.7	3.6	4.5	3.7	2.9	3.1

Завдання 5. У двох партіях m_1% і m_2% доброякісних виробів. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Знайти ймовірність того, що при цьому буде:

а) хоча б один бракований виріб;

б) два бракованих вироби;

в) один доброякісний, і один бракований.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m_1	71	65	43	81	95	54	63	85	74	73	81	62	58	81	65
m_2	54	42	75	37	47	34	75	46	53	41	37	47	42	36	48
Вар. №	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m_1	75	65	86	91	45	84	74	54	81	90	34	67	74	81	54
m_2	45	71	34	56	61	39	48	57	61	43	57	81	73	34	42

Завдання 6. Два снайпери стріляють по цілі. Ймовірність, попадання по цілі першим снайпером за один постріл p_1. Ймовірність попадання по цілі другим снайпером з одного пострілу p_2. Перший зробив m_1 пострілів, а другий – m_2. Знайти ймовірність того, що ціль не була знешкоджена.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0.43	0.63	0.72	0.56	0.64	0.82	0.74	0.63	0.56	0.47
p_2	0.55	0.63	0.54	0.71	0.81	0.64	0.67	0.46	0.53	0.62
m_1	2	4	3	2	4	6	3	1	4	3
m_2	3	4	1	4	2	1	3	3	2	4
Вар. №	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_1	0.49	0.74	0.45	0.76	0.38	0.53	0.42	0.43	0.37	0.33
p_2	0.75	0.67	0.47	0.62	0.76	0.48	0.45	0.51	0.47	0.61
m_1	4	3	1	2	3	2	3	4	3	2
m_2	2	3	2	3	2	4	1	3	2	4
Вар. №	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p_1	0.34	0.64	0.29	0.46	0.72	0.37	0.43	0.34	0.29	0.65
p_2	072	0.57	0.32	0.73	0.45	0.75	0.36	0.75	0.65	0.46
m_1	1	3	3	4	3	2	1	5	3	3
m_2	3	2	1	3	3	3	3	2	1	2

Завдання 7. Фірма отримала три партії персональних комп'ютерів. В 1-й партії – m_1 ПК, в 2-й – m_2 ПК і в 3-й – m_3. В першій партії – 7% браку, в другій – 6% і в третій – 5%. Навмання взяли один комп'ютер. Знайти ймовірність того, що він бракований.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_1	150	200	350	270	400	320	290	350	460	370
m_2	610	560	480	340	500	280	460	230	180	300
m_3	240	240	170	390	100	400	250	420	360	330
Вар. №	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m_1	610	230	480	160	400	340	260	350	410	350
m_2	230	540	130	480	240	260	420	450	370	290
m_3	160	230	390	360	360	400	320	200	220	360
Вар. №	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m_1	280	410	370	290	350	240	190	260	370	470
m_2	470	270	360	430	350	290	370	190	380	300
m_3	250	320	270	280	300	470	440	550	250	230

Завдання 8. До податкової інспекції на певний момент надійшли звіти з трьох приватних підприємств: З підприємства № 1 – m_1%, № 2 – m_2%, № 3 – m_3% звітів. Серед цих документів не виявлено порушень відповідно на підприємстві № 1 в n_1%, на підприємстві № 2 – n_2%, на підприємстві № 3 – n_3%. Для перевірки взяли один звіт. Він виявився без порушень. Яка ймовірність того, що це звіт j-го підприємства.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m_1	50	40	60	30	40	40	30	50	40	30	20	50	40	30	40
m_2	20	30	20	30	20	30	40	20	30	20	40	20	20	40	20
m_3	30	30	30	40	40	30	30	30	30	50	40	30	40	30	40
n_1	70	80	90	60	70	70	80	90	50	70	90	60	80	80	70
n_2	80	70	60	80	60	70	50	90	70	60	70	70	40	70	80
n_3	60	70	80	70	60	90	80	50	60	70	70	90	80	70	60
j	1	2	3	3	1	2	2	3	1	1	3	2	1	3	2
Вар. №	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

m_1	40	60	70	40	50	30	40	70	40	50	60	40	50	60	50
m_2	30	20	10	30	10	30	30	20	40	20	20	30	20	20	30
m_3	30	20	20	30	40	40	30	30	20	30	20	30	30	20	20
n_1	60	70	80	80	40	50	60	70	80	60	50	70	80	40	60
n_2	70	80	50	70	60	70	80	70	90	50	70	80	60	90	70
n_3	40	80	50	60	70	50	70	80	50	70	50	70	80	60	90
j	2	3	1	2	3	1	2	3	3	1	1	2	3	1	2

Завдання 9. Ймовірність виграшу на один квиток дорівнює p. Куплено n квитків. Знайти найбільш ймовірне число виграшних квитків.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.4	0.3	0.4	0.4	0.3	0.6	0.4	0.5	0.7	0.3
n	10	12	14	13	15	12	11	13	15	13	11	14	14	11	12
Вар. №	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p	0.4	0.3	0.3	0.4	0.4	0.6	0.4	0.3	0.6	0.3	0.7	0.4	0.3	0.6	0.6
n	11	12	13	14	11	14	15	11	10	12	14	12	11	10	11

Завдання 10. На кожний лотерейний білет з ймовірністю p_1 може випасти крупний виграш, з ймовірністю p_2 може випасти дрібний виграш і з ймовірністю p_3 білет може виявитись без виграшу. Куплено n квитків. Знайти ймовірність того, що серед них буде n_1 крупних, n_2 дрібних виграшів і n_3 – без виграшу.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	15	14	15	14	15	15	14	15	15	14
n_1	3	3	3	1	2	2	2	2	3	2
n_2	4	3	3	3	4	4	3	2	2	3
p_1	0.3	0.2	0.15	0.15	0.1	0.2	0.1	0.15	0.1	0.15
p_2	0.2	0.15	0.14	0.16	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.2

Вар. №	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	15	15	14	15	15	14	14	15	15	14
n_1	2	3	2	3	1	3	2	3	2	3
n_2	3	2	2	3	4	2	3	2	4	4
p_1	0.13	0.14	0.15	0.12	0.2	0.1	0.2	0.3	0.11	0.12
p_2	0.3	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.2	0.2	0.11
Вар. №	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	15	16	15	14	15	14	14	15	15	15
n_1	4	4	4	3	2	3	2	3	4	2
n_2	3	4	3	2	4	4	3	3	4	3
p_1	0.13	0.2	0.13	0.1	0.2	0.11	0.12	0.13	0.1	0.2
p_2	0.2	0.2	0.1	0.2	0.1	0.13	0.12	0.11	0.2	0.1

Завдання 11. Ймовірність збою в роботі мобільного оператора при з'єднанні абонентів дорівнює p. Відбуваються n викликів по мобільній мережі. Знайти ймовірність r збоїв.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	7	7	7	6	6	6	8	8	6	7
n	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
p	0.002	0.003	0,002	0.004	0.004	0.005	0.006	0.003	0.007	0.007
Вар. №	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r	8	7	9	7	8	9	7	6	6	8
n	500	300	400	700	400	600	800	500	400	700
p	0.01	0.02	0.03	0.01	0.02	0.01	0.05	0.04	0.03	0.03
Вар. №	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
r	9	6	7	6	9	7	8	9	8	7
n	500	400	600	400	400	500	1000	600	500	900
p	0.004	0.005	0.01	0.02	0.01	0.002	0.003	0.005	0.006	0.01

Завдання 12. Ймовірність появи деякої події у кожному з n незалежних випробувань дорівнює p. Визначити ймовірність того, що число появ події задовольняє нерівності:

а) варіант 1-10: $m_1 \le m \le m_2$;

б) варіанти 11-20: $m_1 \le m$;

в) варіанти 21-30: $m \le m_2$.

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
p	0.8	0.7	0.6	0.7	0.6	0.7	0.8	0.7	0.6	0.5
m_1	60	80	70	75	80	75	70	60	65	60
m_2	70	90	90	95	95	90	09	85	85	75
Вар. №	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
p	0.4	0.5	0.6	0.6	0.4	0.7	0.8	0.7	0.6	0.7
m_1	80	60	70	65	75	50	65	70	80	70
m_2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Вар. №	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	400	300	200	300	400	200	100	400	400	400
p	0.8	0.6	0.4	0.6	0.7	0.8	0.3	0.7	0.4	0.3
m_1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
m_2	100	200	80	100	200	80	70	150	200	350

Завдання 13. Дискретна випадкова величина задана розподілом.

X	3	5	7	9	11
p	?	0.1	0.4	0.2	0.1
$[a,b]$		[7,11]			

а) Знайти невідому ймовірність.

б) Побудувати багатокутник розподілу.

в) Знайти математичне сподівання MX і дисперсію DX, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$, причому дисперсію за двома формулами.

г) Знайти функцію розподілу $F(X)$ і накреслити її графік.

д) Знайти імовірність попадання в інтервал $[a,b]$.

Вар. №	**1**					**2**					**3**				
x	6	8	10	12	14	20	40	50	60	70	3	5	7	9	11
p	0.1	0.2	0.3	p_4	0.3	0.3	0.1	p_3	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	p_5
	[8,13]					[20,60]					[5,10]				
Вар. №	**4**					**5**					**6**				
x	11	14	17	20	23	13	16	17	19	23	1	4	7	8	10
p	0.2	p_2	0.3	0.1	0.3	p_1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.2	p_2	0.1	0.1	0.4
	[14,22]					[16,22]					[4,9]				
Вар. №	**7**					**8**					**9**				
x	11	14	15	17	19	22	24	25	28	31	13	15	16	18	21
p	0.2	0.1	p_3	0.1	0.3	0.1	p_2	0.2	0.2	0.1	p_1	0.1	0.3	0.2	0.3
	[11,18]					[24,30]					[15,20]				

Вар. №	10					11					12				
x	3	5	7	8	10	13	15	17	19	22	3	5	7	9	11
p	0.2	0.1	0.3	p_4	0.3	0.2	0.3	0.1	0.1	p_5	0.2	p_2	0.3	0.1	0.2
	[5,10]					[17,22]					[5,11]				
Вар. №	13					14					15				
x	-4	-2	0	2	5	-11	-9	-7	-5	-3	-3	0	3	5	6
p	0.2	p_2	0.1	0.3	0.1	p_1	0.2	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1	p_3	0.2	0.1
	[-1,2]					[-8,-4]					[1,4]				
Вар. №	16					17					18				
x	11	13	15	17	19	-1	2	4	6	8	6	10	14	15	17
p	0.1	0.3	0.2	0.1	p_5	0.2	0.1	0.3	p_4	0.1	0.2	0.3	0.1	p_4	0.1
	[13,18]					[2,7]					[10,17]				
Вар. №	19					20					21				
x	11	13	15	17	19	3	6	9	12	15	2	5	8	11	14
p	0.2	p_2	0.3	0.1	0.2	p_1	0.2	0.3	0.3	0.1	0.15	p_2	0.25	0.3	0.1
	[13,18]					[7,14]					[9,13]				
Вар. №	22					23					24				
x	12	14	16	18	20	1	3	5	7	9	0	6	10	14	16
p	0.05	p_2	0.15	0.3	0.25	p_1	0.1	0.2	0.3	0.1	0.15	0.25	0.2	0.35	p_5
	[12,17]					[5,9]					[8,15]				

Завдання 14. Неперервна функція розподілу задана інтегральною функцією розподілу: знайти диференціальну функцію розподілу, числові характеристики і ймовірність попадання в інтервал $\left(a \le X \le b\right)$.

Вар. №	1	2
$F\left(x\right)$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{16}, 0 < x \le 4 \\ 1, x > 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le 2 \\ \left(x-2\right)^2, 2 < x \le 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$
$\left(a,b\right)$	$\left(2,6\right)$	$\left(2,2.5\right)$
Вар. №	3	4
$F\left(x\right)$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ x^3, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1-\cos 3x, 0 < x \le \dfrac{\pi}{6} \\ 1, x > \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$
$\left(a,b\right)$	$\left(0,0.5\right)$	$\left(0,\pi/12\right)$

Вар. №	5	6
$F(x)$	$\begin{cases} 0, x \le -2 \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, -2 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \sin 2x, 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 1, x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$
(a,b)	$(-1,1)$	$\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$
Вар. №	7	8
$F(x)$	$\begin{cases} 0, x \le 1 \\ \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right), 0 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{x^2}{36}, 0 < x \le 6 \\ 1, x > 6 \end{cases}$
(a,b)	$(0.5,1.5)$	$(1,4)$
Вар. №	9	10
$F(x)$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1-\cos x, 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{x^2}{25}, 0 < x \le 5 \\ 1, x > 5 \end{cases}$
(a,b)	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$(0.5,4)$
ар. №	11	12
$F(x)$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \sin\frac{x}{2}, 0 < x \le \pi \\ 1, x > \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le -2 \\ \frac{x}{6}+\frac{1}{3}, -2 < x \le 4 \\ 1, x > 4 \end{cases}$
(a,b)	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	$(-1,3)$
Вар. №	13	14

$F(x)$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{64}, 0 < x \le 8 \\ 1, x > 8 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1-\cos 2x, 0 < x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1, x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$
(a,b)	$(2,6)$	$(0,\pi/8)$
Вар. №	15	16
$F(x)$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{81}, 0 < x \le 9 \\ 1, x > 9 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ (x-4)^2, 4 < x \le 5 \\ 1, x > 5 \end{cases}$
(a,b)	$(5,8)$	$(4.5,5)$
Вар. №	17	18
$F(x)$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{100}, 0 < x \le 10 \\ 1, x > 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{49}, 0 < x \le 7 \\ 1, x > 7 \end{cases}$
(a,b)	$(8,10)$	$(3,6)$
Вар. №	19	20
$F(x)$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ x^2, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}, 0 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$
(a,b)	$(0.5,0.75)$	$(1,1.5)$
Вар. №	21	22
$F(x)$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{1}{6}(x^2+x), 0 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^3}{8}, 0 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$
(a,b)	$(1,1.5)$	$(1,1.5)$

Вар. №	23	24
$F(x)$	$\begin{cases} 0, x \le -2.5 \\ \dfrac{2x+5}{9}, -2.5 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^3}{27}, 0 < x \le 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$
(a,b)	$(-2,0)$	$(1,2)$

Завдання 15. Задано математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Обчислити ймовірність того, що:

а) випадкова величина X набуде значення з проміжку (α,β);

б) абсолютна величина відхилення $|X-a| \le \varepsilon$.

в)

Вар. №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	7	10	4	6	12	3	16	9	2	5	8	7	5	6
σ	6	3	4	5	4	1	2	3	4	2	2	1	3	2	4
α	-4	4	8	-2	5	0	10	4	-5	1	6	2	4	6	5
β	1	10	12	3	4	10	18	14	4	6	8	11	13	18	10
ε	3	4	6	4	56	4	2	3	4	3	3	4	2	3	4
Вар. №	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	10	9	7	6	4	7	6	2	8	9	9	8	7	6	10
σ	1	2	4	5	6	3	4	4	1	3	4	5	5	4	3
α	3	2	5	3	2	4	1	5	3	7	3	2	6	4	7
β	1	10	12	3	4	10	18	14	4	6	8	11	13	18	10
ε	3	4	6	4	5	4	2	3	4	3	3	4	2	3	4

Завдання 16. Двовимірна випадкова величина задана кореляційною таблицею. Знайти кореляційний момент і коефіцієнт кореляції. Знайти умовне математичне сподівання $M\left(X/y_j\right)$, $M\left(Y/x_i\right)$

Вар. №	**1** *(j=2,i=3)*					**2** *(j=1,i=3)*					**3** *(j=2,i=1)*			
Y/X	**-2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***Y/X***	**1**	**3**	**5**	**9**	***Y/X***	**-3**	**-1**	**2**	**3**
0.7	0.1	0.03	0.05	0.1	0.15	**12**	0.02	0.11	0.03	0.04	**4**	0.03	0.12	0.02	0.01
0.8	0.05	0.02	0.01	0.03	0.12	**14**	p_{12}	0.03	0.02	0.01	**5**	0.02	0.13	0.07	0.05
0.9	0.04	0.02	0.04	0.04	0.04	**16**	0.05	0.14	0.1	0.12	**6**	0.1	0.15	p_{33}	0.03
1	p_{14}	0.03	0.05	0.02	0.01	**18**	0.03	0.05	0.05	0.01	**7**	0.1	0.01	0.05	0.1
Вар. №	**4** *(j=2,i=2)*					**5** *(j=2,i=1)*					**6** *(j=1,i=3)*			
Y/X	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	***Y/X***	**7**	**9**	**11**	**13**	***Y/X***	**6**	**12**	**18**	**24**
4	0.1	0.03	0.05	0.1	0.15	**-3**	0.02	0.11	0.03	0.04	**0.3**	0.03	0.12	0.02	0.01
6	0.05	0.02	0.01	0.04	0.12	**-5**	0.03	p_{23}	0.02	0.01	**0.5**	0.02	0.13	0.07	0.05
8	0.04	0.02	0.04	0.03	0.04	**-7**	0.05	0.14	0.1	0.12	**0.7**	0.1	0.15	p_{33}	0.03
10	p_{14}	0.03	0.05	0.02	0.01	**-9**	0.03	0.05	0.05	0.01	**0.9**	0.1	0.01	0.05	0.1
Вар. №	**7** *(j=2,i=1)*					**8** *(j=2,i=2)*					**9** *(j=3,i=3)*			
Y/X	**3**	**5**	**6**	**7**	**9**	***Y/X***	**-5**	**-3**	**-1**	**0**	***Y/X***	**2**	**4**	**6**	**8**
11	0.01	0.12	0.03	0.04	0.02	**8**	0.02	0.11	0.03	0.04	**11**	0.03	0.12	0.02	0.01
13	0.01	p_{23}	0.02	0.01	0.09	**9**	p_{12}	0.07	0.02	0.01	**13**	0.02	p_{22}	0.07	0.05
15	0.05	0.14	0.07	0.12	0.05	**10**	0.05	0.14	0.1	0.12	**15**	0.1	0.07	0.12	0.03
17	0.03	0.05	0.03	0.01	0.06	**11**	0.03	0.05	0.05	0.01	**17**	0.1	0.06	0.05	0.1
Вар. №	**10** *(j=2,i=4)*					**11** *(j=4,i=3)*					**12** *(j=4,i=1)*			
Y/X	**-6**	**-4**	**-2**	**-1**	**3**	***Y/X***	**10**	**20**	**30**	**40**	***Y/X***	**1**	**2**	**3**	**4**
9	0.1	0.03	0.05	0.1	0.02	**0.1**	0.02	0.11	0.03	0.04	**12**	0.02	0.11	0.03	0.04
10	0.05	0.12	0.01	0.03	0.10	**0.4**	p_{12}	0.03	0.02	0.01	**15**	p_{12}	0.03	0.02	0.01
11	0.04	0.02	0.04	0.04	0.04	**0.7**	0.05	0.14	0.1	0.12	**18**	0.05	0.14	0.1	0.12
12	0.03	p_{24}	0.05	0.02	0.01	**1.0**	0.03	0.05	0.05	0.01	**21**	0.03	0.05	0.05	0.01
Вар. №	**13** *(j=4,i=1)*					**14** *(j=2,i=4)*					**15** *(j=4,i=3)*			
Y/X	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	***Y/X***	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	***Y/X***	**3**	**5**	**7**	**9**
8	0.1	0.03	0.05	0.1	0.15	**9**	0.05	0.11	0.03	0.04	**1**	0.02	0.11	0.03	0.04
6	0.05	0.02	0.01	0.03	0.12	**11**	p_{12}	0.07	0.02	0.03	**2**	p_{12}	0.03	0.02	0.01
4	0.04	0.02	0.04	0.04	0.04	**13**	0.05	0.12	0.10	0.11	**3**	0.05	0.14	0.1	0.12
2	p_{14}	0.03	0.05	0.02	0.01	**15**	0.08	0.05	0.05	0.02	**4**	0.03	0.05	0.05	0.01
Вар. №	**16** *(j=4,i=3)*					**17** *(j=2,i=1)*					**18** *(j=2,i=4)*			
Y/X	**21**	**23**	**25**	**27**	**29**	***Y/X***	**-5**	**-6**	**-8**	**-9**	***Y/X***	**-3**	**-2**	**-1**	**0**
7	0.1	0.03	0.05	0.1	0.15	**-8**	0.02	0.11	0.03	0.04	**8**	0.02	0.11	0.03	0.04
8	0.05	0.02	0.01	0.03	0.12	**-6**	p_{12}	0.03	0.02	0.01	**6**	p_{12}	0.03	0.02	0.01
9	0.04	0.02	0.04	p_{33}	0.04	**-4**	0.05	0.14	0.1	0.12	**4**	0.05	0.14	0.1	0.12
10	0.05	0.03	0.05	0.02	0.01	**-2**	0.03	0.05	0.05	0.01	**2**	0.03	0.05	0.05	0.01
Вар. №	**19** *(j=3,i=3)*					**20** *(j=2,i=4)*					**21** *(j=4,i=3)*			
Y/X	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	***Y/X***	**7**	**9**	**11**	**13**	***Y/X***	**3**	**5**	**7**	**9**
8	0.08	0.01	0.04	0.11	0.14	**-6**	0.01	0.12	0.04	0.06	**2**	0.03	0.10	0.05	0.02
5	0.04	0.02	0.01	0.03	0.12	**-5**	p_{12}	0.04	0.03	0.01	**4**	p_{12}	0.03	0.12	0.01
4	0.05	0.08	0.04	p_{33}	0.04	**-4**	0.10	0.14	0.1	0.12	**6**	0.05	0.14	0.1	0.12
3	0.03	0.03	0.05	0.02	0.01	**-3**	0.05	0.05	0.05	0.01	**8**	0.03	0.05	0.05	0.01
Вар. №	**22** *(j=1,i=3)*					**23** *(j=2,i=1)*					**24** *(j=1,i=1)*			
Y/X	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	***Y/X***	**7**	**9**	**11**	**13**	***Y/X***	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0.10	0.03	0.05	0.10	0.15	**5**	0.02	0.11	0.03	0.04	**10**	0.02	0.11	0.03	0.04
2	0.05	0.02	0.01	0.03	0.12	**6**	p_{12}	0.03	0.02	0.01	**20**	p_{12}	0.03	0.02	0.01
3	0.04	0.02	0.04	0.04	0.04	**7**	0.05	0.14	0.10	0.12	**30**	0.05	0.14	0.10	0.12
4	p_{14}	0.03	0.05	0.02	0.01	**8**	0.03	0.05	0.05	0.01	**40**	0.03	0.05	0.05	0.01
Вар. №	**25** *(j=2,i=2)*					**26** *(j=2,i=4)*					**27** *(j=2,i=1))*			

Y/X	**-2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***Y/X***	**1**	**3**	**5**	**9**	***Y/X***	**-3**	**-1**	**2**	**3**
0.7	0.1	0.03	0.05	0.1	0.15	**12**	0.02	0.11	0.03	0.04	**4**	0.03	0.12	0.02	0.01
0.8	0.05	0.02	0.01	0.03	0.12	**14**	p_{12}	0.03	0.02	0.01	**5**	0.02	0.13	0.07	0.05
0.9	0.04	0.02	0.04	0.04	0.04	**16**	0.05	0.14	0.1	0.12	**6**	0.1	0.15	p_{33}	0.03
1	p_{14}	0.03	0.05	0.02	0.01	**18**	0.03	0.05	0.05	0.01	**7**	0.1	0.01	0.05	0.1
Вар. №	**28** *(j=2,i=3)*					**29** *(j=1,i=3)*					**30** *(j=2,i=4)*				
Y/X	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	***Y/X***	**7**	**9**	**11**	**13**	***Y/X***	**6**	**12**	**18**	**24**
4	0.1	0.03	0.05	0.1	0.15	**-3**	0.02	0.11	0.03	0.04	**0.3**	0.03	0.12	0.02	0.01
6	0.05	0.02	0.01	0.04	0.12	**-5**	0.03	p_{23}	0.02	0.01	**0.5**	0.02	0.13	0.07	0.05
8	0.04	0.02	0.04	0.03	0.04	**-7**	0.05	0.14	0.1	0.12	**0.7**	0.1	0.15	p_{33}	0.03
10	p_{14}	0.03	0.05	0.02	0.01	**-9**	0.03	0.05	0.05	0.01	**0.9**	0.1	0.01	0.05	0.1

Список літератури

1. *Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К.* Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. – Київ: Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.

2. *НаголкінаЗ.І., Роде С.Г., Шитюк В.С.* Практикум з математичної статистики. – Київ: КНУБА, 2013.

3. *Бондаренко Н.В., Наголкіна З.І., Пастухова М.С.* Теорія ймовірностей: навчальний посібник. – Київ: КНУБА, 2016.

Додаток

Значення функції Лапласа $\Phi\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$

x	**Φ(*x*)**	***x***	**Φ(*x*)**	***x***	**Φ(*x*)**	***x***	**Φ(*x*)**	***x***	**Φ(*x*)**	***x***	**Φ(*x*)**
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	3,00	0,49865
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	0,4783	3,20	0,49931
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793	3,40	0,49966
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803	3,60	0,499841
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812	3,80	0,499928
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821	4,00	0,499968
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830	4,50	0,499997
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838	5,00	0,499997
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846		
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854		
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861		
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868		
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875		
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881		
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887		
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893		
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898		
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904		
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909		
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913		
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973		
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974		

Закінчення додатка

0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976		
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977		
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,86	0,4979		
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980		
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981		
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,92	0,4982		
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,94	0,4984		
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,96	0,4985		
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,98	0,4986		

Навчально-методичне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 073 «Менеджмент»,
051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування»

Укладачі: **Наголкіна** Зоя Іванівна,
Соколова Людмила Віталіївна,
Філонов Юрій Петрович,
Чорноіван Юрій Олексійович

Комп'ютерне верстання *А. П. Селівестрової*

Ум. друк. арк. 3,95. Обл.-вид. арк. 4,25
Електронний документ. Вид № 113/V-25

Виконавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури
Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.