

УДК 539.3

**В.А. Баженов**, д-р техн. наук**Є.С. Дехтярюк**, д-р техн. наук**О.О. Лук'янченко**, канд. техн. наук**О.В. Костіна**, канд. техн. наук

## **ЧИСЕЛЬНА ПОБУДОВА РЕДУКОВАНИХ МОДЕЛЕЙ СТОХАСТИЧНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК**

Розроблений чисельний підхід до побудови редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пологих оболонок із застосуванням методів скінченних елементів, узагальнених координат та асимптотичного методу, що заснований на розкладанні статистичних характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром. Задача стійкості формулюється як задача стійкості відносно моментних функцій. За рахунок розщеплення кореляції зовнішніх впливів на пружну систему з відповідними динамічними станами отримана система лінійних автономних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Серед динамічних задач теорії пластин і оболонок значне місце займають задачі про динамічну стійкість параметричних коливань, що виникають при періодичній або стохастичній зміні вібраційних навантажень [1 - 7]. В основні диференціальні рівняння динамічної задачі величини, що характеризують такі навантаження, входять в якості параметрів. Поведінка стохастичних систем описується за допомогою диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, зміна значень яких має випадковий характер. Стійкість стохастичних систем розглядається як стійкість за ймовірністю, стійкість у середньому або по сукупності моментних функцій різних порядків [4]. Типовою проблемою для цих задач є редукція нескінченної системи до скінченної. Для цього використовується функціональний або класичний підхід. Важливою є задача створення редукованих моделей стохастичних параметричних коливань оболонок. Її розв'язання за допомогою аналітичних методів є складним і містить деякі припущення, тому все частіше застосовуються чисельні методи. Завдяки наочності, високій алгоритмічності та легкості у використанні для побудови дискретних моделей конструкцій широке застосування отримав метод скінченних елементів [8].

В роботі для побудови редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пологих оболонок застосовується чисельна методика [7], розроблена на основі методу скінченних елементів [8], програмного комплексу NASTRAN [9] і створеної авторами програми; та асимптотичний метод, заснований на розкладанні статистичних

характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром, який є відношенням часу кореляції випадкового впливу до характерних часових масштабів задачі [4]. Проблема стійкості зводиться до дослідження стійкості тривіальних розв'язків диференціальних рівнянь, змінні коефіцієнти яких являють собою випадкові функції. Задача стійкості формулюється як задача стійкості відносно моментних функцій другого порядку. За рахунок розщеплення кореляції зовнішніх впливів на пружну систему з відповідними динамічними станами отримана система лінійних автономних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Дискретна скінченноелементна модель стохастичних параметричних коливань пологої оболонки записується у вигляді системи лінеаризованих звичайних диференціальних рівнянь

$$M\ddot{\bar{u}}(t) + C\dot{\bar{u}}(t) + K\bar{u}(t) + z(t)K_G\bar{u}(t) = 0, \quad (1)$$

де  $M$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $K_G$  – матриці розмірності  $n \times n$ ,  $\bar{u}(t)$  –  $n$ -вимірний вектор вузлових переміщень,  $z(t)$  – випадковий процес, який характеризує інтенсивність параметричного впливу.

Наближені розв'язки системи (1) будуються методом редукції. Для цього вектор  $\bar{u}(t)$  шукається у вигляді  $\bar{u}(t) = U\bar{y}(t)$ , де  $U = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_m)$  – деяка підмножина базисних векторів. Кількість застосованих векторів  $m$  може бути прийнята значно меншою розмірності  $n$ .

Тоді система (1) зводиться до виду

$$M^*\ddot{\bar{y}}(t) + C^*\dot{\bar{y}}(t) + K^*\bar{y}(t) + z(t)K_G^*\bar{y}(t) = 0, \quad (2)$$

де  $M^*$ ,  $C^*$ ,  $K^*$  та  $K_G^*$  – редуковані матриці мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, що обчислюються за методикою [7].

Якщо ввести  $2m$ -вимірний вектор фазових змінних

$$\bar{\zeta}(t) = (\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_{2m}(t))^T = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dots, \dot{y}_m(t))^T,$$

то систему (2) можна переписати в нормальній формі

$$\frac{d}{dt}\bar{\zeta}(t) = A\bar{\zeta}(t) + z(t)B\bar{\zeta}(t). \quad (3)$$

Матриці  $A$  і  $B$  обчислюються за формулами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -(M^*)^{-1}K^* & -(M^*)^{-1}C^* \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(M^*)^{-1}K_G^* & 0 \end{bmatrix},$$

де  $E$  – одинична матриця розмірності  $m \times m$ .

Для системи (3) розглядається задача Коші з початковими умовами  $\bar{\zeta}(0) = \bar{\zeta}_0$ , де вектор  $\bar{\zeta}_0 = (\zeta_{01}, \zeta_{02}, \dots, \zeta_{02m})^T$  вважається детермінованим.

Питання про втрату динамічної стійкості оболонки еквівалентне питанню про стійкість тривіальних розв'язків рівнянь (3). Внаслідок того, що коефіцієнти рівнянь – випадкові величини, стійкість розглядається у стохастичному розумінні. У роботі питання стійкості досліджується у середньому на основі моментних функцій фазових координат другого порядку, для отримання яких застосовується функціональний підхід [4]. При усередненні за ансамблем реалізацій системи (3) рівняння набувають вигляду

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \rangle = A \langle \bar{\zeta}(t) \rangle + B \langle z(t) \bar{\zeta}(t) \rangle, \quad \langle \bar{\zeta}(0) \rangle = \bar{\zeta}_0. \quad (4)$$

Система (4) незамкнена відносно змінних  $\langle \bar{\zeta}(t) \rangle = (\langle \zeta_1(t) \rangle, \langle \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$ , бо містить нові невідомі функції  $\langle z(t) \bar{\zeta}(t) \rangle = (\langle z(t) \zeta_1(t) \rangle, \langle z(t) \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle z(t) \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$ , які є кореляціями в момент часу  $t$  випадкового процесу  $z(t)$  з розв'язком  $\bar{\zeta}(t)$  системи (3), компоненти якого є функціоналами від випадкового процесу  $z(t)$  в інтервалі  $[0, t]$ . При розгляданні системи (4) застосовується підхід розщеплення середнього добутку двох функціоналів. Якщо  $R[z(\tau)]$  – деякий функціонал від гаусового центрованого процесу, то для середнього добутку  $\langle z(t) R[z(t)] \rangle$  має місце формула Фурутцу-Новікова [5]

$$\langle z(t) R[z(t)] \rangle = \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta R[z]}{\delta z(\tau)} \right\rangle. \quad (5)$$

Тут  $K(t)$  – кореляційна функція процесу  $z(t)$ ,  $\left\langle \frac{\delta R[z]}{\delta z(\tau)} \right\rangle$  – середнє варіаційної похідної від функціонала  $R[z]$  по  $z$  в точці  $\tau$ .

Для середнього  $\langle z(t) \bar{\zeta}(t) \rangle$  формула (5) запишеться у вигляді

$$\langle z(t) \bar{\zeta}(t) \rangle = \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 2m. \quad (6)$$

З урахуванням (6) система (4) перепишеться наступним чином:

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \rangle = A \langle \bar{\zeta}(t) \rangle + B \int_0^t d\tau K(t-\tau) \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \quad \langle \bar{\zeta}(0) \rangle = \bar{\zeta}_0. \quad (7)$$

За допомогою розщеплення функціоналів  $\langle z(t) \zeta[z(\tau)] \rangle$  ( $k=1, 2, \dots, 2m$ ) зроблено перехід від незамкненої системи диференціальних рівнянь (4) відносно вектор-функцій  $\langle \bar{\zeta} \rangle$  та  $\langle z \bar{\zeta} \rangle$  до незамкненої системи інтегрально-диференціальних рівнянь відносно вектор-функцій  $\langle \bar{\zeta} \rangle$  та  $\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle$ . Для вектор-функцій  $\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle$  записуємо нову систему інтегрально-диференціальних рівнянь. Варіюючи (3) по  $z(\tau)$  ( $\tau < t$ ), маємо систему

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} = A \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} + z(t) B \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)}, \quad (8)$$

з початковими умовами  $\frac{\delta \bar{\zeta}(\tau)}{\delta z(\tau)} = B \bar{\zeta}(\tau), \quad \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} = 0$ .

Після усереднення (8) отримуємо систему інтегрально-диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = A \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle + B \langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle. \quad (9)$$

з початковими умовами

$$\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(\tau)}{\delta z(\tau)} \rangle = B \langle \bar{\zeta}(\tau) \rangle, \quad \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = 0 \quad (t < \tau). \quad (10)$$

Система рівнянь (7), (9) та (10) незамкнена відносно змінних  $\langle \bar{\zeta}(t) \rangle = (\langle \zeta_1(t) \rangle, \langle \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$  та

$\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \left( \langle \frac{\delta \zeta_1(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \langle \frac{\delta \zeta_2(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \dots, \langle \frac{\delta \zeta_{2m}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle \right)^T$ . Вона містить нові невідомі

функції

$$\langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \left( \langle z(t) \frac{\delta \zeta_1(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \langle z(t) \frac{\delta \zeta_2(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \dots, \langle z(t) \frac{\delta \zeta_{2m}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle \right)^T.$$

Знову застосовуємо формулу Фурутцу-Новікова

$$\langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \int_0^t d\tau_1 K(t - \tau_1) \langle \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 2m, \quad (11)$$

де  $\langle \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle$  – друга варіаційна похідна функціонала  $\bar{\zeta}[z(\tau)]$  по  $z(\tau)$  в момент часу  $(\tau < t)$   $(\tau_1 < t)$ .

Аналогічно отримаємо рівняння

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = A \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle + B \int_0^t d\tau_1 K(t - \tau_1) \langle z(t) \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle. \quad (12)$$

Якщо продовжити цей процес, то можна отримати нескінченну послідовність рівнянь відносно моментних функцій другого порядку. В силу (3) для матриці  $(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))$  запишемо матричне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt} (\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t)) = (A + z(t)B) (\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t)) + (\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t)) (A^T + z(t)B^T) \quad (13)$$

з початковими умовами  $(\bar{\zeta}(0) \bar{\zeta}^T(0)) = (\bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}_0^T)$ .

При усередненні за ансамблем реалізацій системи (13) рівняння набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle &= A \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + B \langle z(t) \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + \\ &+ \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle A^T + \langle z(t) \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle B^T \end{aligned} \quad (14)$$

з початковими умовами  $\langle \bar{\zeta}(0) \bar{\zeta}^T(0) \rangle = (\bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}_0^T)$ . Система незамкнена

відносно змінних  $\langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle = (\langle \zeta_1(t) \zeta_1^T(t) \rangle, \langle \zeta_2(t) \zeta_2^T(t) \rangle, \dots, \langle \zeta_{2m}(t) \zeta_{2m}^T(t) \rangle)^T$ ,

бо містить нові функції

$\langle z(t) \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle = (\langle z(t) \zeta_1(t) \zeta_1^T(t) \rangle, \langle z(t) \zeta_2(t) \zeta_2^T(t) \rangle, \dots, \langle z(t) \zeta_{2m}(t) \zeta_{2m}^T(t) \rangle)^T$ .

Застосуємо підхід розщеплення добутку двох функціоналів за формулою Фурутцу-Новікова

$$\langle z(t) \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle = \int_0^t d\tau K(t - \tau) \langle \frac{\delta (\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle \quad (k = 1, 2, \dots, 2m). \quad (15)$$

Система (14) запишеться у вигляді

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle = A \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle A^T + \\ + B \int_0^t d\tau K(t-\tau) \langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle + \int_0^t d\tau K(t-\tau) \langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle B^T. \quad (16)$$

Для вектор-функції  $\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))$  отримаємо нову систему інтегрально-диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} = A \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} + z(t) B \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} + \\ + \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} A^T + z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} B^T. \quad (17)$$

При усередненні за ансамблем реалізацій системи (17) рівняння набувають вигляду

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle = A \langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle + B \langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle + \\ + \langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle A^T + \langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle B^T \quad (18)$$

з початковими умовами

$$\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle = B \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle B^T, \\ \langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle = 0, \quad t < \tau. \quad (19)$$

Знову застосуємо формулу Фурутцу-Новікова

$$\langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle = \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle, \quad (20)$$

де  $\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle$  – друга варіаційна похідна функціонала.

В результаті наведеного вище підходу система (3) набуває вигляду зв'язаної нескінченної послідовності рівнянь для моментних функцій другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\delta(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle = A \left\langle \frac{\delta(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + B \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \left\langle \frac{\delta^2(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle + \\ + \left\langle \frac{\delta(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle A^T + \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \left\langle \frac{\delta^2(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle B^T \end{aligned} \quad (21)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta^2(\zeta(\tau_1)\zeta^T(\tau_1))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle = B \left\langle \frac{\delta(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + \left\langle \frac{\delta(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle B^T \\ \left\langle \frac{\delta^2(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle = 0, \quad t < \tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Питання про стохастичну стійкість системи (3) зводиться до дослідження стійкості тривіальних розв'язків інтегрально-диференціальних рівнянь (21). Для подальших досліджень необхідно виконати редукцію нескінченної системи до скінченної. Для цього випадковий процес приймаємо дельта-корельованим процесом з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha\tau} \left( \cos \theta_\alpha \tau + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \tau \right), \quad (23)$$

та скінченим часом кореляції

$$\tau_0 = \frac{1}{\sigma_0^2} \int K(\tau) d\tau = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2}, \quad (24)$$

де  $\sigma_0^2$  – дисперсія впливу;  $\alpha$  – параметр кореляції,  $\theta_\alpha$  – частота прихованої періодичності.

Матричне диференціальне рівняння для моментів другого порядку (21) стає замкненим, а інші рівняння нескінченної системи виявляються зайвими. Отримана система рівнянь (22) представляє собою рівняння першого марковського наближення для других моментів

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle = (A + DB^2) \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle (A + DB^2)^T + \\ + 2\sqrt{DB} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle B^T, \end{aligned} \quad (25)$$

з початковими умовами  $\langle \bar{\zeta}(0) \bar{\zeta}^T(0) \rangle = (\bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}_0^T)$ .

Для побудови редукованої моделі стохастичних параметричних коливань пологої оболонки застосуємо викладений вище підхід та чисельну методику [7], що дозволяє отримати редуковані матриці жорсткості та геометричної жорсткості системи (2). Розглянемо пологу квадратну оболонку зі сторонами  $a = b = 0,480$  м, товщиною 0,004 м. Головні кривизни серединної поверхні оболонки вздовж утворюючих осей  $Ox$  і  $Oy$  приймаємо сталими  $k_x = k_y = \text{const}$  (модель 1) і змінними (модель 2). Максимальний підйом в середині оболонки для двох моделей складає  $f \leq \frac{1}{5}a = 0,096$  м, для моделі 2 підйом в середині кромки оболонки дорівнює 0,066 м. Матеріал – дюралюміній з наступними механічними характеристиками:  $E = 7,2 \times 10^7$  кПа;  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 0,3$ .

Застосуємо програмний комплекс NASTRAN [9] для побудови скінченноелементних моделей оболонки. Поверхню моделюємо у вигляді сукупності трикутних плоских скінченних елементів з шістьма ступенями свободи у вузлах (рис. 1).

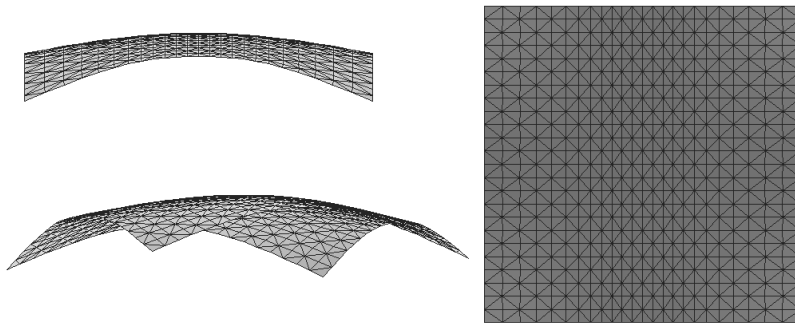


Рис. 1. Скінченноелементна модель пологої оболонки (модель 2)

Зі сторони опуклості оболонки прикладаємо випадкове поверхнєве навантаження  $z(t)$  і обмежуємо згинальні і мембранні переміщення вузлів усіх чотирьох сторін оболонки.

За базисні вектори в системі (2) приймаємо вектори форм власних коливань оболонки  $U = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m)$ , де  $m$  – кількість утриманих форм,

які нормовані по матриці мас. Редуковані матриці мас  $M^*$ , демпфірування  $C^*$  і жорсткості  $K^*$  мають вигляд

$$\begin{aligned} M^* &= U^T M U = E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1), \\ C^* &= U^T C U = \text{diag}(2\varepsilon_1\omega_1, 2\varepsilon_2\omega_2, \dots, 2\varepsilon_m\omega_m), \\ K^* &= U^T K U = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_m^2), \end{aligned} \quad (26)$$

де  $\omega_i$  – частоти власних коливань,  $\varepsilon_i$  – коефіцієнт конструкційного демпфірування оболонки.

Форми і частоти гармонічних коливань оболонки визначаємо при розв'язанні задачі на власні коливання за допомогою методу Ланцоша

$$(K - \omega_i^2 M) \bar{\phi}_i = 0. \quad (27)$$

На рис. 2 представлені п'ять форм власних коливань оболонки зі сталою (модель 1) та змінною кривизною (модель 2). У таблиці 1 наведені їх значення.

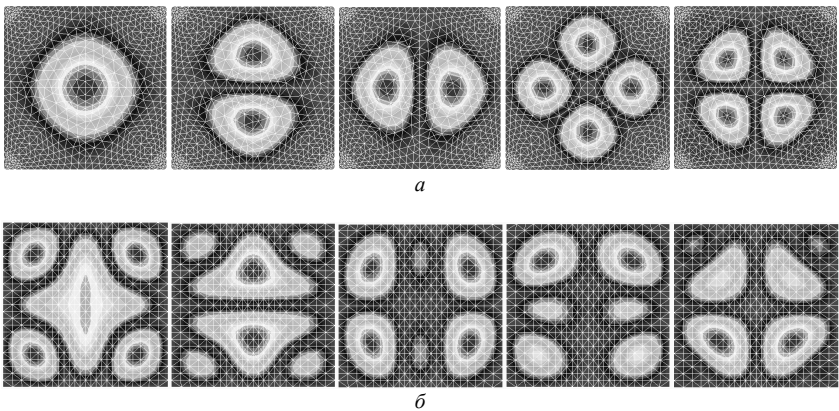


Рис. 2. Форми власних коливань пологої оболонки: а) модель 1; б) модель 2

Таблиця 1

| Модель | Частоти власних коливань $V_i$ , Гц |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------|-------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|        | 1                                   | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| 1      | 198                                 | 396  | 397  | 622  | 701  | 738  | 945  | 945  | 1082 | 1083 |
| 2      | 982                                 | 1016 | 1070 | 1071 | 1072 | 1082 | 1165 | 1194 | 1285 | 1337 |

Квадрати частот власних коливань оболонки  $\omega_i^2 = (2\pi\nu_i)^2$  при умові нормування форм власних коливань по матриці мас є членами редукованої матриці жорсткості  $K^* = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_5^2)$ :

– модель 1

$$K^* = \begin{vmatrix} 1551782 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6201128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6214818 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15264842 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19402363 \end{vmatrix} \quad (28)$$

– модель 2

$$K^* = \begin{vmatrix} 38054389 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40778786 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45221482 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45365681 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45383289 \end{vmatrix}$$

Редуковану матрицю жорсткості для двох моделей (28) можна отримати за методикою [7]. Надамо початкове переміщення вузлам оболонки у вигляді форм її власних коливань  $U$  і розв'яжемо обернену задачу статки. Отримаємо реакцію оболонки  $KU$  на початкове переміщення, яку помножимо зліва на транспоновану матрицю форм власних коливань  $U^T$ . Тоді редукована матриця жорсткості набуває вигляду  $K^* = U^T KU$ :

– модель 1

$$K^* = \begin{vmatrix} 1551782 & 0.087 & 0.057 & -3.376 & -3.376 \\ 0.218 & 6201128 & 6201128 & -2.211 & -2.211 \\ -1.852 & -4.104 & -4.104 & -5.203 & -5.203 \\ 0.982 & 5.827 & 5.827 & 15264840 & 15264848 \\ 0.059 & -2.844 & -2.844 & -3.172 & -3.172 \end{vmatrix}$$

– модель 2

$$K^* = \begin{vmatrix} 38054386 & -51503 & 36389 & 36389 & 36389 \\ -35712 & 40777847 & -4292 & -4292 & -4292 \\ 43975 & 7845 & 45221513 & 45221513 & 45221513 \\ 21599 & -24714 & -5199 & -5199 & -5199 \\ 14410 & -2224 & 24214 & 24214 & 24214 \end{vmatrix} \quad (29)$$

Отримані результати свідчать про те, що для моделі 1 реакція оболонки однакова на другу і третю, а також на четверту і п'яту форми коливань, для моделі 2 – на третю, четверту та п'яту форми коливань. Видно, що значення членів матриць (28) та (29) збігаються або мають значення, які відрізняються не більше ніж на 3%.

Редуковану матрицю геометричної жорсткості визначаємо згідно розробленої авторами методики [7], яка дозволяє врахувати суттєву нелінійність задачі. За допомогою послідовного розв'язання прямої задачі статички при дії на оболонку сталої складової поверхневого тиску та оберненої нелінійної задачі статички з урахуванням початкового переміщення вузлів оболонки у вигляді форм власних коливань отримаємо суму редукованих матриць жорсткості та нелінійної матриці жорсткості:

– модель 1

$$K^* + K_G^* = \begin{vmatrix} 1662509 & -958 & -958 & -291 & -291 \\ 295484 & 7608054 & 7608054 & -536435 & -536435 \\ -204524 & 1027 & 1027 & 517887 & 517887 \\ -124629 & -2616 & -2616 & 18203218 & 18203218 \\ -50131 & -2720 & -2720 & -23779 & -23779 \end{vmatrix} \quad (30)$$

– модель 2

$$K^* + K_G^* = \begin{vmatrix} 42066174 & -5482 & 273 & 273 & 273 \\ -2179713 & 42710629 & 347347 & 347347 & 347347 \\ 4972109 & 272511 & 46916974 & 46916974 & 46916974 \\ 4911961 & 144446 & -1872505 & -1872505 & -1872505 \\ 1598274 & -220292 & 1923605 & 1923605 & 1923605 \end{vmatrix}$$

Тоді геометрична матриця жорсткості має вигляд:

– модель 1

$$K_G^* = \begin{vmatrix} -110727 & 958 & 958 & 288 & 288 \\ -295484 & -1406926 & -1406926 & 536437 & 536437 \\ 204522 & -1031 & -1031 & -517892 & -517892 \\ 124630 & 2622 & 2622 & -2938378 & -2938370 \\ 50131 & 2717 & 2717 & 23776 & 23776 \end{vmatrix} \quad (31)$$

– модель 2

$$K_G^* = \begin{vmatrix} -4011788 & -46021 & 36116 & 36116 & 36116 \\ 2144001 & -1932782 & -351639 & -351639 & -351639 \\ -4928134 & -264666 & -1695461 & -1695461 & -1695461 \\ -4933560 & -169160 & 1867306 & 1867306 & 1867306 \\ -1583864 & 218068 & -1899391 & -1899391 & -1899391 \end{vmatrix}$$

Враховуючи співпадиння реакцій оболонки на початкові переміщення в матрицях  $K_G^*$ , перепишемо їх у вигляді:

– модель 1

$$K_G^* = \begin{vmatrix} -110727 & 958 & 288 \\ -295484 & -1406926 & 536437 \\ 204522 & -1031 & -517892 \end{vmatrix} \quad (32)$$

– модель 2

$$K_G^* = \begin{vmatrix} -4011788 & -46021 & 36116 \\ 2144001 & -1932782 & -351639 \\ -4928134 & -264666 & -1695461 \end{vmatrix}$$

Якщо члени редукованої матриці геометричної жорсткості  $k_{gii}^*$ , які розташовані на головній діагоналі, мають значення значно більші за інші члени відповідного ряду, при побудові редукованої моделі стохастичних параметричних коливань оболонки (2) вплив інших базисних форм можна не враховувати. Тобто її можна прийняти у вигляді системи, що розпадається на окремі рівняння типу Матьє–Хілла [1]:

$$\ddot{y}_i(t) + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 [1 + a_i z(t)] y_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (33)$$

де  $a_i = a_{ik}$  при  $k = i$  – коефіцієнти, які характеризують вплив сталої складової стохастичного параметричного навантаження на жорсткісні характеристики оболонки і визначаються як результат ділення елементів редукованих матриць геометричної жорсткості  $k_{gii}^*$  на відповідні квадрати власних частот коливань  $\omega_i^2$ .

Якщо коефіцієнти  $k_{gii}$  не є максимальними і мають значення одного порядку з іншими коефіцієнтами матриці геометричної жорсткості, то система (2) не розпадається і має вигляд системи зв'язаних рівнянь

$$\ddot{y}_i(t) + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) + z(t) \sum_{k=1}^m a_{ik} y_k(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (34)$$

Визначимо коефіцієнти  $a_{ik}$  і запишемо їх у таблицю 2.

Для моделі 1 коефіцієнти  $a_{ii}$  мають значення значно більші за інші коефіцієнти відповідного ряду. Тому для оболонки зі сталою кривизною редуковану модель стохастичних параметричних коливань можна прийняти у вигляді системи (33), яку згідно наведеного вище підходу можна представити у вигляді рівнянь першого марковського наближення для других моментів у фазових змінних  $\zeta_1(t) = y_1(t)$ ,  $\zeta_2(t) = \dot{y}_1(t)$ :

Таблиця 2

| Модель | Коефіцієнт $a_{ik}$ |        |        |
|--------|---------------------|--------|--------|
| 1      | -0,071              | 0,001  | 0      |
|        | -0,048              | -0,227 | 0,087  |
|        | 0,003               | 0      | -0,192 |
| 2      | -0,105              | -0,001 | 0,001  |
|        | 0,053               | -0,047 | -0,009 |
|        | -0,109              | -0,006 | -0,037 |

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle \zeta_1^2(t) \rangle &= 2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\
\frac{d}{dt} \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle &= \langle \zeta_2^2(t) \rangle - \omega_i^2 \langle \zeta_1^2(t) \rangle - 2\varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\
\frac{d}{dt} \langle \zeta_2^2(t) \rangle &= -4\varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_2^2(t) \rangle - 2\omega_i^2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle + a_i^2 \omega_i^4 \sigma_0^2 \tau_0 \langle \zeta_2^2(t) \rangle,
\end{aligned} \quad (35)$$

з початковими умовами  $\zeta_1(t) = y(t)$ ,  $\zeta_2(t) = \dot{y}(t)$ ,  $\zeta_1(0) = y_0$ ,  $\zeta_2(0) = \dot{y}_0$ . У цій системі  $\tau_0$  є скінченним часом кореляції, який визначається за формулою (24),  $\sigma_0^2$  – дисперсія стохастичного впливу.

Для оболонки зі змінною кривизною (модель 2) значення коефіцієнта  $a_{ii}$  є максимальним лише при  $i=1$ . При  $i=2$  та  $i=3$  бачимо значний вплив першої базисної форми на інші форми. В даному випадку можна зробити висновок про те, що для пологої оболонки зі змінною кривизною система (2) не розпадається і має вигляд системи зв'язаних рівнянь (34).

Відомо, якщо форми коливань співпадають з формами втрати стійкості, редукована модель параметричних коливань представляє систему незв'язаних рівнянь (33), якщо форми не співпадають – систему зв'язаних рівнянь (34).

Розв'яжемо задачу стійкості за формулою:

$$(K^* + \lambda_i K_G^*) \tilde{\Psi}_i = 0. \quad (36)$$

де  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  – матриця критичних значень статичної складової навантаження;  $\Psi = (\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2, \dots, \tilde{\Psi}_m)$  – матриця форм втрати стійкості (рис. 3).

В таблиці 3 наведені критичні значення сталої складової поверхневого тиску для двох моделей оболонки, що отримані за допомогою програмного комплексу NASTRAN.

Таблиця 3

| Модель | Критичні значення сталої складової поверхневого тиску $\lambda$ , кПа |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------|-----------------------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|        | 1                                                                     | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| 1      | 155                                                                   | 274  | 276  | 429  | 457  | 518  | 637  | 638  | 748  | 754  |
| 2      | 1530                                                                  | 1576 | 1586 | 1590 | 1681 | 1708 | 1750 | 1812 | 2081 | 2178 |

На рис. 3 представлені п'ять форм втрати стійкості оболонки.

Порівнюючи рисунки 2 і 3 можна пересвідчитись, що форми власних коливань та форми втрати стійкості у випадку сталої кривизни оболонки (модель 1) співпадають, для оболонки зі змінною кривизною (модель 2) –

не співпадають. Це підтверджує той висновок, що для пологої оболонки зі сталою кривизною редукована модель стохастичних параметричних коливань може бути представлена у вигляді рівнянь типу Мат'є–Хілла (33), для пологої оболонки зі змінною кривизною – у вигляді системи (34).

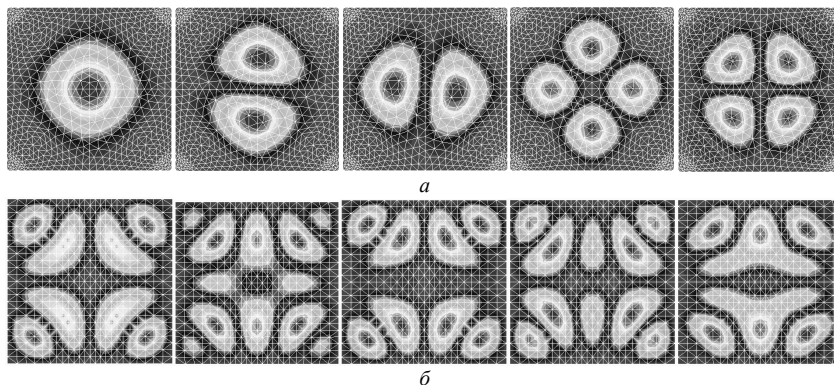


Рис. 3. Форми втрати стійкості пологої оболонки: а) модель 1; б) модель 2

**Висновок:** розроблений чисельний підхід дозволяє будувати редуковані моделі стохастичних параметричних коливань пологих оболонок з різними кривизнами їх серединних поверхонь з урахуванням усіх складових параметричних навантажень і суттєвої нелінійності задачі; отримати за рахунок розщеплення кореляції зовнішніх впливів на пружну систему з відповідними динамічними станами систему лінійних автономних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. - 600 с.
2. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М., Наука, 1979. - 335 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1982. - 432 с.
4. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения в случайно однородных средах М., Наука, 1980. - 336 с.
5. Баженов В.А., Бусетта М., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В. Динамічна стійкість пружних систем при стохастичному параметричному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2000. – Вип.67. – С.51 – 59.
6. Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Отрашевська В.В. Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2003. – Вип.72. – С.51 – 59.

7. Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г. Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: К.: КНУБА, 2005. – Вип.77. – С.65 – 77.
8. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. Х.: Изд-во «Основа» при Харьк. Ун-те, 1991. – 272 с.
9. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

*Стаття надійшла до редакції 24.06.2011 р.*

*Дехтярюк Е.С., Лукьянченко О.А., Костина Е.В.*

### **ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РЕДУЦИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК**

Разработан численный подход к построению редуцированных моделей стохастических параметрических колебаний пологих оболочек с применением методов конечных элементов, обобщенных координат и асимптотического метода, основанного на разложении статистических характеристик решений динамической задачи по малому параметру. Задача устойчивости формулируется как задача устойчивости относительно моментных функций. За счет расщепления корреляции внешних воздействий на упругую систему с соответствующими динамическими состояниями получена система линейных автономных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

*Dehtyaryuk E.S., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V.*

### **NUMERICAL CONSTRUCTION OF REDUCED MODELS OF STOCHASTIC PARAMETRIC VIBRATIONS OF SHALLOW SHELLS**

A numerical approach to the construction of reduced models of stochastic parametric oscillations of shallow shells is developed using finite element method, method of generalized coordinates and the asymptotic method based on the decomposition of the statistical characteristics of the dynamic problem solution by a small parameter. The stability problem is formulated as a problem of stability in reference to momentum functions. A system of linear autonomous differential equations with constant coefficients is obtained due to the splitting of the correlation of external influences on the elastic system with the corresponding dynamic states.