УДК 519.711

*Ю.В. Човнюк, канд. техн. наук, доцент КНУБА,*
*Б.В. Корнійчук, асистент КНУБА*

# ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИМИ РУХАМИ УДАРНО-ВІБРАЦІЙНОГО МАЙДАНЧИКА З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ: МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Як правило, якість роботи вібраційно-ударних систем (ВУС) характеризується низкою вимог, що пред'являються до руху певних їх (ВУС) точок.

У [1, 2] пераховані основні обмеження, які слід приймати до уваги при конструюванні керованих ВУС.

У системах із декількома степенями рухливості закон руху всіх елементів повинен визначатися рухом виконуючого елементу. При проектуванні оптимальних ВУС намагаються максимізувати переміщення чи прискорення деяких характерних точок об'єкту; структура ВУС при цьому може бути задана тільки експериментальними характеристиками (зокрема, динамічними піддатливостями на певних частотах) [3].

Таким чином, якість керованої ВУС характеризується рухом деяких точок, число яких, зазвичай, менше числа степенів свободи системи. З іншої сторони, основні труднощі, які виникають при проведенні обчислень, а також при розв'язуванні задач оптимального керування коливаннями ВУС пов'язані з високим порядком рівнянь руху керованих ВУС. За традиційної постановки задач керування періодичними режимами руху динаміка ВУС описується диференціальними рівняннями, а умови періодичності розглядаються як додаткові співвідношення, що зв'язують значення узагальнених координат, швидкостей та фаз коливань на початку та в кінці періоду. Необхідною умовою оптимальності залишається принцип максимуму, сформульований безпосередньо для періодичних задач [4]. Зрозуміло, що така постановка нічим не відрізняється від традиційної задачі мінімізації функціонала і вимагає розв'язку системи рівнянь принципу максимуму, у якому крайові умови мають вид умов періодичності. При цьому в задачі керування ВУС з $n$ степенями свободи необхідно розв'язувати системи $4n$ рівнянь принципу максимуму незалежно від того, які узагальнені координати входять у функціонал й у обмеження задачі.

Разом із тим можливий інший спосіб опису періодичних рухів ВУС, який не пов'язаний з традиційним записом диференціальних рівнянь руху, що дозволяє відділити рівняння руху за одними чи декількома узагальненими координатами. Якщо система включає лінійну частину (як правило, у ВУС з електромагнітним приводом ця умова завжди виконується), то рух системи можна описувати інтегральними рівняннями періодичного руху [5, 6], ядра яких визначаються лінійною частиною системи (ВУС). Цей метод особливо ефективний у задачах оптимального керування, якщо обмеження та функціонал задачі залежить від траєкторії точки чи виконуючого ланцюга ВУС. При цьому часто вдається виділити одне інтегральне рівняння періодичного руху за координатою, яке найбільш цікаве, незалежно від числа степенів вільності ВУС, й звести задачу оптимального керування до мінімізації функціонала з обмеженнями у вигляді інтегральних рівнянь.

Метою даної роботи є виконання методу інтегральних рівнянь для розв'язку задач оптимального керування періодичними рухами тримасових ВУС з електромагнітним приводом.

1. Лінійні ВУС з електромагнітним приводом, основні поняття та визначення.

1.1. Загальні поняття та визначення.

При вивченні ВУС складної структури (а вона є саме такою при наявності електромагнітного приводу) зручно користуватися мовою теорії автоматичного керування. Відмова від традиційного ВУС як розділу теорії диференціальних рівнянь дозволяє глибше зрозуміти основні властивості механічних керованих систем (у т.ч. ВУС), що описуються диференціальними рівняннями. Крім того, використання передавальних функцій робить обчислення більш компактними, а результати такими, що легше піддаються фізичній інтерпретації. Послідовний вклад теорії механічних коливань у термінах передавальних функціях даний у монографії [2]; низка наступних робіт із динаміки машин та енергії активних віброзахисних систем [1, 7-9] підтвердив ефективність такого трактування.

Зрозуміло, що всяка лінійна система (ВУС) – це ідеалізація реального об'єкта дослідження. Завдяки широкій сфері застосувань цей тип систем вивчений досить детально. Основні властивості лінійних неперервних систем зводяться до наступного [10].

Динаміку ВУС (лінійної) описує рівняння:

$$\begin{cases} L(p,t)\cdot y = M(p,t)\cdot u, \\ L(p,t) = a_n(t)\cdot p^n + \ldots + a_0(t), \\ L(p,t) = b_m(t)\cdot p^m + \ldots + b_0(t), \end{cases} \tag{1}$$

де $p = \dfrac{d}{dt}$ - оператор диференціювання.

У загальному випадку $y$ і $u$ - векторні величини, а коефіцієнти $a_j$, $b_j$ - матриці відповідного порядку.

Розглянемо детально окремий випадок: ВУС одновимірна, тобто $y$ й $u$ - скаляри, а $n > m$. Тоді редакцію ВУС можна записати у вигляді суми редакцій за нульового входу $y_0(t)$ й нульового початкового стану $y_*(t)$: $y(t) = y_0(t) + y_*(t)$. Тут $y_0(t)$ - розв'язок одізорідного рівняння: $L(p,t)\cdot y = 0$ з фіксованим вектором початкових умов $s(t_0) = \{y(t_0),\ldots y^{(n-1)}(t_0)\}$; функцію $y_0(t)$ можна подати у вигляді: $y_0(t) = \sum_{j=1}^{n} h_j(t,t_0)\cdot y^{(j-1)}(t_0) = (H(t,t_0), s(t_0))$, де $\{H(t,t_0) = h_1((t,t_0,\ldots,h_n(t,t_0)))\}$ - вектор базових функцій. Функції $h_j(t,t_0)$ утворюють лінійно незалежну систему розв'язків однорідного рівняння

$$L(p,t)\cdot h_j = 0 \tag{2}$$

з початковими умовами при $t = t_0$: $\dfrac{d^i h_j}{dt^i} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,n-1; \quad i \neq j-1; \quad \dfrac{d^{j-1}h_j}{dt^{j-1}} = 1$.

Функція $h_n(t)$, яка задовольняє початковим умовам при $t = t_0$

$$\frac{d^i h_j}{dt^i} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,n-2; \quad i \neq j-1; \quad \frac{d^{n-1}h_n}{dt^{n-1}} = 1, \tag{3}$$

зазвичай має назву функції Коші ВУС; саме функція Коші ВУС інтерпретується як реакція цієї системи: $L(p,t)\cdot h_{\text{n}} = u$ на імпульсний вплив $u = \delta(t - t_{0+})$ за нульових початкових умов. (Тут $\delta(t)$ - функція Дірака [11-13]).

Розв'язок рівняння (1) за нульових початкових умов записується у вигляді:

$$y_*(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,s)\cdot u(s)ds. \tag{4}$$

Ядро $h(t,s)$ зазвичай називають імпульсною перехідною функцією замкненої ВУС, і воно може бути визначене як реакція ВУС (1) на імпульсний вплив виду $u=\delta(t-t_{0+})$. Якщо $M(p,t)=1$, то $h(t,s)=h_{\text{n}}(t,s)$.

Якщо коефіцієнти рівняння (1) не залежать від *t*, то базові функції $h_j(t,t_0)$ та імпульсна перехідна функція ВУС $h(t,t_0)$ залежить лише від різниці аргументів: $h_j(t,t_0)=h_j(t-t_0)$, $j=1,...,n$, $h(t,t_0)=h(t-t_0)$, а розв'язок системи (1) можна записати у вигляді: $y(t)=\sum\limits_{j-1}^{n}h_j(t-t_0)\cdot y^{(j-1)}(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}h(t-s)\cdot u(s)ds$.

1.2. Передавальна функція лінійної ВУС. Стійкі та фізично реалізовані ВУС.

У практичних застосуваннях дуже важливим є поняття фізичної реалізованості ВУС. ВУС називатимемо фізично реалізованою, якщо її реакція (4) у момент *t* залежить тільки від поточного (при $s=t$) та перехідній (при $s<t$) значень входу й не залежить від його майбутніх значень ($s>t$). Для стаціонарної ВУС це означає, що вона фізично реалізована тоді, і тільки тоді, коли імпульсна перехідна функція $h(t)$ перетворюється у нуль при $t<0$: $h(t=0)$; умова фізичної реалізованості нестаціонарної ВУС зводиться до вимоги $h(t,s)=0$ при $s>t$.

Нехай $h(t)$ - імпульсна перехідна функція стаціонарної фізично реалізованої ВУС. Тоді передавальною функцією називається перетворення Лапласа

$$H(p)=\int\limits_{0}^{\infty}h(t)\cdot e^{-pt}dt, \tag{5}$$

або, що те ж саме, $H(p)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t-s)\cdot e^{-p(t-s)}ds$, причому, для фізично реалізованої системи (ВУС) $h(t-s)=0$ за $t<s$.

У загальному випадку нестаціонарної ВУС з імпульсною перехідною функцією $h(t,s)$ передавальна функція залежить від часу

$$H(p,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t,s)\cdot e^{-p(t-s)}ds, \tag{6}$$

причому, для фізично реалізованої ВУС $h(t,s)=0$ при $t<s$.

Для системи

$$L(p)\cdot y=M(p)\cdot u \tag{7}$$

передавальна функція ВУС має вид

$$H(p)=\frac{M(p)}{L(p)}, \tag{8}$$

а імпульсна реакція може бути знайдена як перетворення (обернене) Лапласу (5) для даної ВУС.

Рівняння (7) можна символічно записати за допомогою передавальної функції

$$y=H(p)\cdot u, \tag{9}$$

а саму ВУС схематично представимо у вигляді, який подано на рис.1.


Рис.1.

Рівняння (2) описує реакцію ВУС за нульового стану. Для стаціонарної ВУС ця реакція виражається формулою згортки

$$y_*(t)=\int_0^t h(t-s)\cdot u(s)ds\,. \tag{10}$$

Передавальна функція зв'язує перетворення Лапласа входу та виходу

$$Y_*(p)=H(p)\cdot U(p), \tag{11}$$

де $Y_*(p)$ й $U(p)$ - перетворення Лапласа функцій $y_*(t)$ і $u(t)$.

Розподілення полюсів передавальної функції дозволяє розмірковувати про стійкість ВУС.

Основні визначення щодо стійкості ВУС зводяться до наступного.

Система, що описується рівнянням

$$L(p,t)y_0=0\,, \tag{12}$$

зветься стійкою, якщо вектор станів $s(t)=\{y_0(t),...,y_0^{n-1}(t)\}$ обмежений при будь-якому початковому стані $s(t_0)$. Якщо при цьому: $\lim_{t\to\infty} s(t)=0$, то система (ВУС) асимптотично стійка. Якщо лінійна ВУС асимптотично стійка, то всі рішення повної системи $L(p,t)y=M(p,t)u$ будуть обмеженими, якщо обмежений вплив $f=M\cdot u$.

Для асимптотичної стійкої системи (7) необхідно й достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння $L(p)=0$ лежали у лівій напівплощині. Різні критерії асимптотичної стійкості наведені у літературі з автоматичного регулювання.

### 1.3. Усталені та періодичні розв'язки лінійної системи

Введемо поняття усталеного стану ВУС та усталеної реакції лінійної ВУС [10].

Усталеним станом ВУС (за нульового входу) називатимемо граничний при $t\to\infty$ стан $\gamma$, до якого прямує ВУС за нульового входу і котрий не залежить від початкового стану $s(t)$. Для ВУС, яка досліджується, граничний стан:

$$\gamma=\lim_{t\to\infty} s(t),\quad s(t)=\{y_0(t),...,y_0^{n-1}(t)\}, \tag{13}$$

де $y_0(t)$ - розв'язок однорідного рівняння

$$L(p,t)\cdot y=0 \tag{14}$$

за початкового стану $s(t)$. Очевидно, що у асимптотично стійких ВУС існує єдиний усталений стан $\gamma=0$; якщо система нестійка чи стійка несимптотично, тоді не можна визначити границю, що не залежить від початкових умов.

Усталена реакція ВУС визначається наступним чином [10]. Вважають, що початковий стан $s(t_0)$ співпадає з усталеним станом $\gamma$, а початковий момент $t\to-\infty$. Визначити таким чином реакцію ВУС на вхід, значить, встановити усталену реакцію. Фізично це означає, що всі перехідні процеси, які почались при $t_0=-\infty$, затухають, і рух системи стає усталеним.

Очевидно, що для лінійної ВУС поняття усталеної реакції має зміст тільки у тому випадку, якщо система асимптотично стійка і $\gamma=0$, маємо усталену реакцію

$$\bar{y}(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t,s)u(s)ds\,. \tag{14}$$

Якщо ВУС стаціонарна, $h(t,s)=h(t-s)$, то її реакцію можна перетворити до наступного виду:

$$\bar{y}(t)=\int_0^{\infty} h(s)\cdot u(t-s)ds\,. \tag{15}$$

Передавальну функцію асимптотично стійкої ВУС можна визначити через усталену реакцію системи на вплив $e^{pt}$. Дійсно, поклавши у (6) $u(t)=e^{pt}$, отримаємо:

$$\overline{y}(t)=e^{pt}\cdot\int_0^\infty h(s)\cdot e^{-ps}ds=e^{pt}\cdot H(p). \tag{16}$$

Звідси, зокрема, випливає, що усталена реакція стійкої системи (ВУС) на вплив $e^{i\omega t}$:

$$\overline{y}(t)=e^{i\omega t}\cdot H(i\omega) \tag{17}$$

також буде періодичною функцією періоду $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Комплексна функція $H(i\omega)$ називається частотною характеристикою ВУС.

Якщо у стаціонарної ВУС не існує асимптотичної стійкості, результат (10) усе ж зберігає зміст, а саме: якщо $u(t)=e^{i\omega t}$ і $L(i\omega)\neq 0$, то існує періодичний розв'язок системи (4): $y_T(t)=e^{i\omega t}\cdot H(i\omega)$. У цьому легко впевнитись, підставивши $u(t)=e^{i\omega t}$ та $y_T(t)=e^{i\omega t}\cdot H(i\omega)e^{i\omega t}$ у рівняння (4). Періодичний розв'язок не слід вважати особливим випадком: це окремий розв'язок неоднорідного рівняння (т.з. частинний розв'язок), що задовольняє початковим умовам $y^{(j-1)}(0)=(i\omega)^{j-1}\cdot H(i\omega),\quad j=1,...,n$.

Якщо вплив представляє собою суму гармонік $u(t)=\sum_{k-1}^{N}u_k\cdot H\cdot e^{i\omega_k\cdot t}$ та $L(i\omega_k)\neq 0$, то існує полігармонічний розв'язок

$$u(t)=\sum_{k-1}^{N}u_k\cdot H(i\omega_k)\cdot e^{i\omega_k\cdot t}, \tag{18}$$

у якому присутні ті ж гармоніки. Цей вираз теж можна розглядати як частинний розв'язок неоднорідного рівняння за певних початкових умов. У асимптотично стійкій ВУС усталений розв'язок співпадає з приведеним полігармонічним.

### 1.4. Динамічні характеристики механічної системи (ВУС).

У механічних системах (ВУС, зокрема) поняттю входу, виходу, передавальної функції можна надати певного фізичного змісту. Розглянемо довільну механічну систему (рис.2), до якої прикладені сили $F_k(t)$; проекції цих сил на вісі координат утворюють $3k$ - вимірний вектор $F(t)$. Позначимо через $\xi_1(t,...,\xi_s(t))$ переміщення точок системи, що викликані прикладеними впливами.

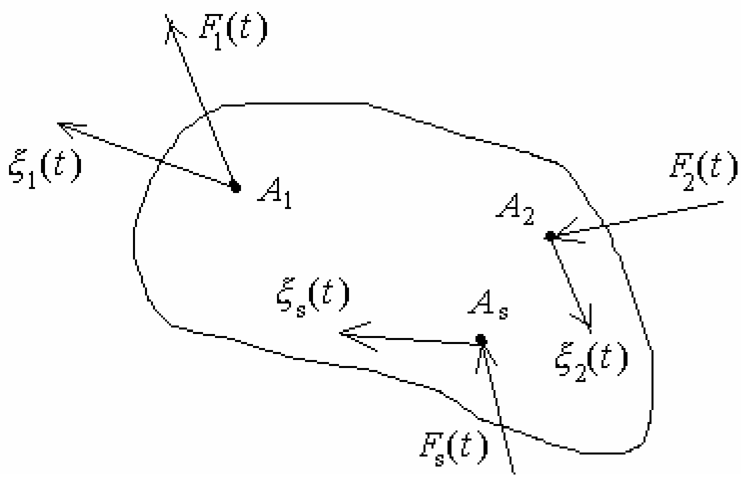


Рис.2.

Число незалежних координат $\xi_i(t)$, які визначають положення ВУС у просторі, назвемо числом степенів вільності, а вектор $\xi(t)$ - станом системи (самої ВУС).

Якщо відомий початковий стан ВУС $\xi(t_0)$ і рівняння, що зв'язують прикладені сили та переміщення, то завжди можна визначити стан об'єкта у момент $t$.

Для запису рівняння необхідно вибрати динамічну модель ВУС (тобто проставити об'єкти у вигляді сукупності інерційних, пружних, демпферних елементів) та знайти структуру виконавчих органів, що здійснюють керування. Таке розбиття ВУС на елементи можна провести далеко не завжди, і, крім того, вибір моделі повинен залежати від впливу: чим ширше спектр впливу й чим більш високі частоти він включає, тим більше число степенів свободи повинна мати модель системи. Більш того, далеко не завжди нас цікавлять переміщення вздовж усіх степенів свободи: як правило, поведінка системи оцінюється за рахунок руху деяких точок. Для того, щоб скласти опис, слід ввести поняття операторів динамічної жорсткості та динамічної піддатливості [2], що зв'язують сили та переміщення різних точок системи.

Припустимо, що ми маємо скласти лінійні рівняння руху системи, виражаючи тим самим залежність стану системи $\xi=\{\xi_1,...,\xi_n\}$ від прикладених сил $F=\{F_1,...,F_m\}$, й перетворити ці рівняння до виду:

$$\xi=L(p)\cdot F,\quad \xi_j=\sum_{k=1}^{m} l_{jk}(p)\cdot F_k,\quad j=(1,...,n). \tag{19}$$

Оператор $L(p)$ представляє собою матричну передавальну функцію системи; $l_{jk}(p)$ - елементи матриці $L(p)$.

Нехай всі сили, крім однієї, $F_r(p)$, дорівнюють нулю. Тоді зв'язок між силою, прикладеною у точці *A*, й переміщенням точки $A_j$

$$\xi_j=l_{jr}(p)\cdot F_r \tag{20}$$

виражається через оператор $l_{jr}(p)$. Оператор $l_{jr}(p)$ називають оператором динамічної піддатливості, а обернений оператор

$$d_{jr}(p)=l_{jr}^{-1}(p) \tag{21}$$

оператором динамічної жорсткості системи [2].

Якщо $p=i\omega$, то частотні характеристики $d_{jr}(i\omega)$, $l_{jr}(i\omega)$ називають динамічними жорсткостями та динамічними піддатливостями на даній частоті. Ці характеристики можна отримувати для ВУС експериментально.

Нехай сила $F(t)$ прикладена у деякій точці *A* і $v(t)$ - проекція переміщення цієї точки на напрямок сили. Характеристики $d_A(i\omega)$, $l_A(i\omega)$, що зв'язують силу $F$ та переміщення $v$, називають динамічною піддатливостю у точці *A* [2].

Аналіз перехідних процесів у ВУС зводиться до розв'язку рівнянь (20) з урахуванням початкових умов, і ця задача, по суті, еквівалентна розв'язку повної системи рівнянь стану. Разом із тим, якщо сила $F_r(t)$ змінюється за гармонічним законом, $F_r(t)=F_{or}\cdot\cos\omega t$, то для усталеної реакцій ВУС, завдяки наявності (18), отримаємо:

$$\xi_j(t)=\xi_{oj}\cdot\cos(\omega t+\varphi_j), \tag{22}$$

де $\xi_{oj}=\left|l_{jr}(i\omega)\right|\cdot F_{or}$, $\varphi_j=\arg\{l_{jr}(i\omega)\}$.

Розглянемо загальні властивості динамічних характеристик ВУС. У загальному випадку для стаціонарної лінійної механічної системи (ВУС) рівняння руху приймають вид:

$$D(p)\cdot x=F(t). \tag{23}$$

Тут $D(p)$ - матриця динамічних жорсткостей ВУС з елементами:

$$d_{rq} = M_{rq} \cdot p^2 + n_{rq} \cdot p + c_{rq}; \tag{24}$$

$M_{rq}, n_{rq}, c_{rq}, (r, q = 1,...,n)$ - коефіцієнти додатніх визначених квадратичних форм:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sum_{r,q=1}^{n} M_{rq} \cdot \dot{x}_r \cdot \dot{x}_q, \quad B = \frac{1}{2} \cdot \sum_{r,q=1}^{n} n_{rq} \cdot \dot{x}_r \cdot \dot{x}_q, \quad П = \frac{1}{2} \cdot \sum_{r,q=1}^{n} c_{rq} \cdot \dot{x}_r \cdot \dot{x}_q, \tag{25}$$

що характеризують відповідно кінетичну енергію, дисипативну функцію і потенціальну енергію системи [14]. Якщо дисипація в системі мала, то всі елементи $n_{rq}$ - малі величини.

Координату $x_k$ можна виразити через відповідні компоненти матриці динамічних піддатливостей:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} l_{kj}(p) \cdot F_j. \tag{26}$$

При цьому:

$$l_{kj}(p) = R_{kj}(p) \cdot \Delta^{-1}(p), \tag{27}$$

де $R_{kj}(p)$ - алгебраїчне доповнення елементу $d_{kj}(p)$ матриці динамічних піддатливостей $D(p)$, $\Delta(p) = \det D(p)$. Вирази $\Delta(p)$ і $R_{kj}(p)$ представляють собою поліноми від $p$ степені $2n$ і не вище $2n$-2 відповідно.

Перепишемо рівняння (23) у головних координатах. Матимемо [14]:

$$\ddot{z}_r + \sum_{q=1}^{n} b_{rq} \cdot \dot{z}_q + \Omega_r^2 \cdot z_r = u_r(t), \tag{28}$$

де $z_r = \sum_{q=1}^{n} A_{rq} \cdot x_q$, $u_r = \sum_{q=1}^{n} A_{rq} F_q(t)$. Тут $\Omega_r$ - власні частоти консервативної системи (ВУС), $A_{rq}$ - коефіцієнти $r$-ої форми коливань, величини $b_{rq}$ малі. Характеристичне рівняння ВУС приймає вид:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} (p^2 + b_{11} \cdot p + \Omega_1^2) & b_{12} \cdot p... & b_{1n} \cdot p \\ b_{21} \cdot p & (p^2 + b_{22} \cdot p + \Omega_2^2)... & b_{2n} \cdot p \\ b_{n1} \cdot p & b_{n2} \cdot p... & (p^2 + b_{nn} \cdot p + \Omega_n^2) \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

Розраховуючи визначник та нехтуючи добутками малих коефіцієнтів, отримаємо вираз для коренів характеристичного рівняння:

$$p_j = -r_j \pm i \cdot \Omega_j, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \frac{b_{jj}}{2} > 0. \tag{30}$$

Якщо до ВУС прикладена гармонічна сила $F_j = F_o \cdot \cos(\omega t)$ і $F_k(t) \equiv 0$ при $k \neq j$, то з (26) випливає:

$$\begin{cases} x_k(t) = |l_{kj}(i\omega)| \cdot F_o \cdot \cos(\omega t + \varphi_k). \\ \varphi_k(t) = \arg\{l_{kj}(i\omega)\} = arctg\left[\dfrac{\operatorname{Im}\{l_{kj}(i\omega)\}}{R_e\{l_{kj}(i\omega)\}}\right]. \end{cases} \tag{31}$$

Легко побачити, що $\Omega_j$ - резонансні частоти ВУС: при $\omega = \Omega_j$ у знаменнику (27), (31) з'явиться малий множник $2r_j \cdot i \cdot \Omega_j$, а це означає, що модуль динамічної піддатливості стає великим і амплітуда коливань (31) різко зростає.

*Висновки*

Отримані основні співвідношення та оператори динамічних піддатливостей та жорсткостей ВУС.

Використання знайдених динамічних піддатливостей системи дозволяє знаходити закони руху ВУС у головних координатах.

Застосування знайдених залежностей у дослідженнях ВУС, їх динаміки, реакції на гармонічний вплив та ін. дає змогу суттєво покращити існуючі інженерні методики розрахунку подібних систем та їх точність.

*Література*

1. *Вейц В.Л., Коловский М.З., Кочура А.Е.* Динамика управляемых агрегатов. – М.: Наука, 1984. – 352с.
2. *Коловский М.З.* Автоматическое управление вибрационными системами. – М.: Наука, 1976. – 320с.
3. *Ковалева А.С.* Управление колебаниями и виброударными системами. – М.: Наука, 1990. – 256с.
4. *Gilbert E.G.* Optimal periodic control: a general theory of necessary conditions // SIAM J/ control and optimization. – 1977. – V.15. - №5. – p.717 – 746.
5. *Розенвассер Е.Н.* Колебания нелинейных систем. – М.: Наука, 1969. – 576с.
6. *Розенвассер Е.Н.* Периодические нестационарные системы управления. – М.: Наука, 1973. – 512с.
7. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем. – М.: Наука, 1978. – 352с.
8. *Трацкий В.А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. – Л.: Машиностроение, 1976. – 248с.
9. *Фролов К.В., Фурман Ф.А.* Прикладная теория виброзащитных систем. – М.: Машиностроение, 1980. – 279с.
10. *Заде Л., Дезоер И.* Теория линейных систем. – М.: Наука, 1970. – 703с.
11. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1958. – 470с.
12. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 518с.
13. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 412с.
14. *Гентмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 269с.