УДК 539.3:537

Ю.В. Човнюк, канд. техн. наук, Вища школа економіки та ділової адміністрації “АЖІО–Коледж” (м. Київ)

ИНФОРМАЦИОННЫЙ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ (ФУРЬЕ) АНАЛИЗЫ УДАРНО-ВИБРАЦИОННО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ПОЛЕЙ, ТЕХНОЛОГИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ, ДИАГНОСТИКЕ СОСТОЯНИЯ, АВТОМАТИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЯ СОВРЕМЕННЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ ЧЕЛОВЕКО-МАШИННЫХ (ЭРГАТИЧЕСКИХ) СИСТЕМ. ЧАСТЬ II.

2. Спектральное разложение импульсных полей.

Периодическое вибрационно-волновое поле является некоторым идеализированным пределом, который в действительности никогда не достигается хотя бы потому, что любое поле ограничено в пространстве и во времени. Можно ли представить такое поле как суперпозицию монохроматических волн? Для изучения этого вопроса применим следующий, довольно общий прием. Представим себе, что поле периодически повторяется через некоторый период T, достаточно большой, чтобы можно было пренебречь перекрытием "хвостов" поля. Тогда можно произвести фурье-разложение, а затем, положив $T \to \infty$, вернуться к исходной задаче об импульсном поле. При $T \to \infty$ получаем

$$A(t) = \sum_n \frac{A_n}{\sqrt{T}} e^{-in\omega_0 t} \to \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{A_n}{\sqrt{T}} e^{-in\omega_0 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega;$$
$$\omega_0 = 2\pi/T; n = \omega/\omega_0; dn = d\omega/\omega_0; A(\omega) = A_n \cdot \sqrt{\frac{T}{2\pi}}. \quad (1)$$

Хотя введение дифференциала d_n не вполне корректно, т.к. n - целое, но это удобно в такого рода предельных переходах. Таким образом, мы получили для импульсного поля фурье-разложение, но не в виде суммы, а виде интеграла. В этом случае говорят о непрерывном спектре поля, т.е. частота гармоник ω пробегает теперь непрерывный ряд значений.

Спектр $A(\omega)$ вычисляется с помощью предельного перехода

$$A(\omega) = \sqrt{T/2\pi} \cdot A_n\big|_{T\to\infty} = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A(t) e^{in\omega_0 t}}{\sqrt{T}} dt\big|_{T\to\infty} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

Калибровка спектра $A(\omega)$ (множитель $1/\sqrt{2\pi}$) выбрана таким образом, чтобы подчеркнуть симметрию соотношений (1), (2). Такая калибровка не является общепринятой. Говорят о фурье-преобразовании, причем спектр $A(\omega)$ называется фурье-образом функции $A(t)$, и, наоборот, $A(t)$ является фурье-образом $A(\omega)$. Отметим еще, что амплитуда постоянной составляющей $(\omega = 0)$ с точностью до множителя совпадает с интегралом от поля $A(t)$ (2).

Рассмотрим ряд важных с практической точки зрения примеров спектрального разложения импульсных ударно-вибрационно-волновых полей.

Пример 1. Найти спектр одиночного прямоугольного импульса поля, длительностью τ, амплитудой E_a.

Из формулы (2) имеем

$$E(\omega)=\frac{E_a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{i\omega t}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot E_a\cdot\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega}. \qquad (3)$$

Амплитудный спектр: $|E(\omega)|=\sqrt{2}\cdot E_a\cdot \left|\sin\omega\tau/2\right| \Big/ \omega\sqrt{\pi}$. Найдем теперь спектр импульсного поля частоты ω_0, существующего конечное время τ: $E(t)=E_a(t)\cdot e^{-i\omega_0 t}$, где $E_a(t)=E_a$ при $-\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2}$ и $E_a(t)=0$ в остальное время. Иначе говоря, $E_a(t)$ только что рассмотренный прямоугольный импульс. Подставляя вместо $E_a(t)$ его фурье-разложение, мы видим, что спектр поля $E(t)$ просто сдвинут относительно спектра $E_a(t)$ на ω_0: $E(\omega)=E_a(\omega-\omega_0)$.

Пусть теперь мы сместили поле во времени на интервал $t_1 : E_1(t)=E(t-t_1)$. Тогда в его фурье-разложении появится дополнительный множитель $e^{i\omega t_1} : E_1(\omega)=E(\omega)e^{i\omega t_1}$. Иными словами, фаза фурье-гармоники сместится на величину ωt_1.

Пример 2. Найти спектр затухающих колебаний. Пусть колебания, "включенные" в момент $t=0$, затухают по экспоненциальному закону $A(t)=A_0 e^{-i\omega_0 t-\left(t/\tau\right)}; t>0$. С помощью (2) получаем

$$\begin{cases} A(\omega)==\dfrac{A_0\big/\sqrt{2\pi}}{\frac{1}{\tau}-i(\omega-\omega_0)}; |A(\omega)|=\dfrac{A_0}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{\tau}{\sqrt{1+(\omega-\omega_0)^2\tau^2}}; \\ |\varphi(\omega)|=Arctg(\omega-\omega_0)\tau, i=\sqrt{-1}. \end{cases} \qquad (4)$$

При $\tau\to\infty$ имеем незатухающие колебания, "включенные" в момент $t=0$. При $\omega\neq\omega_0$ их спектр найдем из (4), положив $\frac{1}{\tau}=0$:

$$A(\omega)=\frac{iA_0}{\sqrt{2\pi}\cdot(\omega-\omega_0)}, \omega\neq\omega_0. \qquad (5)$$

Чтобы найти поведение спектра при $\omega\to\omega_0$, произведем предельный переход $\tau\to\infty$

$$A(\omega)=\frac{A_0}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\tau+i\tau^2(\omega-\omega_0)}{1+\tau^2(\omega-\omega_0)^2}. \qquad (6)$$

Можно показать, что первое слагаемое $\tau\big/\left(1+\tau^2\Omega^2\right)\to\pi\delta(\Omega)$ при $\tau\to\infty(\Omega=\omega-\omega_0)$, где δ - дельта-функция П.Дирака. Действительно

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau d\Omega}{1+\tau^2\Omega^2}=Arctg(\tau\Omega)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\pi, \text{ откуда}$$

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{1+\tau^2\Omega^2}=\delta(\Omega). \qquad (7)$$

Второе слагаемое в (6) при $\tau\to\infty$ дает (5). В результате получаем спектр незатухающих колебаний в виде

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}A_0\delta(\omega-\omega_0)+\frac{iA_0}{\sqrt{2\pi}(\omega-\omega_0)}. \qquad (8)$$

Второе слагаемое в этом выражении возникает вследствие включения колебаний в момент $t=0$. Если рассмотреть нарастающие колебания, которые включаются при $t=0: A_1(t)=A_0\cdot e^{-i\omega_0 t+\left(t/\tau\right)}, t>0$, то их спектр будет отличаться от (4) знаком при i, т.е. $A_1(\omega)=A^*(\omega)$. То же относиться и к предельному спектру (8). Если теперь сложить оба колебания, то в пределе $\tau\to\infty$ получается монохроматическое колебание с $A_\sum = A+A_1\to A_0 e^{-i\omega_0 t}$, спектр которых есть $\delta-$функция:

$$A_\sum(\omega)=\sqrt{2\pi}\cdot A_0\cdot\delta(\omega-\omega_0). \qquad (9)$$

При $\omega_0=0$ получим из (8) спектр "ступеньки", т.е. постоянного поля, включенного в момент $t=0$, а из (9) - спектр статического поля.

Пример 3. Проанализировать спектр поля в виде группы из N одинаковых прямоугольных импульсов длительностью τ, отстоящих друг от друга на расстоянии T.

Спектр одиночного импульса дается выражением (3) с фазовым множителем $e^{in\omega T}$, где $n-$номер импульса. Спектр сигнала равен сумме спектров импульсов, так что получается спектр (3) умноженный на сумму

$$S(\omega)=\sum_{n=0}^{N}e^{in\omega T}=\frac{1-e^{iN\omega T}}{1-e^{i\omega T}}. \qquad (10)$$

Амплитудный спектр в этом случае

$$|E(\omega)|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}E_0\cdot\left|\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}\right|\cdot\left|\frac{\sin\frac{N\omega T}{2}}{\sin{\omega T/2}}\right|. \qquad (11)$$

Спектр (11) характеризуется тремя параметрами. Полная ширина спектра $\Delta\omega\sim\pi/\tau$ определяется одиночным импульсом. Положение линий определяется периодичностью импульсов T или нулями знаменателя (11) $\omega_m={2\pi m}/{T}$, при этом $S_m=N$. Наконец, ширина линий зависит от полной длины сигнала $\delta\omega\sim\pi/NT$. В частности, при $N\to\infty$ получается дискретный спектр.

Анализ соотношений, полученных в примере 3, позволяет сделать ряд важных выводов, полезных в практике использования подобных сигналов для ударно-вибрационно-волновых технологий, диагностики состояния, автоматизации управления и проектирования, моделирования и инженерных расчетов современных строительных машин, а именно:

1) в зависимости от характеристик осциллятора, с которым взаимодействует такое поле, его сложный спектр "воспринимается" совершенно по-разному. Очень "плохой" осциллятор (моделирующий обрабатываемую среду) с временем затухания $\tau_{\text{Ќє}}<<T$ реагирует на отдельный импульс, и для него этот спектр- непрерывный с шириной $\Delta\omega\sim\pi/\tau$. Осциллятор получше $\left(T<<\tau_{\text{Ќє}}<<NT\right)$ регистрирует дискретный спектр, "не замечая" конечной ширины линий. Наконец, высокодобротный осциллятор $\left(\tau_{\text{Ќє}}>>NT\right)$ регистрирует полную структуру спектра $|E(\omega)|$ (11);

2) в общем случае спектр характеризуется несколькими масштабами $\Delta\omega$, отражающими через соотношение неопределенности Гейзенберга сложную структуру поля (разные Δt). Это соотношение имеет следующий вид

$$\Delta\omega\cdot\Delta t\sim\pi;\Delta k\cdot\Delta x\ \sim\pi, \qquad (12)$$

где $\Delta\omega-$ ширина спектра (частотная); $\Delta t-$ длительность поля; $\Delta k-$ спектральная ширина поля в области волновых чисел; $\Delta x-$ характерный размер (неоднородности) поля. В частности, дискретный спектр можно характеризовать некоторой полной шириной, которая $\sim \pi / \tau$.

3. Информационный анализ ударно-вибрационно-волновых полей в режиме реальной эксплуатации строительных машин.

В соответствии с формулой Шеннона количество (ΔI) информации (в битах), которую содержит любой сигнал в полосе частот $\Delta\omega$ и в единичном интервале времени,

$$\frac{\Delta I}{\Delta t \cdot \Delta\omega} = \frac{1}{2\pi}\log_2\left(1 + \frac{P_c}{P_щ}\right), \tag{13}$$

где $P_c, P_щ -$ мощности сигнала и шума, соответственно. Поскольку этот закон основан только на соотношении неопределенности и общем понятии о количестве информации, он переносится на плотность информации на единицу длины "изображения" сигнала (Δx) в интервале Δk_x

$$\frac{\Delta I}{\Delta x \cdot \Delta k_x} = \frac{1}{2\pi}\log_2\left(1 + \frac{P_c}{P_щ}\right). \tag{14}$$

Полученная формула легко обобщается на двумерный случай

$$\frac{\Delta I}{\Delta S \cdot \Delta k_x \cdot \Delta k_y} = \frac{1}{(2\pi)^2}\log_2\left(1 + \frac{P_c}{P_щ}\right). \tag{15}$$

где $\Delta S -$ площадь "изображения" сигнала. В трехмерном случае (наиболее общем)

$$\frac{\Delta I}{\Delta V \cdot \Delta k_x \cdot \Delta k_y \cdot \Delta k_x} = \frac{1}{(2\pi)^3}\log_2\left(1 + \frac{P_c}{P_щ}\right). \tag{16}$$

где $\Delta V -$ объем "изображения" сигнала.

Учитывая (12) можно показать, что минимальная величина информации, которую содержит любой сигнал, оценивается в:

$$\Delta I = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P_c}{P_щ}\right). \tag{17}$$

При $P_c = P_щ : (\Delta I)_{\min} = \frac{1}{2}$. Тогда (17) соотношение можно нормировать на $(\Delta I)_{\min}$ следующим образом: $\Delta I / (\Delta I)_{\min} = \log_2\left(1 + \frac{P_c}{P_щ}\right)$. (18)

Из последнего соотношения следует, что для повышения соотношения $\Delta I / (\Delta I)_{\min}$, т.е. увеличения информативности сигнала следует "позаботиться" о росте отношения $P_c / P_щ$. Для этого существует два пути: 1) повышать мощность полезного сигнала P_c; 2) понижать мощность шумов $P_щ$, которые всегда присутствуют и сопровождают любые технологические процессы (как, впрочем, и процессы управления машиной).

В таблице 1 представлены количественные соотношения между $\Delta I / (\Delta I)_{\min}$ и $P_c / P_щ$.

Таблица 1.

$\Delta I / (\Delta I)_{\min}$	$P_c / P_щ$
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255
9	511
10	1023

Таким образом, чтобы на порядок повысить информативность сигнала, задействованного в определенной технологии (процессе управления (эргатической) системой), следует на три порядка $\left(\sim 10^3\right)$ "поднять" соотношение $P_c / P_щ$. Это может быть слишком высокой "ценой" (в энерго-мощностных оценках) за полученный информационный "комфорт" (содержательность, информативность) используемых сигналов (в т.ч. в управлении).

В заключении следует отметить, что развитие и дальнейшее совершенствование перспективных строительных технологий, моделирования процессов, происходящих в современных строительных человеко-машинных (эргатических) системах, диагностики их состояния, автоматизации управления и проектирования должны идти по пути, сочетающем энерго-мощностные и информационные критерии (оценки) рассматриваемых явлений и механизмов взаимодействия (рабочих органов машин с обрабатываемыми средами).

Литература

1. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. - М.: Физматгиз, 1960. -400с.
2. Гусев Б.В., Деминов А.Д., Крюков Б.И., Литвин Л.М., Логвиненко Е.А. Ударно-вибрационная технология уплотнения бетонных смесей. - М.: Стройиздат, 1982.-152с.
3. Баладинский В.Л. Динамическое разрушение грунтов. - К.: Изд-во ГУ, 1971. - 226с.
4. Чубук Ю.Ф., Назаренко И.И., Гарнец В.Н. Вибрационные машины для уплотнения бетонных смесей. - К.: Вища школа, 1985. - 168с.