МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Н. І. ПОЛТОРАЧЕНКО, С. А. ТЕРЕНЧУК, Ю. Н. УБАЙДУЛЛАЄВ

ПРАКТИКУМ
ІЗ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

*Рекомендовано вченою радою Київського
національного університету будівництва і архітектури
як навчальний посібник для студентів спеціальності*
151 «*Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології*»

Київ 2023

УДК 519.6
П49

Рецензенти: *Є. В. Бородавка*, д-р техн. наук, доцент, професор Київського національного університету будівництва і архітектури;
О. Ю. Пермяков, д-р техн. наук, професор, професор Інституту інформаційно-комунікаційних технологій та кібероборони;
С. М. Яремченко, д-р фіз.-мат. наук, провідний науковий співробітник відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України

Затверджено на засіданні вченої ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 7 від 14 квітня 2023 року.

Полтораченко Н. І.
П49 Практикум із чисельних методів : навч. посіб. / Н. І. Полтораченко, С. А. Теренчук, Ю. Н. Убайдуллаєв. − Київ: КНУБА, 2023. − 160 с.

ISBN 978-966-627-251-8

Викладено основні відомості з чисельних методів відповідно до програми другого курсу. Наведено багато прикладів розв’язку задач з урахуванням збільшення кількості годин для самостійної роботи. Наприкінці кожного розділу запропоновані запитання для самоконтролю та задачі для самостійного розв’язування.

Призначено для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології».

УДК 519.6

© Н. І. Полтораченко, С. А. Теренчук,
Ю. Н. Убайдуллаєв, 2023
ISBN 978-966-627-251-8
© КНУБА, 2023

Зміст

Вступ

Метою викладання дисципліни «Чисельні методи» є набуття знань з основ вказаного курсу, розвиток у студентів логічного й алгоритмічного мислення, формування в майбутніх фахівців як теоретичних засад, так і навичок застосування основних методів в інженерній практиці, під час розв’язування технічних задач.

Чисельні методи – дисципліна, яка спирається на апарат лінійної алгебри, математичного аналізу та широко використовується в питаннях системного аналізу, автоматизації технологічних процесів, збору й обробки інформації тощо.

Чисельні методи можуть використовуватися як для побудови математичних моделей інженерних задач, так і безпосередньо для розв’язування цих задач.

Після вивчення цього курсу студент має вміти:

- застосовувати чисельні методи до розв’язування інженерних і практичних задач;
- оцінювати похибки обчислень;
- вибирати чисельний метод розв’язку задачі відповідно до її особливостей;
- виконувати алгоритмізацію чисельного методу.

Студент має знати:

- основи теорії похибок;
- чисельні методи інтерполяції та апроксимації;
- чисельні методи розв’язування систем лінійних рівнянь;
- чисельні методи диференціювання й інтегрування;
- чисельні методи розв’язування нелінійних рівнянь з однією змінною;
- чисельні методи розв’язування систем нелінійних рівнянь;
- чисельні методи розв’язування звичайних диференціальних рівнянь;
- чисельні методи розв’язування диференціальних рівнянь із частинними похідними;
- принципи побудови й обмеження щодо застосування чисельних методів;
- способи контролю обчислень і оцінки похибки методів.

1. ПРЕДМЕТ І ЗАВДАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ. ТЕОРІЯ ПОХИБОК

Предмет і завдання обчислювальної математики

Віками зусилля вчених насамперед були спрямовані на створення строгої логічної бази щодо напрацьованих методів розв'язування задач із різних галузей математики, розширення сфер знань, до яких можливе застосування цих методів. Набагато менша увага приділялася методам доведення математичних досліджень до чисельного результату. Але з розвитком науки і техніки все більше з'являється задач, щодо яких неможливо отримати точний результат або його вигляд не може бути застосованим на практиці. Як приклади можна навести задачі розв'язку систем алгебраїчних рівнянь із десятками або сотнями невідомих алгебраїчних рівнянь вищих порядків, трансцендентних рівнянь, диференціальних рівнянь або їх систем, які не інтегруються в елементарних функціях тощо.

Наведені проблеми на тлі бурхливого розвитку обчислювальної техніки спонукали до утворення напрямку математики, який мав би розробити методи доведення до чисельного результату основних задач математичного аналізу, алгебри, геометрії. Так з'явилася обчислювальна математика.

Обчислювальна математика має справу з різними задачами, але більшість з них може буде записана у вигляді $y = f(x)$, де $x \in X, y \in Y$, а $f(x)$ – деяка задана функція. Якщо така задача не може бути розв'язана методами класичної математики або вони є громіздкими, то в рамках обчислювальної математики застосовується ідея заміни просторів X та $Y,$ а також функції $f(x)$ на інші простори X^* та Y^*, а також на функцію $f(x)^*$ відповідно, які є більш зручними для обчислювальних процедур.

Основними методами математики є:

– графічні;
– аналітичні;
– чисельні.

Із застосуванням графічних методів розв'язок задачі знаходиться візуально. Їх перевагою є наочність, а недоліками – велика трудомісткість, низька точність (залежить від точності побудови графіків), неуніверсальність (графіки можна побудувати тільки для невеликої розмірності тощо).

Аналітичні методи подають розв'язок задачі у вигляді формул. Їх перевагами є запис результату в загальному вигляді, висока точність і малий об'єм комп'ютерної пам'яті для зберігання розв'язку. Основний недолік – неуніверсальність, оскільки лише невелика частина математичних задач може бути розв'язана аналітично.

Чисельні методи дають змогу звести розв'язування задачі до виконання скінченної кількості арифметичних і логічних дій із числами. За цих обставин за розв'язок слугує набір чисел, які надалі можуть бути інтерпретовані різними способами (наприклад, подані у вигляді таблиць, графіків, анімації тощо). Перевагою чисельних методів є універсальність, бо теоретично вони можуть бути застосовані до розв'язання будь-яких задач, добре пристосовані для реалізації на комп'ютері. Недоліком вважається велика трудомісткість у разі розрахунків уручну, що зазвичай не є проблемою, оскільки вони призначені для використання на комп'ютері.

Чисельні методи поділяються на *прямі* й *ітераційні*.

Прямі методи дають змогу за скінченну кількість кроків отримати результат після виконання останнього кроку.

В ітераційних методах неодноразово виконується послідовність ітерацій до отримання наближеного розв'язку з наперед заданою точністю.

Ітерація – це повторення сукупності операцій або процедур для покращення наявного (поточного) наближеного розв'язку задачі.

Нехай x^* – точний розв'язок задачі, тоді ітераційний метод будує так звану ітераційну послідовність $\{x^{(k)}\}$ $(k = 0,1,2,3\ldots)$ наближень розв'язку, водночас $x^{(k)}$ повинно наближатися до x^* зі збільшенням значення k.

Узагальнений алгоритм ітераційного методу має такий вигляд:

– задається початкове наближення розв'язку $x^{(0)}$ на основі апріорних знань про задачу;

– на k-й ітерації $(k = 0,1,2,3\ldots)$ методу обчислюється наступне наближення $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, де Φ і є сукупністю операцій або процедур для покращення наближеного розв'язку задачі на базі конкретного чисельного методу;

– перевіряється критерій зупину, тобто чи є отримане наближення $x^{(k+1)}$ достатньо близьким до розв’язку x^*. Якщо цього немає, то відбувається перехід до наступної ітерації, тобто до пункту 2. Якщо отримане наближення $x^{(k+1)}$ є достатньо близьким до розв’язку x^*, то робота алгоритму зупиняється, а результат останньої ітерації містить розв’язок задачі.

Чисельний метод є таким, що *збігається*, якщо наближення розв’язку $x^{(k)}$ прямує до x^* зі збільшенням значення k. Збіжність є основною характеристикою методу, тому в разі введення нового чисельного методу центральним моментом є теоретичне доведення його збіжності.

Розрізняють:

– лінійну збіжність (якщо існують такі числа $q \in (0; 1)$ і $k_0 > 0$, для яких виконується умова
$$\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\| \le q\left\|x^{(k)} - x^*\right\|, k > k_0,),$$
– надлінійну збіжність (якщо існує послідовність чисел $q_k \in (0; 1)$ для всіх k (k = 0,1,2,3…) така, що
$$\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\| \le q_k\left\|x^{(k)} - x^*\right\|, q_k \to 0, k \to \infty),$$
– квадратичну збіжність (якщо існують такі $C > 0$ та $k_0 > 0$, для яких виконується умова
$$\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\| \le C\|x^{(k)} - x^*\|^2, k > k_0,).$$

Норма $\left\|x^{(k)} - x^*\right\|$ означає відстань між $x^{(k)}$ та x^*.

Теорія похибок

Основними джерелами виникнення похибок результатів розрахунків є:

– наближеність початкових даних (початкові дані часто отримують унаслідок проведення експериментів, кожен з яких може дати результат з обмеженою точністю; ірраціональні коефіцієнти потребують обмеження розрядів);

– похибка чисельних методів (оскільки в основу обчислювальної математики покладено ідею заміни функцій і просторів для змінних, розв’язок отриманої задачі відрізнятиметься від точного розв’язку початкової задачі; точний результат може бути отриманий тільки за виконання нескінченної кількості ітерацій);

– похибка обчислень, комп'ютерна похибка (обчислення, як ручні, так і на ЕОМ, виконують із певною кількістю значущих цифр. Похибки округлення можуть по-різному впливати на кінцевий результат; обчислювальний алгоритм треба будувати так, щоб похибка округлень була значно меншою від усіх інших похибок).

Наближеним числом a називається число, яке відрізняється від точного числа A і заміщує його в розрахунках.

Різниця точного й наближеного чисел $A - a$ називається похибкою наближеного числа a. Така різниця може мати різний знак, тому прийнято говорити про її модуль.

Абсолютною похибкою називається величина

$$\Delta a = | A - a | \text{ або } A = a \pm \Delta a.$$

Гранична абсолютна похибка – це оцінка різниці точного й наближеного чисел

$$| A - a | \leq \overline{\Delta a} \text{ або } a - \overline{\Delta a} \leq A \leq a + \overline{\Delta a}.$$

Відносна похибка наближеного числа визначається як відношення абсолютної похибки до абсолютного значення наближеної величини:

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

Гранична відносна похибка $\overline{\delta_a}$ є оцінкою відносної похибки $\delta_a \leq \overline{\delta_a}$.

Заради зручності замість термінів «гранична абсолютна похибка» і «гранична відносна похибка» застосовують терміни «абсолютна похибка» і «відносна похибка».

Абсолютну похибку можна виразити через відносну $\Delta a = |a| \cdot \delta_a$.

Приклад. $a = 3{,}719 \pm 0{,}0023$. Обчислити відносну похибку.

Розв'язок. Запис означає, що точне значення числа лежить у межах $3{,}7167 \leq a \leq 3{,}7213$. Тоді

$$\delta_a = \left|\frac{0.0023}{3{,}719}\right| = 0{,}0006.$$

Часто відносну похибку виражають у відсотках:

$$\delta_a = 0{,}0006 \cdot 100\ \% = 0{,}06\ \%.$$

Приклад. Довжина аркуша паперу А4 дорівнює (29,7 ± 0,1) см. А відстань між містом А і містом В дорівнює (650 ± 1) км. Абсолютна похибка в першому випадку не перевищує 1 мм, а в другому – 1 км. Порівняти точність цих вимірювань.

Розв'язок. Для аркуша паперу відносна похибка у відсотковому співвідношенні становить

$$0{,}1/29{,}7 \cdot 100\ \% = 0{,}33\ \%$$

Для відстані між містами відносна похибка становить

$$1/650 \cdot 100\ \% = 0{,}15\ \%$$

Отже, відстань між містами виміряно точніше за довжину аркуша паперу.

Вірні знаки числа

Будь-яке натуральне число *n* у десятковій системі числення можна подати у вигляді

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0,$$

де числа a_0, a_1,…, a_{k-1} можуть набувати значення 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а число a_k – значення 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Позиційний запис цього числа має вигляд $n = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$.

Приклад. 314=3$\cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$.

Значущими цифрами наближеного числа називаються всі цифри у його десятковому записі, починаючи з першої ненульової.

Приклад. 3256,27 – 6 значущих цифр, 0,00000407 – 3 значущі цифри.

Нуль має різне значення залежно від місця його розташування. Перші нулі в десяткових дробах не є значущими цифрами, у середині числа нуль завжди є значущою цифрою, а в кінці числа може мати різні значення.

Приклад. 1) 1 кг = 1000 г. Це точне значення, тому всі цифри є значущими. 2) За даними «Вікіпедії», населення Києва у 1771 році становило 17 000 осіб. У цьому випадку нулі стоять замість невідомих цифр, тому число має тільки дві значущі цифри і його краще записувати як 17$\cdot 10^3$ або 1,7$\cdot 10^4$, щоб уникнути непорозумінь.

Якщо абсолютна похибка наближеного числа не перевищує ω одиниць розряду, що виражений *n*-ю значущою цифрою, то *n* перших значущих цифр вважаються *вірними у сенсі* ω.

Якщо абсолютна похибка наближеного числа не перевищує половини одиниці розряду, що виражений *n*-ю значущою цифрою, то *n* перших значущих цифр вважаються *вірними у вузькому розумінні* (ω = 0,5).

Якщо абсолютна похибка наближеного числа не перевищує одиниці розряду, що виражений n-ю значущою цифрою, то n перших значущих цифр вважаються *вірними в широкому розумінні* ($\omega = 1$).

Приклад. Округлити число $a = 21{,}328 \pm 0{,}043$ до вірних цифр у вузькому та широкому розумінні.

Розв'язок. 1) Дано: $a = 21{,}328 \pm 0{,}043$. Оскільки $0{,}043 < 0{,}05$, вірними у вузькому розумінні є цифри 2, 1, 3. Результат округлення до вірних цифр у вузькому розумінні матиме вигляд $a = 21{,}3$. Оцінимо абсолютну похибку нового наближення $\Delta a = 0{,}043 + 0{,}028 = 0{,}071 > 0{,}05$ $(0{,}028 = 21{,}328 - 21{,}3)$. Умова вірних цифр у вузькому розумінні порушена. Отже, $a = 21$, тоді $\Delta a = 0{,}043 + 0{,}328 = 0{,}371 < 0{,}5$. Відповідь: $a = 21 \pm 0{,}371$.

2) Дано: $a = 21{,}328 \pm 0{,}043$. Оскільки $0{,}043 < 0{,}1$, вірними в широкому розумінні є цифри 2, 1, 3. Результат округлення до вірних цифр у широкому розумінні матиме вигляд $a = 21{,}3$. Оцінимо абсолютну похибку нового наближення $\Delta a = 0{,}043 + 0{,}028 = 0{,}071 < 0{,}1$, тобто умова вірних цифр у широкому розумінні виконується. Відповідь: $a = 21{,}3 \pm 0{,}071$.

Якщо наближене число $a > 0$ має n вірних десяткових знаків, то відносна похибка в широкому розумінні обчислюється як

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

де α – перша значуща цифра числа a.

Для вузького розуміння це значення становить $\delta_a = 0{,}5\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Приклад. Скільки десяткових знаків треба взяти для обчислення $\sqrt[3]{71}$, щоб відносна похибка у широкому розумінні не перевищувала 0,1 %?

Розв'язок. Першою значущою цифрою числа $\sqrt[3]{71}$ є $\alpha = 4$, відносна похибка – $\delta_a = 0{,}001$. Використовуючи формулу $\delta_a = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, матимемо

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \le 0{,}001;\ 10^{n-1} \ge 250;\ n \ge 4.$$

Приклад. Скільки десяткових знаків треба взяти для обчислення ln5, щоб відносна похибка у вузькому розумінні не перевищувала 0,01 %?

Розв'язок. Першою значущою цифрою числа ln5 є $\alpha = 1$, відносна похибка – $\delta_a = 0{,}0001$. Використовуючи формулу $\delta_a = 0{,}5\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, матимемо

$$0{,}5\frac{1}{1}(\frac{1}{10})^{n-1} \leq 0{,}0001;\ 10^{n-1} \geq 5000;\ n \geq 5.$$

Сумнівною називається цифра, що слідує за вірною.

Точність наближеного обчислення залежить не від кількості значущих цифр, а від кількості вірних значущих цифр. Якщо число містить надлишкову кількість невірних значущих цифр, то його округлюють. Для виконання допоміжних обчислень кількість значущих цифр має братися на 1-2 розряди більше ніж задана точність.

Приклад. Щоб додати 5,8 + 287,649 + 0,008064, треба орієнтуватися на число з найбільшою абсолютною похибкою, тобто на 5,8, а інші два числа округлити до одного зайвого десяткового знаку, тобто 287,649 $\approx$ 287,65 і 0,008064 $\approx$ 0,01, додати їх 5,8 + 287,65 + 0,01 = 293,46, а потім округлити 293,46 $\approx$ 293,5.

Залишаючи запасні десяткові знаки, ми не позбуваємося похибки найменш точного доданку. Але майже точно виключаємо похибки від інших доданків, чим зводимо похибку суми до похибки доданку з найбільшою абсолютною похибкою.

Похибки операцій арифметики

Похибка суми і різниці. Абсолютна похибка алгебраїчної суми декількох наближених чисел не перевищує суми абсолютних похибок цих чисел. Для двох чисел: $A + B = a \pm \Delta_a + b \pm \Delta_b = a + b \pm (\Delta_a + \Delta_b)$.

Приклад. Дано: a = 2,728 ± 0,0021, b = 3,136 ± 0,0004. Оцінити абсолютну похибку суми a + b.

Розв'язок. За умовою задачі $\Delta_a = 0{,}0021, \Delta_b = 0{,}0004$. Абсолютна похибка суми чисел a + b не перевищуватиме суми абсолютних похибок цих чисел (0,0021 + 0,0004), тобто a + b = 5,864 ± 0,0025.

У разі додавання великої кількості чисел похибки з надлишком можуть компенсуватися похибками з недостачею, і з додаванням результатів вимірів можна вважати, що $\Delta_y = \sqrt{{\Delta_{x_1}}^2 + {\Delta_{x_2}}^2 + \cdots + {\Delta_{x_n}}^2}$.

Якщо додається велика кількість чисел, що округлені до m-го розряду, є сенс застосовувати правило Чеботарьова: $\Delta_y = \sqrt{3n} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-m}$, де n > 10 – кількість доданків.

Якщо серед доданків одне число має абсолютну похибку, що значно перевищує абсолютні похибки інших чисел, то можна як оцінку похибки суми взяти найбільшу абсолютну похибку цього числа.

Похибка різниці визначається, як і похибка суми, і віднімання виконується за тим самим правилом, але потрібно уникати операції віднімання двох майже рівних і особливо малих чисел, бо виникає помилка втрати порядку.

Приклад. Дано: a = 18,32, Δ_a = 0,01; b = 18,21, Δ_b = 0,01. Оцінити відносну похибку різниці.

Розв’язок. Оцінимо відносні похибки даних: $\delta_a \approx \delta_b$ = 0,055 %. За правилами віднімання різниця матиме вигляд a – b = 0,11 ± 0,02, а її відносна похибка – δ_{a-b} = 18 %. Відносна похибка різниці у 327 разів більша за відносну похибку кожного з чисел.

Щоб уникнути таких похибок, треба брати числа з достатньо високою точністю або застосувати додаткові перетворення.

Приклад. Обчислити різницю $\sqrt{4{,}300} - \sqrt{4{,}287}$.

Розв’язок. $\sqrt{4{,}300} - \sqrt{4{,}287} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{4{,}300} - \sqrt{4{,}287}\right)\left(\sqrt{4{,}300} + \sqrt{4{,}287}\right)}{\sqrt{4{,}300} + \sqrt{4{,}287}} = \frac{4{,}300 - 4{,}287}{2{,}07 + 2{,}07} = 0{,}0031.$$

Похибка добутку. Відносна похибка добутку наближених чисел не перевищує суми відносних похибок співмножників. Для двох чисел:

$$A \cdot B = (a \pm \Delta_a) \cdot (b \pm \Delta_b) = (a \pm a \cdot \delta_a) \cdot (b \pm b \cdot \delta_b) =$$
$$= a(1 \pm \delta_a) \cdot b(1 \pm \delta_b) = ab(1 \pm \delta_a \pm \delta_b + \delta_a \delta_b).$$

Оскільки δ_a та δ_b дуже малі, то їх добуток $\delta_a \delta_b$ можна проігнорувати, тоді

$A \cdot B = ab(1 \pm (\delta_a + \delta_b))$ або $\delta_{a \cdot b} = \delta_a + \delta_b$.

Приклад. Знайти добуток наближених чисел a = 0,108 ± 0,0005 і b = 91,6 ± 0,05.

Розв’язок. Обоє чисел мають по три значущі цифри, тому і результат повинен мати не більше ніж три значущі цифри:

$$ab = 0{,}108 \cdot 91{,}6 = 9{,}8928 \approx 9{,}89.$$

Обчислимо відносні похибки: $\delta_a \approx 0{,}00463$; $\delta_b \approx 0{,}00055$. Тоді

$$\delta_{a \cdot b} = \delta_a + \delta_b = 0{,}00463 + 0{,}00055 = 0{,}00518 \approx 0{,}0052,$$

а абсолютна похибка $\Delta_{a \cdot b} = 9{,}89 \cdot 0{,}0052 = 0{,}051 \approx 0{,}05$.

Відповідь: $ab = 9{,}89 \pm 0{,}05$.

Похибка операції ділення. Оскільки ділення на число B рівнозначно множенню на число $\frac{1}{B}$, відносна похибка від ділення не перевищує суми відносних похибок чисельника і знаменника $\delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b$.

Похибка функцій

Похибки функції від однієї змінної отримаємо, використовуючи формулу наближеного обчислення значення функції через її похідну: $f(x \pm \Delta x) \approx f(x) \pm f'(x) \cdot \Delta x$, де вираз $|f'(x)| \cdot \Delta x$ і є абсолютною похибкою, тобто $\Delta_f = |f'(x)| \cdot \Delta x$, а відносна похибка –

$$\delta_f = \frac{|\Delta_f|}{|f|} = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} \cdot \Delta x.$$

Тоді абсолютні й відносні похибки деяких функцій матимуть вигляд: 1) для натурального логарифма

$$y = \ln x \quad \Delta \ln x = \frac{1}{|x|} \cdot \Delta x = \delta_x;$$

2) для десяткового логарифма

$$y = \lg x \quad \Delta \lg x = \frac{1}{|x| \ln 10} \cdot \Delta x = 0.4343\delta_x;$$

3) для степеневої функції

$$y = x^n \quad \delta_y = \frac{|n| \cdot |x^{n-1}|}{|x^n|} \cdot \Delta x = |n| \cdot \delta_x;$$

4) для показникової функції

$$y = a^x \quad \delta_y = \frac{a^x \cdot \ln a}{a^x} \cdot \Delta x = \ln a \cdot \Delta x;$$

5) для тригонометричних функцій

$$\Delta\, sinx = |\cos x| \cdot \Delta x \le \Delta x \;;\; \delta_{sinx} = |\text{ctg}x| \cdot \Delta x;$$

$$\Delta \cos x = |\sin x| \cdot \Delta x \le \Delta x \;;\; \delta_{\cos x} = |\text{tg}x| \cdot \Delta x;$$

$$\Delta tgx = (1+\text{tg}^2 x) \cdot \Delta x \ge \Delta x;\; \delta_{tgx} = |\text{tg}x + \text{ctg}x| \cdot \Delta x.$$

Приклад. Обчислити $X = \frac{a^3 \cdot b^2}{\sqrt[3]{k}}$, якщо $a = 7{,}45 \pm 0{,}01$, $b = 28{,}3 \pm 0{,}02$ і $k = 0{,}832 \pm 0{,}003$.

Розв'язок. Обчислюємо $a^3 = 413{,}5$; $b^2 = 800{,}9$; $\sqrt[3]{k} = 0{,}9405$;

$$X = \frac{413{,}5 \cdot 800{,}9}{0{,}9405} \approx 352123.$$

Відносні похибки:

$\delta_a = \frac{0{,}01}{7{,}45} \approx 0{,}00135$; $\delta_b = \frac{0{,}02}{28{,}3} \approx 0{,}00071$; $\delta_k = \frac{0{,}003}{0{,}832} \approx 0{,}00361$.

Використовуючи формулу $\delta_y = |n| \cdot \ \delta_x$ для степеневої функції $y = x^{\ n}$, матимемо

δ_{a^3}=$|3| \cdot \delta_a = 3 \cdot 0{,}00135 \approx 0{,}00405$; δ_{b^2}=$|2| \cdot \delta_b = 2 \cdot 0{,}00071 \approx 0{,}00142$; $\delta_{\sqrt[3]{k}}$= $|\frac{1}{3}| \cdot \delta_k = \frac{1}{3} \cdot 0{,}00361 \approx 0{,}00120$.

Тоді відносна похибка виразу X за правилами обчислення похибок добутків і часток становитиме

$$\delta_X = 0{,}00405 + 0{,}00142 + 0{,}00120 = 0{,}00667 \approx 0{,}67\ \%.$$

Абсолютна похибка результату – $\Delta X = 352123 \cdot 0{,}0067 = 2359$.

Відповідь. $X = 3{,}52 \cdot 10^5 \pm 2{,}36 \cdot 10^3$; $\delta_X = 0{,}67$ %.

Абсолютну похибку функції від кількох змінних $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ виводимо з формули скінченних приростів

$$|y^* - y| = \left|\frac{\partial f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_n}\right| x_n$$

або

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i}\right| \Delta x_i.$$

Скористаємося цією формулою для отримання попередніх результатів оцінки похибок суми, різниці, добутку і частки.

Нехай $y = x_1 + x_2$. Тоді $\Delta y = 1 \cdot \Delta x_1 + 1 \cdot \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

Нехай $y = x_1 - x_2$. Тоді $\Delta y = 1 \cdot \Delta x_1 + |-1| \cdot \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

Нехай $y = x_1 \cdot x_2$. Тоді $\Delta y = |x_2| \cdot \Delta x_1 + |x_1| \cdot \Delta x_2$, а

$$\delta_y = \frac{|x_2| \cdot \Delta x_1 + |x_1| \cdot \Delta x_2}{|x_1 \cdot x_2|} = \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}.$$

Нехай $y = \frac{x_1}{x_2}$. Тоді $\Delta y = \frac{1}{|x_2|} \cdot \Delta x_1 + \left|-\frac{x_1}{x_2^2}\right| \cdot \Delta x_2$, а

$$\delta_y = \frac{\frac{1}{|x_2|} \cdot \Delta x_1 + \left|-\frac{x_1}{x_2^2}\right| \cdot \Delta x_2}{\left|\frac{x_1}{x_2}\right|} = \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}.$$

Аналогічні результати були отримані в попередньому пункті.

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягають завдання обчислювальної математики?

2. Прокоментуйте переваги і недоліки основних методів математики.

3. Що називають ітерацією?

4. Опишіть узагальнений алгоритм ітераційного методу.

5. Що розуміємо під збіжністю числового методу?

6. Які збіжності числових методів розрізняють?

7. Наведіть джерела виникнення похибок.

8. Дайте означення абсолютної похибки та граничної абсолютної похибки.

9. Дайте означення відносної похибки та граничної відносної похибки.

10. Які цифри числа є значущими? Наведіть приклади.

11. Які значущі цифри числа є вірними у вузькому розумінні? Наведіть приклади.

12. Які значущі цифри числа є вірними в широкому розумінні? Наведіть приклади.

13. Наведіть формули похибок суми та різниці чисел. У чому полягає особливість їх застосування?

14. Наведіть формули похибок добутку та частки чисел. У чому полягає особливість їх застосування?

15. Наведіть формули похибок функцій однієї змінної. Застосуйте їх до показникових, степеневих, логарифмічних, тригонометричних функцій.

16. Наведіть формули похибок функцій кількох змінних. Застосуйте їх до суми, різниці, добутку, частки змінних.

Задачі для самостійного розв'язування

1.1. Округлити число $a = 32{,}278 \pm 0{,}021$ до вірних цифр у вузькому й широкому розумінні.

1.2. Скільки десяткових знаків треба взяти для обчислення $\sqrt[4]{79}$, щоб відносна похибка в широкому розумінні не перевищувала 0,1 %?

1.3. Скільки десяткових знаків треба взяти для обчислення ln14, щоб відносна похибка у вузькому розумінні не перевищувала 0,01 %?

1.4. Записати число e з трьома вірними цифрами та визначити граничну абсолютну й відносну похибки числа.

1.5. Дано: $a = 13{,}672 \pm 0{,}0052$, $b = 4{,}321 \pm 0{,}0012$. Оцінити абсолютну похибку суми $a + b$ та різниці $a - b$.

1.6. Знайти добуток наближених чисел $a = 0{,}097 \pm 0{,}0005$ і $b = 92{,}1 \pm 0{,}05$.

1.7. Квадрат має сторону довжиною близько 1 м. З якою точністю її треба виміряти, щоб похибка площі не перевищувала 1 см^2?

1.8. Обчислити $X = \frac{a^2 \cdot b^3}{\sqrt[4]{k}}$, якщо a = 22,34 ± 0,02, b = 5,3 ± 0,01 та $k = 0{,}738 \pm\ 0{,}002$.

1.9. Обчислити $X = \frac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, якщо a = 12,31 ± 0,004, b = 1,73 ± 0,03, c = 3,7 ± 0,02, m = 17,428 ± 0,003, n = 41,7 ± 0,01.

1.10. Корені рівняння $x^2 - 2x + \lg x = 0$ треба отримати із чотирма вірними знаками. З якою кількістю знаків треба взяти вільний член рівняння?

2. МЕТОДИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Задача інтерполювання

В обчислювальній практиці часто маємо справу з функціями $f(x)$, що задані таблицями їх значень. Загальний вигляд функції, що задана вузлами, наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

x_0	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

Для розв’язуванні тієї чи іншої задачі потрібно використовувати відомі значення $f(x)$ для обчислення проміжних значень аргументу. У цьому випадку будують функцію $\varphi(x)$, яка є достатньо простою для обчислень і в заданих точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ має значення $\varphi(x_0) = f(x_0), \varphi(x_1) = f(x_1), \varphi(x_2) = f(x_2), \dots, \varphi(x_n) = f(x_n)$, а в інших точках проміжку $[a, b]$, що належить області визначення функції $f(x)$, наближено представляє функцію $f(x)$ з тією чи іншою точністю. Тобто під час розв’язування задач замість функції $f(x)$ оперують функцією $\varphi(x)$. Задача побудови такої функції $\varphi(x)$ і є *задачею інтерполювання*. Найчастіше інтерполяційну функцію $\varphi(x)$ відшуковують у вигляді алгебраїчного многочлена. Такий спосіб наближення має в своїй основі гіпотезу, що на невеликих відрізках зміни аргументу x функція $f(x)$ може бути достатньо добре наближена за допомогою параболи деякого порядку, аналітичним виразом якої і буде алгебраїчний многочлен.

До інтерполювання прибігають і тоді, коли відомий аналітичний вигляд функції $f(x)$, але знаходження кожного значення $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ потребує великих обсягів обчислень. Тоді розраховують декілька значень $f(x_j)(j = 0,1, \ldots, n)$ і за ними будують просту інтерполяційну функцію $\varphi(x)$, за допомогою якої і обчислюють наближені значення $f(x)$ в інших точках.

Але для початку пригадаємо роботу з многочленами на прикладі схеми Горнера та ряду Тейлора.

Правило Горнера

Незалежно від того, яким чином було побудовано многочлен, виникає задача обчислення значення многочлена, що має вигляд

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Розділимо його на двочлен $(x - x_0)$, унаслідок чого отримаємо цілу частину (многочлен, який на один порядок нижчий за початковий) $b_1 + b_2 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-2} + b_n x^{n-1}$ і дробову частину (остачу) $\frac{b_0}{x-x_0}$, тобто матимемо вираз:

$$\frac{p(x)}{x - x_0} = b_1 + b_2 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-2} + b_n x^{n-1} + \frac{b_0}{x - x_0}.$$

Помноживши ліву і праву частини на двочлен $(x - x_0)$, отримаємо вираз для многочлена

$$p(x) = (x - x_0)(b_1 + b_2 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-2} + b_n x^{n-1}) + b_0,$$

з якого видно, що підстановкою x_0 замість x матимемо $p(x_0) = b_0$, тобто обчисливши b_0, автоматично знаходимо $p(x_0)$. Для обчислення b_0 розкриємо дужки в останньому многочлені та прирівняємо коефіцієнти за однакових степенів x:

$$\begin{gathered}
a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \\
= b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n - x_0 b_1 - x_0 b_2 x - \cdots \\
- x_0 b_{n-1} x^{n-2} - x_0 b_n x^{n-1} + b_0, \\
a_n = b_n, \\
a_{n-1} = b_{n-1} - b_n x_0,
\end{gathered}$$

$$\ldots$$
$$a_j = b_j - b_{j+1}x_0,$$
$$\ldots$$
$$a_0 = b_0 - b_1 x_0.$$

Виразивши коефіцієнти b_j $(j = n, \ldots, 0)$, отримаємо рекурентні формули:

$$b_n = a_n,$$
$$b_j = a_j + b_{j+1}x_0, j = n-1, \ldots, 0,$$

що відомі як схема Горнера. Обчисливши за формулами схеми Горнера значення b_0, матимемо значення многочлена $p(x)$ в точці x_0, а саме $p(x_0)$.

Приклад. Обчислити значення многочлена

$$1{,}418x^5 - 1{,}547x^4 + 0{,}418x^3 + 1{,}783x^2 - 2{,}517x + 2{,}434$$

за схемою Горнера в точці $x_0 = 0{,}50$.

Розв’язок. Складемо табл. 2.2, що міститиме проміжні результати та шукане значення многочлена:

Таблиця 2.2

x_0	$0{,}50$
$a_5 = 1{,}418$	$b_5 = 1{,}418$
$a_4 = -1{,}547$	$b_4 = b_5 \cdot x_i + a_4 = 1{,}418 \cdot 0{,}50 - 1{,}547 = -0{,}838$
$a_3 = 0{,}418$	$b_3 = b_4 \cdot x_i + a_3 = -0{,}838 \cdot 0{,}50 + 0{,}418 = -0{,}001$
$a_2 = 1{,}783$	$b_2 = b_3 \cdot x_i + a_2 = -0{,}001 \cdot 0{,}50 + 1{,}783 = 1{,}7825$
$a_1 = -2{,}517$	$b_1 = b_2 \cdot x_i + a_1 = 1{,}7825 \cdot 0{,}50 - 2{,}517 = -1{,}62575$
$a_0 = 2{,}434$	$b_0 = b_1 \cdot x_i + a_0 = -1{,}62575 \cdot 0{,}50 + 2{,}434 = 1{,}621125$

Шукане значення многочлена $p(x_0) = b_0 = 1{,}621125$.

Ряд Тейлора

Функцію $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ можна наближено представити в точці x_0 рядом Тейлора

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Похибка наближення виражається залишковим членом

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

де $x \in [a,b]$, ξ – деяка точка, що перебуває між x і x_0, якщо $x \neq x_0$.

Оцінити похибку наближення можна співвідношенням:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot l^{n+1},$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{[a,b]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$, $l = \max\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$.

Приклад. Розкласти в ряд Тейлора функцію $y = 2^x$ в точці $x_0 = 1$ $(n = 5)$.

Розв'язок. Ряд Тейлора для функції $y = 2^x$ в точці $x_0 = 1$ $(n = 5)$ має вигляд

$$2^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{2 \cdot \ln^k 2}{k!} \cdot (x-1)^k,$$

який можна розглянути як суму доданків z_k $(k = 0,1,\ldots,5)$. Проміжні результати розташуємо в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

k	$f^{(k)}(x_0)$	$k!$	z_k
0	2	1	2
1	$2 \cdot \ln^1 2 = 1{,}386294$	1	$1{,}386294 \cdot (x-1)$
2	$2 \cdot \ln^2 2 = 0{,}960906$	2	$0{,}480453 \cdot (x-1)^2$
3	$2 \cdot \ln^3 2 = 0{,}666049$	6	$0{,}111008 \cdot (x-1)^3$
4	$2 \cdot \ln^4 2 = 0{,}46167$	24	$0{,}019236 \cdot (x-1)^4$
5	$2 \cdot \ln^5 2 = 0{,}30005$	120	$0{,}002667 \cdot (x-1)^5$

$$2^x \approx 2 + 1{,}386294 \cdot (x-1) + 0{,}480453 \cdot (x-1)^2 + 0{,}111008 \cdot (x-1)^3 + 0{,}019236 \cdot (x-1)^4 + 0{,}002667 \cdot (x-1)^5.$$

Оцінка максимальної похибки на проміжку [1,2] має вигляд

$$|R_5(x)| \leq \frac{2^2 \cdot \ln^6 2}{6!} \cdot 1^6 \approx 0{,}0006161 \ldots$$

Частковим випадком ряда Тейлора є *ряд Маклорена* (якщо $x_0 = 0$):

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Приклад. Обчислити значення функції $y = e^x$ в точці $x_0 = 2{,}417$ з точністю до 10^{-6}.

Розв'язок. Ряд Маклорена для функції $y = e^x$ має вигляд

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} x^4 + \cdots,$$

який можна розглянути як суму доданків $z_k (k = 0,1, \dots, n)$, де $z_0 = 1, z_1 = x, \dots,$ $z_k = \frac{x}{k} z_{k-1}$, $\dots,$ $z_n = \frac{x}{n} z_{n-1}$. Обчислення доданків продовжується доти, доки черговий доданок не виявиться меншим за задану точність. Складемо табл. 2.4, що міститиме проміжні результати:

Таблиця 2.4

k	z_k	k	z_k
0	1	9	0,00775759
1	2,417	10	0,00187501
2	2,9209445	11	0,00041199
3	2,3533076	12	0,00008298
4	1,4219861	13	0,00001543
5	0,68738808	14	0,00000266
6	0,27690283	15	0,00000043
7	0,09561059		
8	0,02888635		

На 15-му кроці отримали доданок, що є меншим за 10^{-6}, тому обчислення складових таблиці припиняються. Шукане значення функції отримаємо шляхом додавання проміжних результатів таблиці:

$$e^{2{,}417} \approx 11{,}212172.$$

Побудова інтерполяційної функції

Найрозповсюдженішим способом інтерполювання функції $f(x)$ є випадок лінійного інтерполювання, коли наближення шукається у вигляді

$$\varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot \varphi_i(x),$$

де $\varphi_i(x), i = 0,1, \dots, m$ – сукупність лінійно незалежних функцій; $a_i, i = 0,1, \dots, m$ – числові коефіцієнти, що визначаються з умови співпадіння значень функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ у вузлах інтерполяції $x_j, j=0,1,\ldots,n$:

$$f(x_j)=\sum_{i=0}^{m} a_i\cdot\varphi_i(x_j), j=0,1,\ldots,n.$$

Тобто отримали систему $n+1$ лінійних рівнянь з m невідомими $a_i, i=0,1,\ldots,m$, матричне рівняння якої має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0)\ \varphi_1(x_0)\ \ldots\ \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1)\ \varphi_1(x_1)\ \ldots\ \varphi_m(x_1) \\ \ldots \\ \varphi_0(x_n)\ \varphi_1(x_n)\ \ldots\ \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \ldots \\ f(x_n) \end{pmatrix},$$

де $\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0)\ \varphi_1(x_0)\ \ldots\ \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1)\ \varphi_1(x_1)\ \ldots\ \varphi_m(x_1) \\ \ldots \\ \varphi_0(x_n)\ \varphi_1(x_n)\ \ldots\ \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}$ – матриця системи.

Щоб система мала однозначний розв'язок, треба поставити вимогу рівності m та n, а також виключити рівність нулю визначника системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0)\ \varphi_1(x_0)\ \ldots\ \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1)\ \varphi_1(x_1)\ \ldots\ \varphi_n(x_1) \\ \ldots \\ \varphi_0(x_n)\ \varphi_1(x_n)\ \ldots\ \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}\neq 0.$$

Тоді числові значення коефіцієнтів $a_i, i=0,1,\ldots,n$ можна обчислити за формулами Крамера

$$a_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},$$

тобто

$$\varphi(x)=\frac{\Delta_0}{\Delta}\cdot\varphi_0(x)+\frac{\Delta_1}{\Delta}\cdot\varphi_1(x)+\cdots+\frac{\Delta_n}{\Delta}\cdot\varphi_n(x).$$

Функцію $\varphi(x)$ можна записати інакше, якщо визначник Δ_i розкласти за елементами i-го стовпчика

$$a_i=\frac{\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\cdot\Delta_{ij}}{\Delta},$$

де Δ_{ij} – відповідні алгебраїчні доповнення. Підставляючи ці вирази до $\varphi(x)$ і збираючи доданки з однаковими $f(x_j)$, матимемо

$$\varphi(x)=f(x_0)\cdot\Phi_0(x)+f(x_1)\cdot\Phi_1(x)+\cdots+f(x_n)\cdot\Phi_n(x).$$

Функції $\Phi_i(x)$ є лінійними комбінаціями фунцій $\varphi_i(x), i = 0,1,\dots,n$. Вони не залежать від функції $f(x)$ і повністю визначаються функціями $\varphi_i(x)$ і вузлами інтерполювання. Водночас мають виконуватися умови

$$f(x_j) = f(x_0)\cdot\Phi_0(x_j) + f(x_1)\cdot\Phi_1(x_j) + \dots + f(x_n)\cdot\Phi_n(x_j),$$

$j = 0,1,\dots,n$, що означає: функції $\Phi_i(x)$ мають задовільняти умовам

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j. \end{cases}$$

Проаналізуємо тепер умови, що накладаються на функції $\varphi_i(x), i = 0,1,\dots,n$. На практиці найчастіше як сукупність функцій $\varphi_i(x), i = 0,1,\dots,n$ вибирають послідовність степеневих функцій $1, x, x^2, x^3, \dots$; послідовність тригонометричних функцій 1, $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$, ...; послідовність показникових функцій 1, $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}$, ..., де $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ – числова послідовність.

Під час інтерполювання важливо використовувати ту саму систему функцій $\varphi_i(x), i = 0,1,\dots,n$ за різних сукупностей значень точок $x_j, j = 0,1,\dots,n$. Тому і потрібно сформулювати умови, щоб визначник системи не обертався у нуль за жодної сукупності чисел $x_j, j = 0,1,\dots,n, x_i \neq x_j (i \neq j), x_j \in [a,b]$. Вимоги лінійної незалежності функцій замало, хоча вона і є потрібною. На систему функцій мають бути накладені такі обмеження, щоб жодна лінійна комбінація

$$c_0\cdot\varphi_0(x) + c_1\cdot\varphi_1(x) + \dots + c_n\cdot\varphi_n(x)$$

не могла б мати $n+1$ різних коренів на проміжку $[a,b]$. Система функцій, що володіє сформульованною властивістю, називається *системою Чебишова*.

Перш ніж сформулювати достатню умову існування системи Чебишова, введемо поняття вронскіана

$$W(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_k(x) \\ \varphi_0'(x) & \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_k'(x) \\ & \dots & & \\ \varphi_0^{(k)}(x) & \varphi_1^{(k)}(x) & \dots & \varphi_k^{(k)}(x) \end{vmatrix},$$

де $k = 0,1,\dots,n$.

Теорема. Якщо система функцій $\varphi_i(x), i = 0,1,\dots,n$ $(n+1)$ раз диференційована на проміжку $[a,b]$ та всі її вронскіани

$W(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k) \neq 0$ на проміжку $[a, b]$ за всіх $k = 0,1, \dots, n$, то функції $\varphi_i(x), i = 0,1, \dots, n$ утворюють систему Чебишова.

Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Розглянемо послідовність степеневих функцій

$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ (або $\varphi_i(x) = x^i, i = 0,1, \dots, n$).

Функції цієї послідовності лінійно незалежні на будь-якому відрізку, бо якби на якомусь проміжку $[a, b]$ виконувалася б умова лінійної залежності

$$c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_n \cdot x^n = 0,$$

то всі $c_0, c_1, \dots, c_n$ мали б дорівнювати нулю, оскільки алгебраїчний многочлен степеня n із ненульовими коефіцієнами не може мати більше n коренів, тобто така система функцій є системою Чебишова. Тоді система рівнянь для обчислення коефіцієнтів матиме вигляд:

$$f(x_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x_j^i, j = 0,1, \dots, n,$$

а визначник системи (визначник Вандермонда) $\begin{vmatrix} 1\ x_0\ x_0^2\ \dots\ x_0^n \\ 1\ x_1\ x_1^2\ \dots\ x_1^n \\ \dots \\ 1\ x_n\ x_n^2\ \dots\ x_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$

Якщо скористатися формулою

$$\varphi(x) = f(x_0) \cdot \Phi_0(x) + f(x_1) \cdot \Phi_1(x) + \dots + f(x_n) \cdot \Phi_n(x),$$

де $\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j, \end{cases}$

отримаємо інтерполяційний многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа за даними, що наведені в табл. 2.5:

Таблиця 2.5

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	3	2	5

Розв'язок.

$$L_3(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} + 3 \cdot \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} +$$

$$+2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} + 5 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)} =$$

$$= \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1.$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа за даними, що наведені в табл. 2.6:

Таблиця 2.6

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	1	3	2	5	6

Розв'язок.

$$L_4(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)}{(0-2)(0-3)(0-5)(0-6)} +$$

$$3 \cdot \frac{(x-0)(x-3)(x-5)(x-6)}{(2-0)(2-3)(2-5)(2-6)} +$$

$$+2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-5)(x-6)}{(3-0)(3-2)(3-5)(3-6)} + 5 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-6)}{(5-0)(5-2)(5-3)(5-6)} +$$

$$6 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-5)}{(6-0)(6-2)(6-3)(6-5)} =$$

$$= -\frac{11}{120}x^4 + \frac{73}{60}x^3 - \frac{601}{120}x^2 + \frac{413}{60}x + 1.$$

Наведені приклади показують, що побудова інтерполяційного многочлена Лагранжа потребує великих обчислень і відомий многочлен Лагранжа принципово не допомагає в разі додавання до таблиці додаткових вузлів і побудови нового многочлена Лагранжа.

Формула інтерполяційного многочлена Лагранжа з вузлами, що є рівновіддаленими (з кроком $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1}$) має вигляд:

$$q = \frac{x - x_0}{h} \ (x = x_0 + qh),$$

$$L_n(x) = L(x_0 + qh) = \sum_{i=0}^{n} p_{ni}(q) \cdot f(x_i),$$

де

$$p_{ni}(q) = (-1)^{n-i} \cdot \frac{q(q-1) \dots (q-i+1)(q-i-1) \dots (q-n)}{i! \cdot (n-i)!}.$$

Оцінка похибки методу побудови многочлена Лагранжа виражається залишковим членом

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

де $x \in [a, b]$, ξ – деяка точка, розташована між x і x_0, якщо $x \neq x_0$, або

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|,$$

де $M_{n+1} = \max\left|f^{(n+1)}(x)\right|$. Ці дві формули можуть слугувати оцінці відхилення $f(x)$ від $L_n(x)$, якщо похідна $f^{(n+1)}(\xi)$ може бути оцінена.

Приклад. Оцінити, з якою точністю можна обчислити за формулою Лагранжа $\ln 100{,}5$, якщо відомі значення $\ln 100, \ln 101, \ln 102, \ln 103$.

Розв'язок. Скористаємося наведеною вище оцінкою. З умови задачі маємо: $f(x) = \ln x, n = 3, a = 100, b = 103, f^{IV}(x) = -\frac{6}{x^4}, M_4 = \frac{6}{100^4}$. Тоді

$$|\ln 100{,}5 - L(100{,}5)| \leq \frac{6}{100^4 \cdot 4!} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5 = 2{,}344 \cdot 10^{-9}.$$

Інтерполяційний многочлен Ньютона

Формула Ньютона для інтерполювання функції $f(x)$, що задана вузлами, є модифікацією формули Лагранжа.

На початку введемо поняття *розподілених різниць*, а саме

$f(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$; $f(x_2, x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$;… ;

$f(x_n, x_{n-1}) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ – розподілені різниці першого порядку;

$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2,x_1) - f(x_1,x_0)}{x_2 - x_0}$; …;

$f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = \frac{f(x_n,x_{n-1}) - f(x_{n-1},x_{n-2})}{x_n - x_{n-2}}$ – розподілені різниці другого порядку;…;

$f(x_n, \dots, x_1, x_0) = \frac{f(x_n,\dots,x_1) - f(x_{n-1},\dots,x_0)}{x_n - x_0}$ – розподілена різниця n-ого порядку.

За методом математичної індукції доводиться наступна властивість розподілених різниць:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \\ = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \dots (x_{i+1} - x_{i+k})} + \cdots \\ + \frac{f(x_{i+k})}{(x_{i+k} - x_i)(x_{i+k} - x_{i+1}) \dots (x_{i+k} - x_{i+k-1})}.$$

Многочлен Лагранжа можна розписати таким чином:

$$L_n(x) = L_0(x) + \big(L_1(x) - L_0(x)\big) + \big(L_2(x) - L_1(x)\big) + \cdots \\ + \big(L_n(x) - L_{n-1}(x)\big).$$

Розглянемо окремо різницю з правої частини виразу $L_k(x) - L_{k-1}(x)$. Матимемо многочлен k-го порядку. Він обертається в нуль у точках $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$. Тому різниця матиме вигляд

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = A(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}),$$

де A – невідома стала. Для визначення A покладемо $x = x_k$:

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}).$$

$$A \\ = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})} \\ - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} f(x_j) \frac{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{j-1})(x_k - x_{j+1}) \dots (x_k - x_{k-1})}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_{k-1})}}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})} \\ = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_k)} = f(x_0, x_1, \dots, x_k).$$

Застосувавши отриманий результат до кожної різниці в многочлені Лагранжа, матимемо нову форму запису цього многочлена

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_2, x_1, x_0) + \cdots \\ + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f(x_n, \dots, x_1, x_0),$$

яка і є *інтерполяційним многочленом Ньютона* для нерівновіддалених вузлів. Отримана формула є зручнішою, оскільки дає змогу з додаванням вузлів нарощувати степінь многочлена без виконання повного перерахунку. Розглянемо приклади з попереднього пункту.

Приклад. Побудувати інтерполяційний многочлен Ньютона за даними, що наведені в табл. 2.7:

Таблиця 2.7

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	3	2	5

Розв’язок. Розташуємо розподілені різниці в табл. 2.8:

Таблиця 2.8

x	$f(x)$	$f(x_k, x_{k-1})$	$f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2})$	$f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, x_{k-3})$
0	1			
		1		
2	3		$-2/3$	
		-1		$3/10$
3	2		$5/6$	
		$3/2$		
5	5			

$$L_3(x) = 1 + (x-0)\cdot 1 + (x-0)(x-2)\left(-\frac{2}{3}\right) + (x-0)(x-2)(x-3).$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний многочлен Ньютона за даними, що наведені в табл. 2.9:

Таблиця 2.9

x	0	2	3	5	6
$f(x)$	1	3	2	5	6

Розв’язок.Розташуємо розподілені різниці в табл. 2.10:

Таблиця 2.10

x	$f(x)$	1 порядку	2 порядку	3 порядку	4 порядку
0	1				
		1			
2	3		$-2/3$		
		-1		$3/10$	
3	2		$5/6$		$-11/120$
		$3/2$		$-1/4$	
5	5		$-1/6$		
		1			
6	6				

$$L_4(x) = 1 + (x-0)\cdot 1 + (x-0)(x-2)\left(-\frac{2}{3}\right) + (x-0)(x-2)(x-3) \cdot \frac{3}{10} + (x-0)(x-2)(x-3)(x-5)\left(-\frac{11}{120}\right).$$

Залишковий член формули Ньютона такий самий, як і в формулі Лагранжа, але його можна записати в іншій формі:

$$R_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f(x, x_n, \dots, x_1, x_0).$$

Нижче наведено формули інтерполяційного многочлена Ньютона для рівновіддалених вузлів. Перша формула призначена для *інтерполювання уперед* (значення x перебуває *на початку проміжку* $[a, b]$):

$$p_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + q(q-1)\dots(q-n+1)\frac{\Delta^n y_0}{n!},$$

де $q = \frac{x-x_0}{h}$. Друга формула призначена для *інтерполювання назад* (значення x перебуває *в кінці проміжку* $[a, b]$):

$$p_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + q(q+1)\dots(q+n-1)\frac{\Delta^n y_0}{n!},$$

де $q = \frac{x-x_n}{h}$. Через знак Δ позначаються скінченні різниці відповідних порядків, які беремо з табл. 2.11:

Таблиця 2.11

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\dots$
x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	$\dots$
x_1	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	
x_2	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2$	
x_3	y_3	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3$	$\dots$	
x_4	y_4	$\Delta y_4 = y_5 - y_4$	$\dots$		
x_5	y_5	$\dots$			
$\dots$	$\dots$				

Значенння x_0 вибираємо серед табличних вузлів, яке є найближчим до x, але меншим за нього, якщо таке є, а значення x_n вибираємо найближчим до x, але більшим за нього, якщо таке є.

Приклад. Функція $y = \sin x$ задана вузлами (табл. 2.12):

Таблиця 2.12

x	5° 7° 9° 11° 13° 15°
$\sin x$	0,087156 0,121869 0,156434 0,190809 0,224951 0,258819

Обчислити $\sin 6^\circ$ та $\sin 14^\circ$.

Розв’язок. Побудуємо таблицю різниць 2.13:

Таблиця 2.13

10	$\sin x$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
5°	**0,087156**				
		0,034713			
7°	0,121869		**–0,000148**		
		0,034565		**–0,000042**	
9°	0,156434		–0,000190		–0,000001
		0,034375		–0,000043	
11°	0,190809		–0,000233		0,000002
		0,034142		**–0,000041**	
13°	0,224951		**–0,000274**		
		0,033868			
15°	**0,258819**				

Похибка в четвертих різницях може перевищувати їх величину, тому будемо використовувати тільки треті різниці.

Для обчислення $\sin 6^{\circ}$ скористаємося першою інтерполяційною формулою Ньютона (перший рядок таблиці, виділений жирним шрифтом), де

$$x_0 = 5^{\circ}, q = \frac{6^{\circ} - 5^{\circ}}{2^{\circ}} = \frac{1}{2},$$

$$p_n(5^{\circ}) = 0{,}087156 + 0{,}5 \cdot 0{,}034713 + \frac{0{,}5\cdot(0{,}5-1)}{2!}\cdot$$

$$(–0{,}000148)+ \frac{0{,}5\cdot(0{,}5-1)\cdot(0{,}5-2)}{3!} \cdot (–0{,}000042) = 0{,}104528.$$

Для обчислення $\sin 14^{\circ}$ скористаємося другою інтерполяційною формулою Ньютона (останній рядок таблиці, виділений жирним шрифтом), де

$$x_n = 15^{\circ}, q = \frac{14^{\circ} - 15^{\circ}}{2^{\circ}} = -\frac{1}{2},$$

$$p_n(14^{\circ}) = 0{,}258819 + (-0{,}5) \cdot 0{,}033868 + \frac{(-0{,}5)\cdot(-0{,}5+1)}{2!}\cdot$$

$$(0{,}000274)+ \frac{(-0{,}5)\cdot(-0{,}5+1)\cdot(-0{,}5+2)}{3!} \cdot (–0{,}000041)=0{,}241922.$$

Інтерполяційні формули, що використовують центральні різниці

Перша інтерполяційна формула Гаусса (інтерполювання вперед) будується на базі формули Ньютона, де як вузли беруться точки x_0, $x_0 + h, x_0 - h, \dots, x_0 + nh, x_0 - nh, \dots$:

$$p_{2n}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$
$$+ \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$
$$+ \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \cdots$$
$$+ \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}$$
$$+ \frac{(q+n-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n},$$

де $q = \frac{x - x_0}{h}$ $(x > x_0)$. Значення скінченних різниць (виділені жирним шрифтом) беремо з табл. 2.14:

Таблиця 2.14

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\dots$
$\dots$	$\dots$				$\dots$
x_{-3}	y_{-3}	$\dots$			
		Δy_{-3}	$\dots$		
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$	$\dots$	
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$	
$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{y_0}$		$\boldsymbol{\Delta^2 y_{-1}}$		
		$\boldsymbol{\Delta y_0}$		$\boldsymbol{\Delta^3 y_{-1}}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	$\dots$	
		Δy_2	$\dots$		
x_3	y_3	$\dots$			
$\dots$	$\dots$				

Друга інтерполяційна формула Гаусса (інтерполювання назад) будується на базі формули Ньютона, де як вузли беруться точки x_0, $x_0 - h, x_0 + h, \dots, x_0 - nh, x_0 + nh, \dots$:

$$p_{2n}(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-3} + \cdots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n},$$

де $q = \frac{x - x_0}{h}$ $(x < x_0)$. Значення скінченних різниць (виділені жирним шрифтом) беремо з табл. 2.15:

Таблиця 2.15

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\dots$
$\dots$	$\dots$				$\dots$
x_{-3}	y_{-3}	$\dots$			
		Δy_{-3}	$\dots$		
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$	$\dots$	
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		
		$\boldsymbol{\Delta y_{-1}}$		$\boldsymbol{\Delta^3 y_{-2}}$	
$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{y_0}$		$\boldsymbol{\Delta^2 y_{-1}}$		
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	$\dots$	
		Δy_2	$\dots$		
x_3	y_3	$\dots$			
$\dots$	$\dots$				

Якщо взяти напівсуму першої та другої інтерполяційних формул Гауса, то отримаємо інтерполяційну формулу Стірлінґа:

$$p_{2n}(x) = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} +$$

$$+\frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \dots + \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)\dots(q^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} \times$$

$$\times\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2}$$

$$+\frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)\dots(q^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n},$$

де $q = \frac{x - x_0}{h}$ (зазвичай цю формулу використовують, якщо $|q| \le 0{,}25$). Значення скінченних різниць (виділені жирним шрифтом) беремо з табл. 2.16:

Таблиця 2.16

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\dots$
$\dots$	$\dots$				$\dots$
x_{-3}	y_{-3}	$\dots$			
		Δy_{-3}	$\dots$		
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$	$\dots$	
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		
		$\boldsymbol{\Delta y_{-1}}$		$\boldsymbol{\Delta^3 y_{-2}}$	
$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{y_0}$		$\boldsymbol{\Delta^2 y_{-1}}$		
		$\boldsymbol{\Delta y_0}$		$\boldsymbol{\Delta^3 y_{-1}}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	$\dots$	
		Δy_2	$\dots$		
x_3	y_3	$\dots$			
$\dots$	$\dots$				

Приклад. Функція $y = \sin x$ задана вузлами (табл. 2.17):

Таблиця 2.17

x	9° 12° 15° 18° 21°
$\sin x$	0,156434 0,207912 0,258819 0,309017 0,358368

Обчислити $\sin 14^\circ$.

Розв'язок. Побудуємо таблицю різниць 2.18:

Таблиця 2.18

x	$\sin x$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
9°	0,156434			
		0,051478		
12°	0,207912		–0,000571	
		0,050907		**–0,000138**
$\boldsymbol{15^\circ}$	**0,258819**		**–0,000709**	
		0,050198		**–0,000138**
18°	0,309017		–0,000847	
		0,049351		
21°	0,358368			

Для обчислення $\sin 14^{\circ}$ скористаємося інтерполяційною формулою Стірлінга (рядок таблиці, виділений жирним шрифтом), де

$$x_0 = 15^{\circ}, q = \frac{14^{\circ} - 15^{\circ}}{3^{\circ}} = -\frac{1}{3},$$

$$p_n(14^{\circ}) = 0{,}258819 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{0{,}050907 + 0{,}050198}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{2} \cdot$$

$$(-0{,}000709) + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right)}{3!} \cdot \frac{(-0{,}000138) + (-0{,}000138)}{2} = 0{,}241922.$$

Якщо другу формулу Гауса застосувати до точки x_1, а потім взяти напівсуму цієї формули з першою формулою Гауса, то отримаємо інтерполяційну формулу Бесселя:

$$p_{2n}(x) =$$

$$= \frac{y_0 + y_1}{2} + (q - 0{,}5)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{(q-0{,}5)q(q-1)}{3!} \times$$

$$\times \Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} +$$

$$+ \frac{(q-0{,}5)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!} \cdot \Delta^5 y_{-2} +$$

$$+ \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q+3)}{6!} \cdot \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \cdots$$

$$+ \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!} \times$$

$$\times \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2}$$

$$+ \frac{(q-0{,}5)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n},$$

де $q = \frac{x - x_0}{h}$ (зазвичай цю формулу використовують, якщо $0{,}25 \le q \le 0{,}75$). Значення скінченних різниць (виділені жирним шрифтом) беремо з табл. 2.19:

Таблиця 2.19

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\dots$
$\dots$	$\dots$				$\dots$
x_{-3}	y_{-3}	$\dots$			
		Δy_{-3}	$\dots$		
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$	$\dots$	
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$	
$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{y_0}$		$\boldsymbol{\Delta^2 y_{-1}}$		
		$\boldsymbol{\Delta y_0}$		$\boldsymbol{\Delta^3 y_{-1}}$	
x_1	$\boldsymbol{y_1}$		$\boldsymbol{\Delta^2 y_0}$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	$\dots$	
		Δy_2	$\dots$		
x_3	y_3	$\dots$			
$\dots$	$\dots$				

Сплайн-інтерполяція

Далеко не завжди можна побудувати многочлен за сукупністю всіх точок, якими задана функція. У такому випадку проміжок інтерполювання розбивають на відрізки, а на кожному з них будують свій інтерполяційний многочлен, наклавши умову співпадання значень многочленів у точках «стиковки». Такий підхід називається кусково-поліноміальною інтерполяцією. Для того, щоб результуючий многочлен був диференційованим, висуваються додаткові умови співпадання значень похідних многочленів у точках «стиковки». Описаний процес лежить в основі *сплайн-інтерполяції*.

Сплайном називається кусково-поліноміальна функція, яка визначена на проміжку і має на ньому декілька неперервних похідних.

Лінійний сплайн отримуємо для функції $f(x)$, яка задана таблично на проміжку $[a, b]$ вузлами $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, шляхом заміни на кожному проміжку $[x_i; x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1$, шуканої функції лінійною функцією

$$\varphi(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0), x \in [x_0; x_1], \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1), x \in [x_1; x_2], \\ \dots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}), x \in [x_{n-1}; x_n] \end{cases}$$

так, щоб виконувалася умова інтерполяції

$$\begin{cases} a_0 + b_0(x - x_0) = f(x_0), \\ a_1 + b_1(x - x_1) = f(x_1), \\ \dots \\ a_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}) = f(x_n) \end{cases}$$

та умова неперервності у вузлах

$$\begin{cases} S_0(x_1) = S_1(x_1), \\ S_1(x_2) = S_2(x_2), \\ \dots \\ S_{n-2}(x_{n-1}) = S_{n-1}(x_{n-1}), \end{cases}$$

де $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}$ – невідомі коефіцієнти.

Тоді шукані коефіцієнти приймуть значення $a_i = f(x_i)$, $b_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, i = 0, 1, \dots, n-1$.

Розглянемо *квадратичний сплайн*. Його отримуємо шляхом заміни на кожному проміжку $[x_i; x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1$, шуканої функції квадратичною функцією:

$$\varphi(x) =$$

$$= \begin{cases} S_0(x) = a_0(x - x_0)^2 + b_0(x - x_0) + c_0, x \in [x_0; x_1], \\ S_1(x) = a_1(x - x_1)^2 + b_1(x - x_1) + c_1, x \in [x_1; x_2], \\ \dots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}, x \in [x_{n-1}; x_n], \end{cases}$$

де $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-1}$ - невідомі коефіцієнти.

для знаходження невідомих коефіцієнтів будується система рівнянь на основі умови інтерполяції

$$\begin{cases} a_0(x - x_0)^2 + b_0(x - x_0) + c_0 = f(x_0), \\ a_1(x - x_1)^2 + b_1(x - x_1) + c_1 = f(x_1), \\ \dots \\ a_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1} = f(x_n), \end{cases}$$

умови неперервності у вузлах

$$\begin{cases} S_0(x_1) = S_1(x_1), \\ S_1(x_2) = S_2(x_2), \\ \dots \\ S_{n-2}(x_{n-1}) = S_{n-1}(x_{n-1}) \end{cases}$$

і умови неперервності першої похідної

$$\begin{cases} S_0'(x_1) = S_1'(x_1), \\ S_1'(x_2) = S_2'(x_2), \\ \dots \\ S_{n-2}'(x_{n-1}) = S_{n-1}'(x_{n-1}). \end{cases}$$

Для отримання розв'язку системи потрібна додаткова умова $S'(x_0) = k_0$ або $S'(x_n) = k_n$.

На практиці найчастіше використовується *кубічний сплайн*

$$\varphi(x) = \\ = \begin{cases} S_0(x) = a_0(x - x_0)^3 + b_0(x - x_0)^2 + c_0(x - x_0) + d_0, x \in [x_0; x_1], \\ S_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, x \in [x_1; x_2], \\ \dots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}, \\ x \in [x_{n-1}; x_n], \end{cases}$$

для побудови якого потрібно виконання низки умов:

1) умови інтерполяції

$$\begin{cases} a_0(x - x_0)^3 + b_0(x - x_0)^2 + c_0(x - x_0) + d_0 = f(x_0), \\ a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1 = f(x_1), \\ \dots \\ a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1} = f(x_n), \end{cases}$$

2) умови неперервності у вузлах

$$\begin{cases} S_0(x_1) = S_1(x_1), \\ S_1(x_2) = S_2(x_2), \\ \dots \\ S_{n-2}(x_{n-1}) = S_{n-1}(x_{n-1}), \end{cases}$$

3) умови неперервності першої похідної

$$\begin{cases} S_0'(x_1) = S_1'(x_1), \\ S_1'(x_2) = S_2'(x_2), \\ \dots \\ S_{n-2}'(x_{n-1}) = S_{n-1}'(x_{n-1}), \end{cases}$$

4) умови неперервності другої похідної

$$\begin{cases} S_0''(x_1) = S_1''(x_1), \\ S_1''(x_2) = S_2''(x_2), \\ \dots \\ S_{n-2}''(x_{n-1}) = S_{n-1}''(x_{n-1}), \end{cases}$$

де $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-1}, d_0, \dots, d_{n-1}$ – невідомі коефіцієнти.

Маємо $4n - 2$ рівнянь. Для отримання розв'язку системи є потреба у двох додаткових рівняннях. Їх отримують, визначивши значення кривизни графіка сплайна на кінцях: $S''(x_0) = k_0, S''(x_n) = k_n$. Якщо

$k_0 = k_n = 0$, то такий сплайн називають природним.

Назагал функція $\varphi_{m,q}(x)$, $x \in [a,b]$ називається сплайном степеня $m > 0$ дефекту q $(0 \le q \le m)$, якщо на кожному проміжку $[x_i; x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1$ функція $\varphi_{m,q}(x)$ є многочленом степеня m і неперервна на $[a,b]$ разом зі своїми похідними до степеня $m-q$ включно.

Приклад. Розглядається задача про випаровування рапи з поверхні озера Ельтон (табл. 2.20):

Таблиця 2.20

Солоність рапи, %, x_i	20 24 26 28 30 33 36
Швидкість випаровування, % від прісної води, y_i	71 62 54 42 35 22 9

Побудувати залежність між солоністю рапи та швидкістю випаровування, застосовуючи кусково-поліноміальну інтерполяцію.

Розв'язок. Розіб'ємо увесь проміжок інтерполяції на три відрізки $[20; 26]$, $[26; 30]$ і $[30; 36]$. На кожному з них побудуємо многочлен, скориставшись інтерполяційною формулою Лагранжа. На $[20; 26]$ маємо

$$y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{7}{24} \cdot x^2 + \frac{127}{12} \cdot x - 24;$$

на $[26; 30]$ –

$$y_2 \cdot \frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + y_3 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + y_4 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{5}{8} \cdot x^2 + \frac{159}{4} \cdot x + 665;$$

на $[30; 36]$ –

$$y_4 \cdot \frac{(x - x_5)(x - x_6)}{(x_4 - x_5)(x_4 - x_6)} + y_5 \cdot \frac{(x - x_4)(x - x_6)}{(x_5 - x_4)(x_5 - x_6)} + y_6 \cdot \frac{(x - x_4)(x - x_5)}{(x_6 - x_4)(x_6 - x_5)} = \frac{13}{3} \cdot x + 165.$$

Отже,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{7}{24} \cdot x^2 + \frac{127}{12} \cdot x - 24, x \in [20; 26], \\ \frac{5}{8} \cdot x^2 + \frac{159}{4} \cdot x + 665, x \in [26; 30], \\ \frac{13}{3} \cdot x + 165, x \in [30; 36]. \end{cases}$$

Приклад. Функція задана табл. 2.21:

Таблиця 2.21

x	-1	0	1
y	1,5	0,5	2,5

Розрахувати: а) лінійний сплайн; б) параболічний сплайн дефекту 1; в) кубічний сплайн.

Розв'язок. Розіб'ємо весь проміжок на на два інтервали $[-1; 0]$ і $[0; 1]$.

а)

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} S_1(x) = a_1 + b_1 \cdot x, x \in [-1; 0], \\ S_2(x) = a_2 + b_2 \cdot x, x \in [0; 1]. \end{cases}$$

З умови інтерполяції

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \cdot (-1) = 1{,}5; \\ a_1 + b_1 \cdot 0 = 0{,}5; \\ a_2 + b_2 \cdot 0 = 0{,}5; \\ a_2 + b_2 \cdot 1 = 2{,}5; \end{cases}$$

Тоді $a_1 = 0{,}5;\ a_2 = 0{,}5;\ b_1 = -1;\ b_2 = 2.$

Відповідь.

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0{,}5 - x, x \in [-1; 0]; \\ 0{,}5 + 2x, x \in [0; 1]. \end{cases}$$

б)

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} S_1(x) = a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot x^2, x \in [-1; 0], \\ S_2(x) = a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot x^2, x \in [0; 1]. \end{cases}$$

З умови інтерполяції

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \cdot (-1) + c_1 \cdot 1 = 1{,}5; \\ a_1 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 = 0{,}5; \\ a_2 + b_2 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0{,}5; \\ a_2 + b_2 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = 2{,}5. \end{cases}$$

З умови неперервності похідних

$$b_1 + 2c_1 \cdot 0 = b_2 + 2c_2 \cdot 0.$$

Додаткова умова $\varphi_2{}'(x_0) = 0$ $(b_1 + 2c_1 \cdot (-1) = 0)$ дає змогу розв'язати систему

$$\begin{cases} a_1 - b_1 + c_1 = 1{,}5; \\ a_1 = 0{,}5; \\ a_2 = 0{,}5; \\ a_2 + b_2 + c_2 = 2{,}5; \\ b_1 = b_2; \\ b_1 - 2c_1 = 0; \end{cases}$$

або $a_1 = 0{,}5;\ a_2 = 0{,}5;\ c_1 = -0{,}5;\ b_1 = -1;\ b_2 = -1;\ c_2 = 3.$

Відповідь.

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0{,}5 - x - 0{,}5 \cdot x^2, x \in [-1; 0], \\ 0{,}5 - x + 3 \cdot x^2, x \in [0; 1]. \end{cases}$$

в)

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} S_1(x) = a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot x^2 + d_1 \cdot x^3, x \in [-1; 0], \\ S_2(x) = a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + d_2 \cdot x^3, x \in [0; 1]. \end{cases}$$

З умови інтерполяції

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \cdot (-1) + c_1 \cdot 1 + d_1 \cdot (-1) = 1{,}5; \\ a_1 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + d_1 \cdot 0 = 0{,}5; \\ a_2 + b_2 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + d_2 \cdot 0 = 0{,}5; \\ a_2 + b_2 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + d_2 \cdot 1 = 2{,}5. \end{cases}$$

З умови неперервності похідних

$$\begin{cases} b_1 + 2c_1 \cdot 0 + 3d_1 \cdot 0 = b_2 + 2c_2 \cdot 0 + 3d_2 \cdot 0; \\ 2c_1 + 6d_1 \cdot 0 = 2c_2 + 6d_2 \cdot 0. \end{cases}$$

Додаткові умови $\varphi_3{}'(x_0) = 0$ $(b_1 + 2c_1 \cdot (-1) + 3d_1 \cdot 1 = 0)$ і $\varphi_3{}''(x_0) = 0$ $(2c_1 + 6d_2 \cdot (-1) = 0)$ дають змогу розв'язати систему

$$\begin{cases} a_1 - b_1 + c_1 - d_1 = 1{,}5; \\ a_1 = 0{,}5; \\ a_2 = 0{,}5; \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 2{,}5; \\ b_1 - 2c_1 + 3d_1 = 0; \\ 2c_1 - 6d_2 = 0; \end{cases}$$

або $a_1 = 0{,}5;\ a_2 = 0{,}5;\ b_1 = -3;\ b_2 = -3;\ c_1 = -3;\ c_2 = -3;\ d_1 = -1;\ d_2 = 8.$

Відповідь.

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0{,}5 - 3 \cdot x - 3 \cdot x^2 - x^3, x \in [-1; 0], \\ 0{,}5 - 3 \cdot x - 3 \cdot x^2 + 8 \cdot x^3, x \in [0; 1]. \end{cases}$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте задачу інтерполювання.
2. Наведіть формули схеми Горнера.
3. Наведіть формули ряду Тейлора та ряду Маклорена.
4. У чому полягає лінійне інтерполювання?
5. Наведіть вираз для вронскіана.
6. Які функції можуть утворити систему Чебишова?
7. Наведіть формулу інтерполяційного многочлена Лагранжа для рівновіддалених вузів.
8. Наведіть формулу інтерполяційного многочлена Лагранжа для нерівновіддалених вузів.
9. Наведіть формулу залишкового члена многочлена Лагранжа.
10. Наведіть формулу інтерполяційного многочлена Ньютона для нерівновіддалених вузів.
11. Наведіть формулу залишкового члена многочлена Ньютона.
12. Наведіть першу формулу інтерполяційного многочлена Ньютона для рівновіддалених вузів.
13. Наведіть другу формулу інтерполяційного многочлена Ньютона для рівновіддалених вузів.
14. Наведіть першу інтерполяційну формулу Гауса.
15. Наведіть другу інтерполяційну формулу Гауса.
16. Наведіть інтерполяційну формулу Стірлінґа.
17. Наведіть інтерполяційну формулу Бесселя.
18. У чому полягає ідея сплайн-інтерполяції?
19. Дайте означення сплайна.
20. Опишіть лінійний сплайн.
21. Опишіть квадратичний сплайн.
22. Опишіть кубічний сплайн.

Задачі для самостійного розв'язування

2.1. Обчислити значення многочлена $2{,}141x^5 - 0{,}354x^4 + 1{,}012x^3 + 1{,}289x^2 - 1{,}523x + 1{,}874$ за схемою Горнера в точці $x_0 = 0{,}50$.

2.2. Розкласти в ряд Тейлора функцію $y = 3^x$ в точці $x_0 = 1$ $(n = 6)$.

2.3. Обчислити значення функції $y = e^x$ в точці $x_0 = 3{,}234$ з точністю до 10^{-6}.

2.4. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа за даними табл. 2.22:

Таблиця 2.22

x	0	1	3	5
$f(x)$	1	2	3	5

2.5. Побудувати інтерполяційний многочлен Ньютона за даними табл. 2.22. Порівняти результат з відповіддю до попередньої задачі.

2.6. Функція $y = \sin x$ задана вузлами (табл. 2.23):

Таблиця 2.23

x	5° 7° 9° 11° 13° 15°
$\sin x$	0,087156 0,121869 0,156434 0,190809 0,224951 0,258819

Обчислити $\sin 8^\circ$ та $\sin 12^\circ$.

2.7. Функція $y = \sin x$ задана вузлами (табл. 2.24):

Таблиця 2.24

x	9° 12° 15° 18° 21°
$\sin x$	0,156434 0,207912 0,258819 0,309017 0,358368

Обчислити $\sin 16^\circ$.

2.8. Функція $y = \lg x$ задана вузлами (табл. 2.25):

Таблиця 2.25

x	340 350 360 370
$\lg x$	2,5314789 2,5440680 2,5563025 2,5682017

Обчислити lg355.

2.9. Функція $y = \mathrm{arctg}x$ задана вузлами (табл. 2.26):

Таблиця 2.26

x	0,176327 0,267949 0,363970 0,466308
$\mathrm{arctg}x$	10° 15° 20° 25°

Обчислити arctg0,3.

2.10. Функція $y = f(x)$ задана вузлами (табл. 2.27):

Таблиця 2.27

x	20 22 24 26 28 30
$f(x)$	0,2293149 0,2300167 0,2307190 0,2314220 0,2321255 0,0,2328296

Обчислити $f(21)$ та $f(29)$.

2.11. Функціональна залежність задана табл. 2.28:

Таблиця 2.28

x_i	120 124 126 128 130 133 136
y_i	271 262 254 242 235 222 29

Побудувати функціональну залежність, застосовуючи кусково-поліноміальну інтерполяцію.

2.12. Функція задана табл. 2.29:

Таблиця 2.29

x	-2	0	2
y	2,5	0,5	1,5

Розрахувати: а) лінійний сплайн; б) параболічний сплайн дефекту 1; в) кубічний сплайн.

3. МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ

Означення апроксимації

Апроксимація – заміна одних математичних об'єктів іншими, що є наближеними за тим чи іншим критерієм до початкового. Під таке означення підходить і задача інтерполяції. Але між інтерполяцією та апроксимацією є принципова різниця. Якщо інтерполяційна функція проходить через вузлові точки таблиці, якою задається функція, то в разі апроксимації наближена функція проходить не через вузли функції, а зазвичай між ними.

Інтерполяція дає точніший опис досліджуваної функції, але застосування апроксимації має свої аргументи:

1) за значної кількості табличних значень інтерполяційна функція стає громіздкою;

2) інтерполяційною функцією неможливо описати дані в разі повторного експерименту;

3) під час апроксимації відбувається згладжування похибок експерименту (під час інтерполяції вони повторюються).

У разі апроксимації розв'язують, як правило, два типи задач:

1) пошук аналітичного виразу для емпіричної функції;

2) обчислення найкращих параметрів за відомого аналітичного вигляду емпіричної функції.

Розглянемо найпоширеніші методи апроксимації.

Метод найменших квадратів

Ідея методу найменших квадратів полягає в мінімізації відхилень значень шуканої функції $f(x_i)$, яка задана таблично, від експериментальних даних $y_i, i = 0, 1, \dots, n$. З метою уникнення взаємної компенсації додатних і від'ємних відхилень мінімізуються квадрати відхилень:

$$F = \sum_{i=0}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \to \min.$$

Якщо відомий аналітичний вигляд шуканої функції, то невідомими виступають її параметри $a_0, a_1, \dots, a_n$. Тоді для знаходження мінімуму побудованої функції треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_0} = 0, \\ \dots \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_n} = 0. \end{cases}$$

Лінійна апроксимація

Якщо умова задачі допускає опис експериментальних даних лінійною залежністю $f(x) = a \cdot x + b$, то метод найменших квадратів матиме вигляд:

$$F = \sum_{i=0}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b)^2 \to \min,$$

де a та b – невідомі параметри, стосовно яких розв'язуватимемо задачу.

Диференціюємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = -2 \sum_{i=0}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b) \cdot x_i = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = -2 \sum_{i=0}^{n} (y_i - a \cdot x_i - b) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2} + b \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} (x_i y_i)\,, \\ a \sum_{i=0}^{n} x_i + nb = \sum_{i=0}^{n} y_i\,. \end{cases}$$

Отримали систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими. Розв'язуючи її, матимемо:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=0}^{n} (x_i y_i) - \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot \sum_{i=0}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2} - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i - a \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2} - \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot \sum_{i=0}^{n} (x_i y_i)}{n \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,2} - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2}.$$

Приклад. Розрахувати параметри лінійної апроксимації за методом найменших квадратів для функції, що задана вузлами (табл. 3.1):

Таблиця 3.1

x	0,06 0,11 0,15 0,26 0,32 0,34
y	0,050411 0,100936 0,171657 0,249349 0,310339 0,359422

Розв'язок. Розрахуємо значення сум:

$$S_1 = 0{,}06 + 0{,}11 + 0{,}15 + 0{,}26 + 0{,}32 + 0{,}34 = 1{,}24;$$

$$S_2 = 0{,}06^2 + 0{,}11^2 + 0{,}15^2 + 0{,}26^2 + 0{,}32^2 + 0{,}34^2 = 0{,}3238;$$

$$S_3 = 0{,}050411 + 0{,}100936 + 0{,}171657 + 0{,}249349 + 0{,}310339 + 0{,}359422 = 1{,}242114;$$

$$S_4 = 0{,}06 \cdot 0{,}050411 + 0{,}11 \cdot 0{,}100936 + 0{,}15 \cdot 0{,}171657 + 0{,}26 \cdot 0{,}249349 + 0{,}32 \cdot 0{,}310339 + 0{,}34 \cdot 0{,}359422 = 0{,}326219.$$

Будуємо систему на основі розрахованих сум:

$$a = \frac{n \cdot S_4 - S_1 \cdot S_3}{n \cdot S_2 - (S_1)^2} = \frac{6 \cdot 0{,}326219 - 1{,}24 \cdot 1{,}242114}{6 \cdot 0{,}3238 - (1{,}24)^2} = 1{,}029348;$$

$$b = \frac{S_3 - a \cdot S_1}{n} = \frac{1{,}242114 - 1{,}029348 \cdot 1{,}24}{6} = -0{,}005713.$$

Сама функція має вигляд:

$$g(x) = -0{,}005713 + 1{,}029348 \cdot x,$$

а її графік зображено на рис. 3.1:

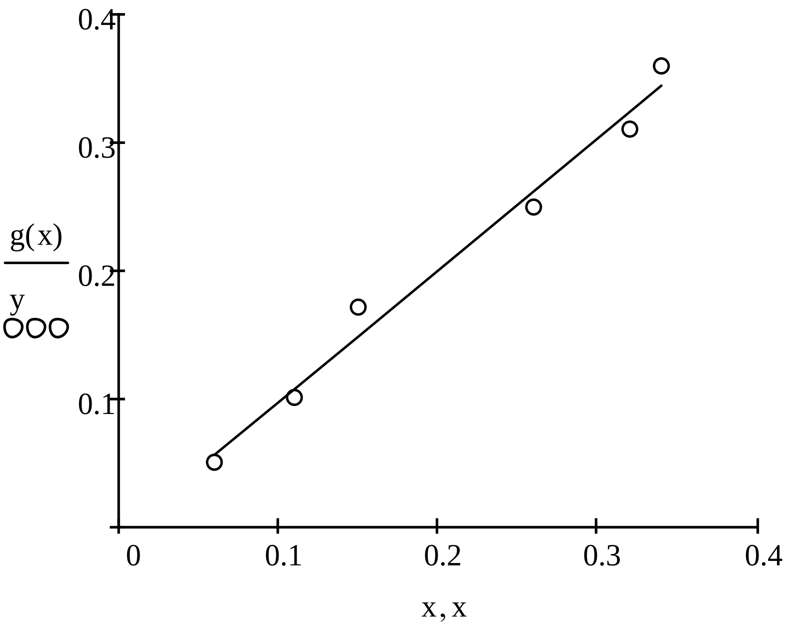

Рис. 3.1. Лінійна апроксимація

Параболічна апроксимація

Якщо умова задачі допускає опис експериментальних даних параболічною залежністю $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$, то метод найменших квадратів матиме вигляд:

$$F = \sum_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot {x_i}^2)^2 \rightarrow \min,$$

де a_0, a_1 та a_3 – невідомі параметри, стосовно яких розв'язуватимемо задачу.

Диференціюємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_0} = -2 \sum\limits_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot {x_i}^2) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_1} = -2 \sum\limits_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot {x_i}^2) \cdot x_i = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_2} = -2 \sum\limits_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i - a_2 \cdot {x_i}^2) \cdot {x_i}^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} {x_i}^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i\,, \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} {x_i}^2 + a_2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} {x_i}^3 = \sum\limits_{i=0}^{n} (x_i \cdot y_i)\,, \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} {x_i}^2 + a_1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} {x_i}^3 + a_2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} {x_i}^4 = \sum\limits_{i=0}^{n} ({x_i}^2 \cdot y_i)\,, \end{cases}$$

Отримали систему трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими. Введемо позначки:

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n} x_i\,;\ S_2 = \sum_{i=0}^{n} {x_i}^2\,;\ S_3 = \sum_{i=0}^{n} {x_i}^3\,;\ S_4 = \sum_{i=0}^{n} {x_i}^4\,;$$

$$S_5 = \sum_{i=0}^{n} y_i\,;\ S_6 = \sum_{i=0}^{n} (x_i \cdot y_i)\,;\ S_7 = \sum_{i=0}^{n} ({x_i}^2 \cdot y_i).$$

Тоді система матиме вигляд:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_2 = S_5, \\ a_0 \cdot S_1 + a_1 \cdot S_2 + a_2 \cdot S_3 = S_6, \\ a_0 \cdot S_2 + a_1 \cdot S_3 + a_2 \cdot S_4 = S_7. \end{cases}$$

Коефіцієнти a_0, a_1, a_2 знаходимо, розв'язавши систему лінійних рівнянь.

Приклад. Розрахувати параметри параболічної апроксимації за методом найменших квадратів для функції, що задана вузлами (табл. 3.2):

Таблиця 3.2

x	0,05 0,12 0,14 0,25 0,32 0,34
y	0,367411 0,308936 0,269657 0,249349 0,310336 0,359413

Розв'язок. Розрахуємо значення сум:

$S_1 = 0{,}05 + 0{,}12 + 0{,}14 + 0{,}25 + 0{,}32 + 0{,}34 = 1{,}22;$

$S_2 = 0{,}05^2 + 0{,}12^2 + 0{,}14^2 + 0{,}25^2 + 0{,}32^2 + 0{,}34^2 = 0{,}317;$

$S_3 = 0{,}05^3 + 0{,}12^3 + 0{,}14^3 + 0{,}25^3 + 0{,}32^3 + 0{,}34^3 = 0{,}092294;$

$S_4 = 0{,}05^4 + 0{,}12^4 + 0{,}14^4 + 0{,}25^4 + 0{,}32^4 + 0{,}34^4 = 0{,}028353;$

$$S_5 = 0{,}367411 + 0{,}308936 + 0{,}269657 + 0{,}249349 + 0{,}310336 \\ + 0{,}359413 = 1{,}865102;$$

$$S_6 = 0{,}05 \cdot 0{,}367411 + 0{,}12 \cdot 0{,}308936 + 0{,}14 \cdot 0{,}269657 + 0{,}25 \\ \cdot 0{,}249349 + 0{,}32 \cdot 0{,}310336 + 0{,}34 \cdot 0{,}359413 = 0{,}37704;$$

$$S_7 = 0{,}05^2 \cdot 0{,}367411 + 0{,}12^2 \cdot 0{,}308936 + 0{,}14^2 \cdot 0{,}269657 + 0{,}25^2 \\ \cdot 0{,}249349 + 0{,}32^2 \cdot 0{,}310336 + 0{,}34^2 \cdot 0{,}359413 \\ = 0{,}099563.$$

Будуємо систему на основі розрахованих сум:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 6 + a_1 \cdot 1{,}22 + a_2 \cdot 0{,}317 = 1{,}865102, \\ a_0 \cdot 1{,}22 + a_1 \cdot 0{,}317 + a_2 \cdot 0{,}092294 = 0{,}37704, \\ a_0 \cdot 0{,}317 + a_1 \cdot 0{,}092294 + a_2 \cdot 0{,}028353 = 0{,}099563. \end{cases}$$

Коефіцієнти a_0, a_1, a_2 знаходимо, розв'язавши систему лінійних рівнянь:

$$a_0 = 0{,}471299, a_1 = -2{,}155483, a_2 = 5{,}258666.$$

Сама функція має вигляд

$$f(z) = 0{,}471299 - 2{,}155483 \cdot z + 5{,}258666 \cdot z^2,$$

а її графік зображено на рис. 3.2:

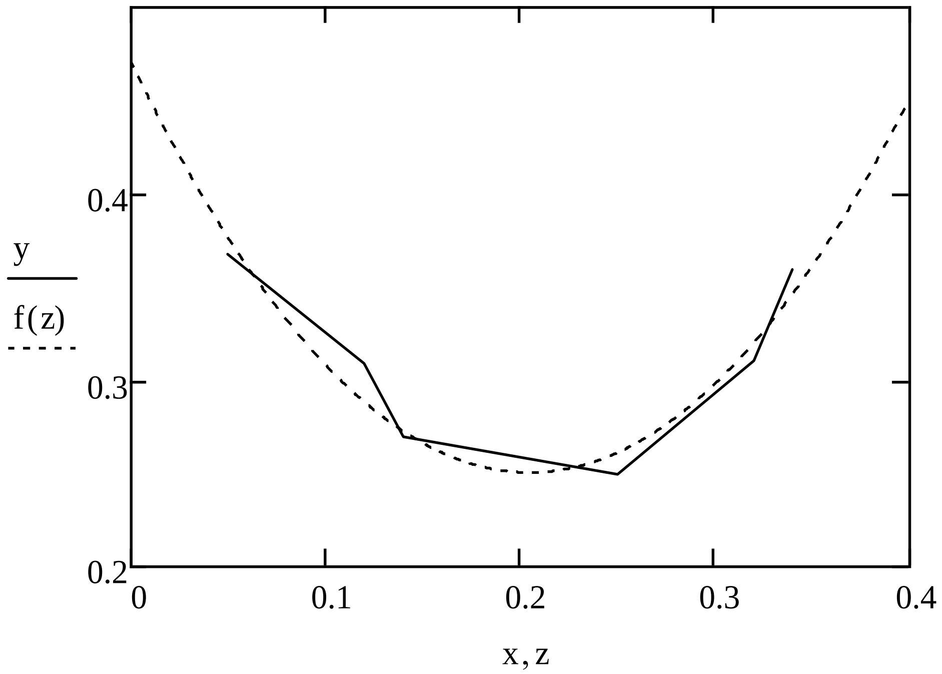

Рис. 3.2. Параболічна апроксимація

Апроксимація показниковою функцією

Якщо умова задачі допускає опис експериментальних даних показниковою функцією $f(x) = b \cdot e^{a \cdot x}$, то в разі логарифмування

$$\ln y = \ln b + a \cdot x$$

і введення нових позначок

$$Y = \ln y\,, B = \ln b$$

метод найменших квадратів матиме вигляд:

$$F = \sum_{i=0}^{n} (Y_i - B - a \cdot x_i)^2 \to \min,$$

де a та B – невідомі параметри, стосовно яких розв'язуватимемо задачу.

Диференціюємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = -2 \sum_{i=0}^{n} (Y_i - B - a \cdot x_i) \cdot x_i = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial B} = -2 \sum_{i=0}^{n} (Y_i - a \cdot x_i - b) = 0. \end{cases}$$

Отримали систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими. Розв'язуючи її, матимемо:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=0}^{n}(x_i \cdot Y_i) - \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot \sum_{i=0}^{n} Y_i}{n \cdot \sum_{i=0}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2},$$

$$B = \frac{\sum_{i=0}^{n} Y_i - a \sum_{i=0}^{n} x_i}{n}.$$

Повертаючись до початкових позначок, отримаємо значення параметра b:

$$b = e^B.$$

Приклад. Розрахувати параметри апроксимації показниковою функцією за методом найменших квадратів для функції, що задана вузлами (табл. 3.3):

Таблиця 3.3

x	0,05 0,15 0,35 0,55 0,75 0,95
y	0,995631 1,351278 2,129022 3,123422 4,712394 6,598714

Розв'язок. Розрахуємо значення сум:

$S_1 = 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}35 + 0{,}55 + 0{,}75 + 0{,}95 = 2{,}8;$

$S_2 = \ln 0{,}995631 + \ln 1{,}351278 + \ln 2{,}129022 + \ln 3{,}123422 + \ln 4{,}712394 + \ln 6{,}598714 = 5{,}628335;$

$S_3 = 0{,}05 \cdot \ln 0{,}995631 + 0{,}15 \cdot \ln 1{,}351278 + 0{,}35 \cdot \ln 2{,}129022 + 0{,}55 \cdot \ln 3{,}123422 + 0{,}75 \cdot \ln 4{,}712394 + 0{,}95 \cdot \ln 6{,}598714 = 3{,}89101;$

$S_4 = 0{,}05^2 + 0{,}15^2 + 0{,}35^2 + 0{,}55^2 + 0{,}75^2 + 0{,}95^2 = 1{,}915.$

Обчислюємо значення параметрів на основі розрахованих сум:

$$a = \frac{n \cdot S_3 - S_1 \cdot S_2}{n \cdot S_4 - (S_1)^2} = 2{,}130093;$$

$$B = \frac{S_2 - a \cdot S_1}{n} = -0{,}067185;$$

$$b = e^B = 0{,}935022.$$

Сама функція має вигляд

$$f(x) = 0{,}935022 \cdot e^{2{,}130093x},$$

а її графік зображено на рис. 3.3:

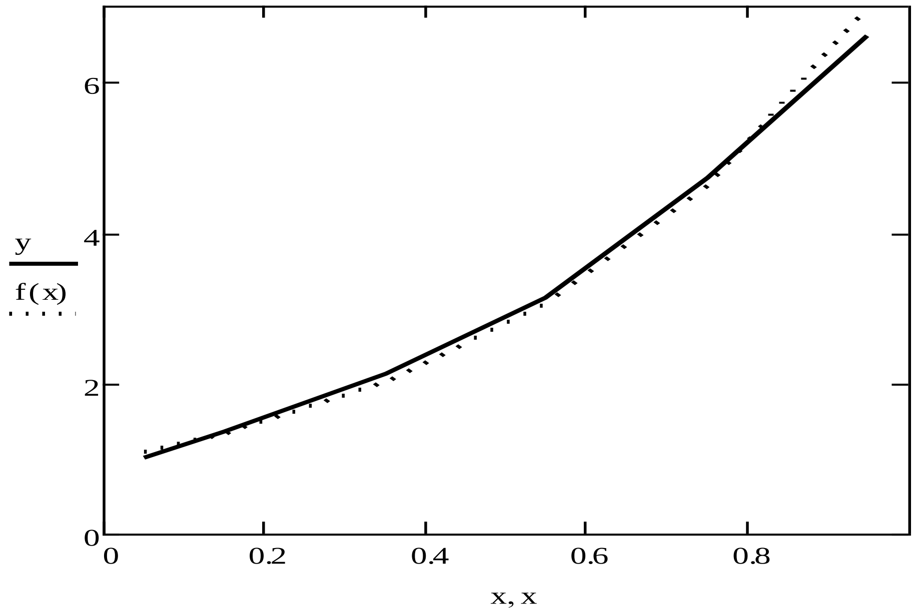

Рис. 3.3. Апроксимація показниковою функцією

Побудована функція наближена до функції $y = e^{2x}$.

Апроксимація степеневою функцією

Якщо умова задачі допускає опис експериментальних даних степеневою функцією $f(x) = b \cdot x^a$, то в разі логарифмування

$$\lg y = \lg b + a \cdot \lg x$$

і введення нових позначок

$$Y = \lg y\,, B = \lg b\,, X = \lg x$$

метод найменших квадратів матиме вигляд:

$$F = \sum_{i=0}^{n} (Y_i - B - a \cdot X_i)^2 \to \min,$$

де a та B – невідомі параметри, стосовно яких розв’язуватимемо задачу.

Диференціюємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = -2 \sum_{i=0}^{n} (Y_i - B - a \cdot X_i) \cdot X_i = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial B} = -2 \sum_{i=0}^{n} (Y_i - a \cdot X_i - B) = 0. \end{cases}$$

Отримали систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими. Розв'язуючи її, матимемо:

$$a=\frac{n\cdot\sum_{i=0}^{n}(X_i\cdot Y_i)-\sum_{i=0}^{n}X_i\cdot\sum_{i=0}^{n}Y_i}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2},$$

$$B=\frac{\sum_{i=0}^{n}Y_i-a\sum_{i=0}^{n}X_i}{n}.$$

Повертаючись до початкових позначок, матимемо значення параметра b:

$$b=10^B.$$

Приклад. Розрахувати параметри апроксимації степеневою функцією за методом найменших квадратів для функції, що задана вузлами (табл. 3.4):

Таблиця 3.4

x	0,05 0,33 0,45 0,61 0,82 0,99
y	0,000553 0,030278 0,091022 0,204422 0,532394 0,983714

Розв'язок. Розрахуємо значення сум:

$$S_1=\lg 0{,}05+\lg 0{,}33+\lg 0{,}45+\lg 0{,}61+\lg 0{,}82+\lg 0{,}99=-2{,}434525;$$

$$S_2=\lg 0{,}000531+\lg 0{,}030278+\lg 0{,}091022+\lg 0{,}204422+\lg 0{,}532394+\lg 0{,}983714=-6{,}787372;$$

$$S_3=\lg 0{,}05\cdot\lg 0{,}000531+\lg 0{,}33\cdot\lg 0{,}030278+\lg 0{,}45\cdot\lg 0{,}091022+\lg 0{,}61\cdot\lg 0{,}204422+\lg 0{,}82\cdot\lg 0{,}532394+\lg 0{,}99\cdot\lg 0{,}983714=5{,}501719;$$

$$S_4=\lg^2 0{,}05+\lg^2 0{,}33+\lg^2 0{,}45+\lg^2 0{,}61+\lg^2 0{,}82+\lg^2 0{,}99=2{,}0983;$$

Обчислюємо значення параметрів на основі розрахованих сум:

$$a=\frac{n\cdot S_3-S_1\cdot S_2}{n\cdot S_4-(S_1)^2}=2{,}406475;$$

$$B=\frac{S_2-a\cdot S_1}{n}=-0{,}18575;$$

$$b=10^B=0{,}652004.$$

Сама функція має вигляд

$$f(x)=0{,}652004\cdot x^{2{,}406475},$$

а її графік зображено на рис. 3.4:

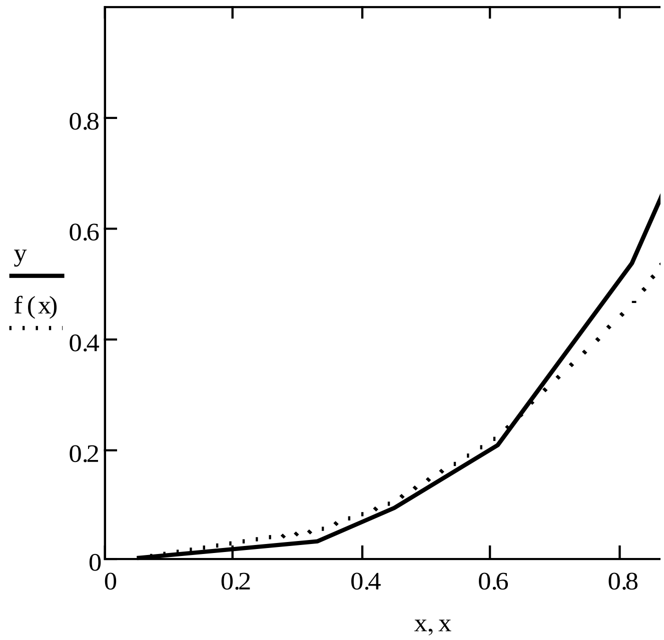

Рис. 3.4. Апроксимація степеневою функцією

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть означення апроксимації.
2. У чому полягає різниця між інтерполяцією та апроксимацією?
3. Опишіть ідею методу найменших квадратів.
4. Виведіть формули обчислення параметрів лінійної апроксимації.
5. Виведіть формули обчислення параметрів параболічної апроксимації.
6. Виведіть формули обчислення параметрів апроксимації показниковою функцією.
7. Виведіть формули обчислення параметрів апроксимації степеневою функцією.

Задачі для самостійного розв'язування

3.1. Розрахувати параметри лінійної апроксимації за методом найменших квадратів для функції, що задана вузлами (табл. 3.5):

Таблиця 3.5

x	0,05 0,12 0,16 0,24 0,31 0,35
y	0,050322 0,100874 0,170245 0,247361 0,311094 0,361276

Побудувати графік.

3.2. Розрахувати параметри параболічної апроксимації за методом найменших квадратів для функції, що задана вузлами (табл. 3.6):

Таблиця 3.6

x	0,04 0,12 0,15 0,26 0,31 0,35
y	0,354362 0,316326 0,246543 0,268912 0,307361 0,360321

Побудувати графік.

3.3. Розрахувати параметри апроксимації показниковою функцією за методом найменших квадратів для функції, що задана вузлами (табл. 3.7):

Таблиця 3.7

x	0,06 0,16 0,36 0,56 0,76 0,96
y	0,984387 1,367432 2,118764 3,136821 4,704738 6,603941

Побудувати графік.

3.4. Розрахувати параметри апроксимації степеневою функцією за методом найменших квадратів для функції, що задана вузлами (табл. 3.8):

Таблиця 3.8

x	0,04 0,32 0,44 0,62 0,81 0,98
y	0,000549 0,031032 0,101221 0,210437 0,528954 0,991254

Побудувати графік.

4. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Однією з найрозповсюдженіших задач обчислювальної математики є задача розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. До цієї задачі звертаются під час дослідження різних питань науки і техніки, часто вона є складовою частиную більш об’ємних задач. Наприклад, наближене розв’язування диференціальних рівнянь приводить до опрацьовування таких систем. На практиці кількість невідомих може досягати кількох десятків, сотен, тисяч тощо.

Система n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

де $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ – коефіцієнти за невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ – вільні члени. Якщо до її розв’язування застосувати формули Крамера, то тільки кількість операцій добутку та ділення можна оцінити за формулою:

$$N = (n^2 - 1) \cdot n! + n.$$

Саме тому приділяється стільки уваги розробці ефективних методів розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

На практиці методи розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна поділити на дві великі групи: точні методи та методи послідовних наближень. *Точні методи* характеризуються тим, що за їх допомогою теоретично можливо, виконавши обмежену кількість операцій, отримати точні значення невідомих. При цьому мається на увазі, що коефіцієнти та праві частини системи відомі точно, а всі обчислення виконуються без округлення.

Методи послідовних наближень характеризуються тим, що від самого початку задаються наближені значення невідомих, на базі яких тим чи іншим способом відбувається «покращення» наближених значень. Таке «покращення» повторюється доти, доки не будуть виконані умови отримання допустимого результату.

Перевага точних методів розв’язування систем лінійних рівнянь у тому, що вони є скінченними і теоретично можуть забезпечити розв’язок будь-якої невиродженої системи рівнянь. Методи послідовних наближень забезпечують наближений розв'язок тільки для спеціальних систем рівнянь. Але методи послідовних наближень забезпечують пропорційність часу обчислень n^2, тоді як для точних методів ця величина пропорційна n^3. Велика кількість систем рівнянь, що виникають на практиці, мають серед коефіцієнтів багато нулів, що дає переваги в разі застосування наближених методів.

Метод головних елементів

Метод головних елементів належить до точних методів, і його ідея відома ще зі шкільної програми. Комбінуючи тим чи іншим способом рівняння системи, досягаємо того, що в усіх рівняннях системи, крім одного, позбуваємося того самого невідомого. Потім аналогічно виключається друге невідоме, третє і т. д.

Розглянемо роботу методу головних елементів на прикладі розв'язування системи чотирьох рівнянь із чотирьма невідомими:

$$\begin{cases} 1{,}1161x_1 + 0{,}1254x_2 + 0{,}1397x_3 + 0{,}1490x_4 = 1{,}5471, \\ 0{,}1582x_1 + 1{,}1675x_2 + 0{,}1768x_3 + 0{,}1871x_4 = 1{,}6471, \\ 0{,}1968x_1 + 0{,}2071x_2 + 1{,}2168x_3 + 0{,}2271x_4 = 1{,}7471, \\ 0{,}2368x_1 + 0{,}2471x_2 + 0{,}2568x_3 + 1{,}2671x_4 = 1{,}8471. \end{cases}$$

Розташуємо початкові дані в табл. 4.1:

Таблиця 4.1

№	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1		1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
2		0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
3		0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
4		0,23680	0,24710	0,25680	**1,26710**	1,84710	3,85490

Останній стовпчик таблиці містить суми коефіцієнтів і вільних членів відповідного рядка.

На кожному етапі виключення невідомого вибираємо головний елемент – найбільший за модулем коефіцієнт за невідомих. На першому етапі таким елементом буде $a_{44} = 1{,}26710$ (виділено жирним шрифтом).

Потім знаходимо значення m_i шляхом ділення елементів стовбця, що містять головний елемент, на головний елемент із протилежним знаком (табл. 4.2):

Таблиця 4.2

№	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	–0,11759	1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
2	–0,14766	0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
3	–0,17923	0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
4		0,23680	0,24710	0,25680	**1,26710**	1,84710	3,85490

На наступному кроці будемо додавати до кожного з рядків таблиці рядок, що містить головний елемент, який помножений на відповідне m_i (табл. 4.3):

Таблиця 4.3

№	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	–0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
2	–0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
3		0,15436	0,16281	**1,17077**		1,41604	2,90398

Рядок, що містить головний елемент, у таблицю не записаний, а також і стовпчик, що його містить, бо він складається з нулів. В останній таблиці виділений наступний головний елемент $a_{33} = 1{,}17077$ і розраховані нові значення m_i. Правильність розрахунків перевіряємо шляхом додавання стовпців a_{ij} та b_i і порівняння з відповідним s_i. Якщо різниця буде в межах похибки округлення, то обчислення вважаються правильними. Інакше – задача потребує перерахунку.

Продовжуємо розв'язування прикладу, будуючи нову табл. 4.4:

Таблиця 4.4

№	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	–0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
2		0,10492	**1,11170**			1,20639	2,42301

Останній перерахунок (табл. 4.5):

Таблиця 4.5

№	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1		1,06616				1,10944	2,17560

Взявши рівняння, у яких вибиралися головні елементи, отримаємо нову систему, що еквівалентна початковій:

$$\begin{cases} 1{,}06616x_1 = 1{,}10944, \\ 0{,}10492x_1 + 1{,}11170x_2 = 1{,}20639, \\ 0{,}15436x_1 + 0{,}16281x_2 + 1{,}17077x_3 = 1{,}41604, \\ 0{,}23680x_1 + 0{,}24710x_2 + 0{,}25680x_3 + 1{,}26710x_4 = 1{,}84710. \end{cases}$$

Процес виключення головних елементів називають прямим ходом. Розв'язування отриманої системи називають зворотним ходом. Обчислюємо значення невідомих:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1{,}10944}{1{,}06616} = 1{,}04059, \\ x_2 = \dfrac{1{,}20639 - 0{,}10492 \cdot 1{,}04059}{1{,}11170} = 0{,}98697, \\ x_3 = \dfrac{1{,}41604 - 0{,}15436 \cdot 1{,}04059 - 0{,}16281 \cdot 0{,}98697}{1{,}17077} = 0{,}93505, \\ x_4 = \dfrac{1{,}84710 - 0{,}23680 \cdot 1{,}04059 - 0{,}24710 \cdot 0{,}98697 - 0{,}25680 \cdot 0{,}93505}{1{,}26710} = \\ 0{,}88130. \end{cases}$$

Під час розв'язування системи n лінійних рівнянь з n невідомими, враховуючи вибір головного елемента й поточний контроль, треба виконати

$$N = \frac{n}{3}(n^2 + 6n - 1)$$

операцій множення та ділення.

Щоб отримати ті чи інші переваги, запропоновано багато різних видозмін методу головного елемента.

Розглянемо один із них (схема Жордана). Якщо в самому методі на кожному кроці кількість рівнянь зменшувалася на одиницю, то зараз будемо залишати всі рівняння, але під час вибору головного елемента не будемо враховувати коефіцієнти тих рівнянь, з яких вже було вибрано головний елемент. Використаємо цю схему до вищенаведеного прикладу (табл. 4.6):

Таблиця 4.6

№	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	–0,11759	1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
2	–0,14766	0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
3	–0,17923	0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
4		0,23680	0,24710	0,25680	**1,26710**	1,84710	3,85490
1	–0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
2	–0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
3		0,15436	0,16281	**1,17077**		1,41604	2,90398
4	–0,21934	0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490
1	–0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
2		0,10492	**1,11170**			1,20639	2,42301
3	–0,14645	0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
4	–0,19015	0,20294	0,21139		1,26710	1,53651	3,21794
1		**1,06616**				1,10944	2,17560
2	–0,09841	0,10492	1,11170			1,20639	2,42301
3	–0,13037	0,13899		1,17077		1,23936	2,54912
4	–0,17163	0,18299			1,26710	1,30711	2,75720
1		1,06616				1,10944	2,17560
2			1,11170			1,09721	2,20891
3				1,17077		1,09472	2,26549
4					1,26710	1,11670	2,38380

Звідси матимемо: $x_1 = 1{,}04059, x_2 = 0{,}98697, x_3 = 0{,}93505, x_4 = 0{,}88130$.

У разі розв'язування за схемою Жордана система приводиться до діагонального вигляду і зворотний хід значно полегшується. Усього під час розв'язування системи n лінійних рівнянь з n невідомими з поточним контролем треба виконати

$$N = \frac{n^3 + 4n^2 - n}{2}$$

операцій множення та ділення.

Схема Халецького

Схема Халецького є розвиненням методу головного елемента. Розглянемо її для системи чотирьох рівнянь із чотирма невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_n + a_{34}x_n = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_n + a_{44}x_n = b_4. \end{cases}$$

Початкові дані, проміжні та кінцеві результати заносяться в табл. 4.7:

Таблиця 4.7

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$a_{15} = b_1$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$a_{25} = b_2$
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	$a_{35} = b_3$
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	$a_{45} = b_4$
b_{11} 1	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}
b_{21}	b_{22} 1	α_{23}	α_{24}	α_{25}
b_{31}	b_{32}	b_{33} 1	α_{34}	α_{35}
b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44}	α_{45}
x_1	x_2	x_3	x_4	

Верхня частина таблиці заповнюється коефіцієнтами та вільними членами початкової системи. Величини b_{i1} $(i = 1,2,3,4)$ співпадають з a_{i1} $(i = 1,2,3,4)$. Величини α_{1j} обчислюємо за формулами

$$\alpha_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}} \ (j = 2,3,4,5)\ ,$$

і перший рядок другої частини таблиці відповідає рівнянню

$$x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 = \alpha_{15},$$

яке еквівалентне першому рівнянню початкової системи. Величини b_{i2} $(i = 2,3,4)$ обчислюємо за формулами

$$b_{i2} = a_{i2} - b_{i1}\alpha_{12} \ (i = 2,3,4).$$

Тобто b_{i2} є коефіцієнтами при x_2 у другому, третьому та четвертому рівняннях системи після виключення невідомого x_1 за допомогою вище наведеного рівняння.

На наступному етапі обчислюються коефіцієнти та права частина другого рівняння після виключення з нього невідомого x_1 з наступним діленням на коефіцієнт з x_2. Отже,

$$\alpha_{2j} = \frac{a_{2j} - b_{21}\alpha_{1j}}{b_{22}} \ (j = 3{,}4{,}5),$$

а друге рівняння матиме вигляд

$$x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 = \alpha_{25}.$$

Ще один крок – виключення невідомого x_2 з третього та четвертого рівнянь:

$$b_{i3} = a_{i3} - b_{i1}\alpha_{13} - b_{i2}\alpha_{23} \ (i = 3{,}4),$$

а коефіцієнти та права частина третього рівняння після виключення з нього невідомого x_2 з наступним діленням на коефіцієнт з x_3 матимуть вигляд

$$\alpha_{3j} = \frac{a_{3j} - b_{31}\alpha_{1j} - b_{32}\alpha_{2j}}{b_{33}} \ (j = 4{,}5),$$

а саме рівняння -

$$x_3 + \alpha_{34}x_4 = \alpha_{35}.$$

З перетворенням останнього рівняння обчислюємо

$$b_{44} = a_{44} - b_{41}\alpha_{14} - b_{42}\alpha_{24} - b_{43}\alpha_{34},$$

$$\alpha_{45} = \frac{a_{45} - b_{41}\alpha_{15} - b_{42}\alpha_{25} - b_{43}\alpha_{35}}{b_{33}},$$

а саме рівняння матиме вигляд

$$x_4 = \alpha_{45}.$$

Узагальнені формули для системи n лінійних рівнянь з n невідомими можна записати таким чином:

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}\alpha_{kj}, i = j, j+1, \dots, n,$$

$$\alpha_{j\,l} = \frac{a_{j\,l} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}\alpha_{kl}}{b_{jj}}, l = j+1, j+2, \dots, n+1,$$

а невідомі x_n, x_{n-1},…, x_1 знаходяться послідовно з системи рівнянь

$$x_i + \sum_{k=i+1}^{n} \alpha_{ik}x_k = \alpha_{i,n+1}, i = n, n-1, \dots, 1.$$

Розв'яжемо систему з пункту про метод головного елементу за схемою Халецького:

$$\begin{cases} 1{,}1161x_1 + 0{,}1254x_2 + 0{,}1397x_3 + 0{,}1490x_4 = 1{,}5471, \\ 0{,}1582x_1 + 1{,}1675x_2 + 0{,}1768x_3 + 0{,}1871x_4 = 1{,}6471, \\ 0{,}1968x_1 + 0{,}2071x_2 + 1{,}2168x_3 + 0{,}2271x_4 = 1{,}7471, \\ 0{,}2368x_1 + 0{,}2471x_2 + 0{,}2568x_3 + 1{,}2671x_4 = 1{,}8471. \end{cases}$$

Початкові дані та результати занесемо в табл. 4.8:

Таблиця 4.8

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490
1,11610	0,11236	0,12517	0,13350	1,38617	2,75720
0,15820	1,14972	0,13655	0,14437	1,24187	2,52279
0,19680	0,18499	1,16691	0,14921	1,06655	2,21576
0,23680	0,22049	0,19705	1,17425	0,88130	1,88130
1,04058	0,98696	0,93505	0,88130		

Метод квадратного кореня

Систему n лінійних рівнянь з n невідомими, що має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

можна надати в матричній формі:

$$A \cdot X = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця системи A є симетричною, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21}\ a_{31} \dots\ a_{n1} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{32} \dots\ a_{n2} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \dots\ a_{n3} \\ \dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \dots\ a_{nn} \end{pmatrix},$$

то таку матрицю можна надати у вигляді:

$$A = L \cdot L^{\mathrm{T}},$$

де L – нижня трикутна матриця, L^{T} – транспонована матриця L, а саме

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots\ a_{1n} \\ a_{12}\ a_{22}\ a_{23} \dots\ a_{2n} \\ a_{13}\ a_{23}\ a_{33} \dots\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{1n}\ a_{2n}\ a_{3n} \dots\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}\ 0\ 0\ \dots\ 0 \\ t_{21}\ t_{22}\ 0\ \dots\ 0 \\ t_{31}\ t_{32}\ t_{33}\ \dots\ 0 \\ \dots \\ t_{n1}\ t_{n2}\ t_{n3}\ \dots\ t_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11}\ t_{21}\ t_{31} \dots\ t_{n1} \\ 0\ t_{22}\ t_{32} \dots\ t_{n2} \\ 0\ 0\ t_{33} \dots\ t_{n3} \\ \dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо роботу методу на прикладі системи четвертого порядку:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14} \\ a_{12}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24} \\ a_{13}\ a_{23}\ a_{33}\ a_{34} \\ a_{14}\ a_{24}\ a_{34}\ a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}\ 0\ 0\ 0 \\ t_{21}\ t_{22}\ 0\ 0 \\ t_{31}\ t_{32}\ t_{33}\ 0 \\ t_{41}\ t_{42}\ t_{43}\ t_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11}\ t_{21}\ t_{31}\ t_{41} \\ 0\ t_{22}\ t_{32}\ t_{42} \\ 0\ 0\ t_{33}\ t_{43} \\ 0\ 0\ 0\ t_{44} \end{pmatrix}$$

Виконуючи операцію добутку матриць, отримуємо такі рівняння:

$$\begin{cases} a_{11} = {t_{11}}^2;\ a_{12} = t_{11}t_{21};\ a_{13} = t_{11}t_{31};\ a_{14} = t_{11}t_{41}; \\ a_{22} = {t_{21}}^2 + {t_{22}}^2;\ a_{23} = t_{21}t_{31} + t_{22}t_{32};\ a_{24} = t_{21}t_{41} + t_{22}t_{42}; \\ a_{33} = {t_{31}}^2 + {t_{32}}^2 + {t_{33}}^2;\ a_{34} = t_{31}t_{41} + t_{32}t_{42} + t_{33}t_{43}; \\ a_{44} = {t_{41}}^2 + {t_{42}}^2 + {t_{43}}^2 + {t_{44}}^2, \end{cases}$$

з яких випливає:

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}}; t_{21} = \dfrac{a_{12}}{t_{11}};\ t_{31} = \dfrac{a_{13}}{t_{11}};\ t_{41} = \dfrac{a_{14}}{t_{11}}; \\ t_{22} = \sqrt{a_{22} - {t_{21}}^2}; t_{32} = \dfrac{a_{23} - t_{21}t_{31}}{t_{22}};\ t_{42} = \dfrac{a_{24} - t_{21}t_{41}}{t_{22}}; \\ t_{33} = \sqrt{a_{33} - {t_{31}}^2 - {t_{32}}^2}; t_{43} = \dfrac{a_{34} - t_{31}t_{41} - t_{32}t_{42}}{t_{33}}; \\ t_{44} = \sqrt{a_{44} - {t_{41}}^2 - {t_{42}}^2 - {t_{43}}^2}. \end{cases}$$

У загальному вигляді ці формули матимуть вигляд:

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}}; t_{i1} = \dfrac{a_{1i}}{t_{11}}, i = 2, \dots, n; \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} {t_{ki}}^2}, i = 2, \dots, n; \\ t_{ij} = \dfrac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik}t_{jk}}{t_{33}}, j = 2, \dots, n, i = j + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Після обчислення всіх елементів матриці L переходимо до другого етапу, а саме до розв'язування спочатку системи

$$L \cdot Y = B,$$

а потім системи

$$L^{\text{т}} \cdot X = Y.$$

Оскільки обидві системи мають трикутні матриці, то розв'язки систем є очевидними.

Схема квадратного кореня є зручною, потребує виконання невеликої кількості операцій множення та ділення, кількість яких оцінюється за формулою

$$N = \frac{n^3 + 9n^2 + 2n}{6}$$

під час розв'язування системи n лінійних рівнянь з n невідомими.

Процес розв’язування системи зручно заносити до табл. 4.9:

Таблиця 4.9

x_1	x_2	x_3	x_4	B
a_{11}	a_{12} a_{22}	a_{13} a_{23} a_{33}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	$b_1 = a_{15}$ $b_2 = a_{25}$ $b_3 = a_{35}$ $b_4 = a_{45}$
t_{11}	t_{21} t_{22}	t_{31} t_{32} t_{33}	t_{41} t_{42} t_{43} t_{44}	$y_1 = t_{51}$ $y_2 = t_{52}$ $y_3 = t_{53}$ $y_4 = t_{54}$
x_1	x_2	x_3	x_4	

Останній рядок знаходимо з формул:

$$x_4 = \frac{t_{54}}{t_{44}};\ x_3 = \frac{t_{53} - t_{43}x_4}{t_{33}};x_2 = \frac{t_{52} - t_{42}x_4 - t_{32}x_3}{t_{22}};$$

$$x_2 = \frac{t_{51} - t_{41}x_4 - t_{31}x_3 - t_{21}x_2}{t_{11}}.$$

Таблиця й формули наведені для випадку із чотирма невідомими, за аналогією будуються таблиці та формули для більшої кількості невідомих.

Приклад. Розв’язати систему

$$\begin{cases} 6{,}1818x_1 + 0{,}1818x_2 + 0{,}3141x_3 + 0{,}1415x_4 + 0{,}1516x_5 + 0{,}2141x_6 \\ \qquad = 7{,}1818, \\ 0{,}1818x_1 + 7{,}1818x_2 + 0{,}2141x_3 + 0{,}1815x_4 + 0{,}1526x_5 + 0{,}3114x_6 \\ \qquad = 8{,}2435, \\ 0{,}3141x_1 + 0{,}2141x_2 + 8{,}2435x_3 + 0{,}1214x_4 + 0{,}2516x_5 + 0{,}2618x_6 \\ \qquad = 9{,}3141, \\ 0{,}1415x_1 + 0{,}1815x_2 + 0{,}1214x_3 + 9{,}3141x_4 + 0{,}3145x_5 + 0{,}6843x_6 \\ \qquad = 5{,}3116, \\ 0{,}1516x_1 + 0{,}1526x_2 + 0{,}2516x_3 + 0{,}3145x_4 + 5{,}3116x_5 + 0{,}8998x_6 \\ \qquad = 4{,}1313, \\ 0{,}2141x_1 + 0{,}3114x_2 + 0{,}2618x_3 + 0{,}6843x_4 + 0{,}8998x_5 + 4{,}1313x_6 \\ \qquad = 3{,}1816. \end{cases}$$

Розв’язок. Так як матриця системи є симетричною, то застосуємо метод квадратного кореня. Результати занесемо до табл. 4.10:

Таблиця 4.10

0,1818 7,1818		0,3141 0,2141 8,2435	0,1415 0,1815 0,1214 9,3141	0,1516 0,1526 0,2516 0,3145 5,3116	0,2141 0,3114 0,2618 0,6843 0,8998 4,1313	7,1818 8,2435 9,3141 5,3116 4,1313 3,1816
2,486323	0,073120 2,678891	0,126331 0,076473 2,867349	0,056911 0,066199 0,038066 3,050415	0,060974 0,055300 0,083585 0,099720 2,299543	0,086111 0,113892 0,084472 0,219198 0,373697 1,978909	2,888522 2,998364 3,041100 1,584361 1,468632 0,726854
1,040932	1,050668	1,026605	0,474071	0,578973	0,367300	y_i / x_i

Метод простої ітерації

Метод простої ітерації належить до методів послідовних наближень розв’язку системи

$$A \cdot X = B.$$

Ідея методів послідовних наближень розв’язку системи полягає в довільному виборі початкового вектора X_0 і отриманні векторів $X_1, X_2, \dots, X_k$ за рекурентною формулою

$$X_{k+1} = F_k(X_0, X_1, \dots, X_k),$$

де F_k – деяка функція, яка назагал залежить від матриці системи A, порядку наближення k та попередніх наближень $X_0, X_1, \dots, X_k$. Метод має *перший порядок*, якщо F_k залежить лише від X_k і не залежить від $X_0, X_1, \dots, X_{k-1}$. Метод називається *стаціонарним*, якщо F_k не залежить від k.

Найпростішим випадком функції F_k є лінійні функції. Найбільш загальний лінійний метод послідовних наближень першого порядку має вигляд

$$X_{k+1} = P_k \cdot X_k + C_k,$$

де B_k – квадратна матриця, C_k – вектор.

Метод простої ітерації є стаціонарним лінійним процесом з формулою

$$X_{k+1} = P \cdot X_k + C,$$

де

$$P = \begin{pmatrix} p_{11}\, p_{12}\ \dots\ p_{1n} \\ p_{21}\, p_{22}\ \dots\ p_{2n} \\ \dots \\ p_{n1}\, p_{n2}\ \dots\ p_{nn} \end{pmatrix}, X_0 = C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, X_k = \begin{pmatrix} x_0^{(k)} \\ x_1^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot x_j^{(k)} + c_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Достатньою умовою збіжності методу простої ітерації є виконання однієї з таких вимог (норми матриці P):

$$\sum_{j=1}^{n} \left| p_{ij} \right| < 1, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| p_{ij} \right| < 1, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}^2 < 1.$$

Точність обчислень можна оцінити за співвідношенням:

$$\left\| X^* - X^{(k)} \right\| \le \frac{\|P\|^k}{1 - \|P\|} \cdot \|X_1 - X_0\|.$$

Якщо $X_0 = C$, то

$$\left\| X^* - X^{(k)} \right\| \le \frac{\|P\|^{k+1}}{1 - \|P\|} \cdot \|C\|,$$

де X^* – точний розв’язок.

Метод простої ітерації потребує попереднього перетворення початкової системи, що можна зробити, наприклад, якщо поділити кожне рівняння системи

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \ (i = 1, 2, \dots, n)$$

на a_{ii} та перенести доданки з невідомими $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ до правих частин рівнянь:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{a_{i1}}{a_{ii}} \cdot x_1 - \frac{a_{i2}}{a_{ii}} \cdot x_2 - \dots - \frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}} \cdot x_{i-1} - \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}} \cdot x_{i+1} - \dots - \frac{a_{in}}{a_{ii}} \cdot x_n$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

за умови, що $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Для забезпечення збіжності методу за наведених перетворень діагональні елементи матриці системи мають значно переважати інші коефіцієнти:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_{ij}^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} {a_{ij}}^2 < 1.$$

Приклад. Розв’язати систему

$$\begin{cases} 6{,}1818x_1 + 0{,}1818x_2 + 0{,}3141x_3 + 0{,}1415x_4 + 0{,}1516x_5 + 0{,}2141x_6 = 7{,}1818, \\ 0{,}1818x_1 + 7{,}1818x_2 + 0{,}2141x_3 + 0{,}1815x_4 + 0{,}1526x_5 + 0{,}3114x_6 = 8{,}2435, \\ 0{,}3141x_1 + 0{,}2141x_2 + 8{,}2435x_3 + 0{,}1214x_4 + 0{,}2516x_5 + 0{,}2618x_6 = 9{,}3141, \\ 0{,}1415x_1 + 0{,}1815x_2 + 0{,}1214x_3 + 9{,}3141x_4 + 0{,}3145x_5 + 0{,}6843x_6 = 5{,}3116, \\ 0{,}1516x_1 + 0{,}1526x_2 + 0{,}2516x_3 + 0{,}3145x_4 + 5{,}3116x_5 + 0{,}8998x_6 = 4{,}1313, \\ 0{,}2141x_1 + 0{,}3114x_2 + 0{,}2618x_3 + 0{,}6843x_4 + 0{,}8998x_5 + 4{,}1313x_6 = 3{,}1816. \end{cases}$$

за методом простої ітерації з точністю до 0,00001.

Розв’язок. Наведена система вже була розв’язана за метод квадратного кореня.

Щоб застосувати до неї метод простої ітерації, перше рівняння поділимо на коефіцієнт близько x_1, друге рівняння – на коефіцієнт близько x_2, третє рівняння – на коефіцієнт близько x_3, четверте рівняння – на коефіцієнт близько x_4, п'яте рівняння – на коефіцієнт близько x_5, шосте рівняння – на коефіцієнт близько x_6:

$$x_1 = -\frac{0,1818}{6,1818}x_2 - \frac{0,3141}{6,1818}x_3 - \frac{0,1415}{6,1818}x_4 - \frac{0,1516}{6,1818}x_5 - \frac{0,2141}{6,1818}x_6 + \frac{7,1818}{6,1818},$$
$$x_2 = -\frac{0,1818}{7,1818}x_1 - \frac{0,2141}{7,1818}x_3 - \frac{0,1815}{7,1818}x_4 - \frac{0,1526}{7,1818}x_5 - \frac{0,3114}{7,1818}x_6 + \frac{8,2435}{7,1818},$$
$$x_3 = -\frac{0,3141}{8,2435}x_1 - \frac{0,2141}{8,2435}x_2 - \frac{0,1214}{8,2435}x_4 - \frac{0,2516}{8,2435}x_5 - \frac{0,2618}{8,2435}x_6 + \frac{9,3141}{8,2435},$$
$$x_4 = -\frac{0,1415}{9,3141}x_1 - \frac{0,1815}{9,3141}x_2 - \frac{0,1214}{9,3141}x_3 - \frac{0,3145}{9,3141}x_5 - \frac{0,6843}{9,3141}x_6 + \frac{5,3116}{9,3141},$$
$$x_5 = -\frac{0,1516}{5,3116}x_1 - \frac{0,1526}{5,3116}x_2 - \frac{0,2516}{5,3116}x_3 - \frac{0,3145}{5,3116}x_4 - \frac{0,8998}{5,3116}x_6 + \frac{4,1313}{5,3116},$$
$$x_6 = -\frac{0,2141}{4,1313}x_1 - \frac{0,3114}{4,1313}x_2 - \frac{0,2618}{4,1313}x_3 - \frac{0,6843}{4,1313}x_4 - \frac{0,8998}{4,1313}x_5 + \frac{3,1816}{4,1313}.$$

Обчислюємо коефіцієнти та заносимо їх до табл. 4.11:

Таблиця 4.11

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	–0,029409	–0,050810	–0,022890	–0,024524	–0,034634
–0,025314	0	–0,029811	–0,025272	–0,021248	–0,043736
–0,038103	–0,025972	0	–0,014727	–0,030521	–0,031758
–0,015192	–0,019487	–0,013034	0	–0,033765	–0,073469
–0,028541	–0,028730	–0,047368	–0,059210	0	–0,169430
–0,051824	–0,075376	–0,063370	-0,165638	–0,217801	0

Оцінка норми матриці:

0+0,029409+0,050810+0,022890+0,024524+0,034634=0,162267;

0,025314+0+0,029811+0,025272+0,021248+0,043736=0,145381;

0,038103+0,025972+0+0,014727+0,030521+0,031758=0,141081;

0,015192+0,019487+0,013034+0+0,033765+0,073469=0,154947;

0,028541+0,028730+0,047368+0,059210+0+0,169430=0,333279;

0,051824+0,075376+0,063370+0,165638+0,217801+0=0,574009;

$$\|P\| = max\{0,162267; 0,145381;\ 0,141081; 0,154947; 0,333279; 0,574009\} = 0,574009 < 1,$$

з чого робимо висновок про збіжність ітераційного процесу.

Початковий розв'язок системи X_0 складається з вільних членів останньої системи:

$$x_1^{(0)} = \frac{7,1818}{6,1818} = 1,161765;\ x_2^{(0)} = \frac{8,2435}{7,1818} = 1,147832;$$

$$x_3^{(0)} = \frac{9,3141}{8,2435} = 1,129872;\ x_4^{(0)} = \frac{5,3116}{9,3141} = 0,570275;$$

$$x_5^{(0)} = \frac{4,1313}{5,3116} = 0,777788;\ x_6^{(0)} = \frac{3,1816}{4,1313} = 0,770121.$$

Ці результати (перший рядок) та всі інші перерахунки за формулами останньої системи заносимо до табл. 4.12:

Таблиця 4.12

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
X_0	1,161765	1,147832	1,129872	0,570275	0,777788	0,770121
X_1	1,011799	1,020120	0,999199	0,432689	0,493906	0,287933
X_2	1,049027	1,058410	1,034234	0,484170	0,598888	0,398231
X_3	1,038527	1,048077	1,024356	0,470754	0,572321	0,359803
X_4	1,041622	1,051212	1,027253	0,474964	0,580689	0,369760
X_5	1,040736	1,050327	1,026420	0,473804	0,578438	0,366660
X_6	1,040994	1,050587	1,026661	0,474149	0,579122	0,367508
X_7	1,040920	1,051413	1,026592	0,474051	0,578931	0,367254
X_8	1,040915	1,050535	1,026588	0,474062	0,578962	0,367257
X_9	1,040940	1,050534	1,026610	0,474078	0,578986	0,367315
X_{10}	1,040936	1,050529	1,026606	0,474073	0,578974	0,367305
X_{11}	1,040937	1,050530	1,026607	0,474074	0,578976	0,367309
X_{12}	1,040936	1,050530	1,026607	0,474074	0,578975	0,367308

В останніх двох рядках усі числа співпадають до п'яти знаків після коми, тому ітераційний процес припиняється.

Метод Зейделя

Метод Зейделя відрізняється від методу простої ітерації тим, що, відшукавши чергове наближення для невідомого, його зразу використовують для обчислення значення наступного невідомого, тобто розв'язування відбуваються за такими формулами:

$$x_i^{(0)} = c_i, x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} p_{ij} x_j^{(k-1)} + c_i, i = 1,2, \dots , n.$$

Приклад. Розв'яжемо систему з попереднього пункту за методом Зейделя. Розрахунок коефіцієнтів та початковий розв'язок системи X_0 зберігаються, а інші наближення переруховуються (табл. 4.13):

Таблиця 4.13

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
X_0	1,161765	1,147832	1,129872	0,570275	0,777788	0,770121
X_1	1,011799	1,020120	0,999199	0,432689	0,493906	0,287933
X_2	1,049027	1,057467	1,031845	0,482485	0,591246	0,361969
X_3	1,040158	1,049654	1,026331	0,474084	0,579940	0,367221
X_4	1,040955	1,050021	1,026593	0,474057	0,579006	0,367343
X_5	1,040950	1,050047	1,026618	0,474079	0,578982	0,367341
X_6	1,040949	1,050528	1,026606	0,474071	0,578970	0,367341
X_7	1,040937	1,050530	1,026607	0,474074	0,578975	0,367308
X_8	1,040936	1,050530	1,026607	0,474074	0,578975	0,367308

В останніх двох рядках усі числа співпадають до п'яти знаків після коми, тому ітераційний процес припиняється. Зверніть увагу, що кількість ітерацій в методі Зейделя менша за кількість ітерацій в методі простої ітерації.

Умови збіжності й точності методу Зейделя аналогічні умовам методу простої ітерації.

Запитання для самоперевірки

1. На які два класи поділяються методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
2. Яка основна характеристика точних методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь? Наведіть приклади.
3. Яка основна характеристика методів послідовних наближень розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь? Наведіть приклади.
4. Порівняйте переваги застосування точних і наближених методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

5. Опишіть метод головних елементів.

6. У чому полягає схема Жордана?

7. Опишіть схему Халецького.

8. Опишіть метод квадратного кореня. До яких систем він застосовується?

9. Опишіть метод простої ітерації.

10. Опишіть метод Зейделя.

11. Яка різниця між методом простої ітерації та методом Зейделя?

Задачі для самостійного розв'язування

4.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2{,}1334x_1 + 0{,}1154x_2 + 0{,}1562x_3 + 0{,}1367x_4 = 2{,}5537, \\ 0{,}1678x_1 + 2{,}1579x_2 + 0{,}1693x_3 + 0{,}1721x_4 = 2{,}5179, \\ 0{,}1875x_1 + 0{,}2145x_2 + 2{,}1985x_3 + 0{,}1243x_4 = 2{,}7265, \\ 0{,}2678x_1 + 0{,}1543x_2 + 0{,}1987x_3 + 2{,}3871x_4 = 2{,}7849 \end{cases}$$

а) за методом головних елементів; б) за схемою Жордана; в) за схемою Халецького. Результати порівняти.

4.2. Розв'язати систему лінійних рівнянь за методом квадратного кореня:

$$\begin{cases} 7{,}1818x_1 + 0{,}2118x_2 + 0{,}2241x_3 + 0{,}1416x_4 + 0{,}1316x_5 + 0{,}1241x_6 = 6{,}1818, \\ 0{,}2118x_1 + 8{,}1818x_2 + 0{,}2155x_3 + 0{,}1817x_4 + 0{,}1513x_5 + 0{,}2214x_6 = 7{,}2435, \\ 0{,}2241x_1 + 0{,}2155x_2 + 9{,}2435x_3 + 0{,}1634x_4 + 0{,}2446x_5 + 0{,}2619x_6 = 8{,}3141, \\ 0{,}1416x_1 + 0{,}1817x_2 + 0{,}1634x_3 + 5{,}3141x_4 + 0{,}2145x_5 + 0{,}5943x_6 = 8{,}3116, \\ 0{,}1316x_1 + 0{,}1513x_2 + 0{,}2446x_3 + 0{,}2145x_4 + 4{,}3116x_5 + 0{,}7198x_6 = 5{,}1313, \\ 0{,}1241x_1 + 0{,}2214x_2 + 0{,}2619x_3 + 0{,}5943x_4 + 0{,}7198x_5 + 3{,}2467x_6 = 4{,}1816. \end{cases}$$

4.3. Розв'язати систему лінійних рівнянь із завдання 4.2 за методом простої ітерації з точністю до 0,00001. Результати порівняти.

4.4. Розв'язати систему лінійних рівнянь із завдання 4.2 за методом Зейделя з точністю до 0,00001. Результати порівняти із завданнями 4.2 і 4.3.

5. ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

До чисельного диференціювання є сенс звертатися у випадках, коли функція $f(x)$, похідну якої треба знайти, задана таблично або має дуже складний аналітичний вираз. У першому випадку стандартні прийоми диференціювання неможливо використати, а у другому – їх використання ускладнено.

У таких випадках замість функції $f(x)$ використовується функція $\varphi(x)$ і вважається, що похідна від $\varphi(x)$ наближено дорівнює похідній від $f(x)$ з деякою похибкою, а саме:

$$f(x) = \varphi(x) + R(x),$$

де $\varphi(x)$ – інтерполяційна функція, $R(x)$ – залишковий член інтерполяційної формули. За умови існування похідних k-го порядку цих функцій можемо отримати:

$$f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + R^{(k)}(x).$$

Оскільки за наближене значення $f^{(k)}(x)$ беруть $\varphi^{(k)}(x)$, то похибкою є $R^{(k)}(x)$. Але далеко не завжди $R^{(k)}(x)$ є малим, хоча із заміною $f(x)$ на $\varphi(x)$ виходимо з малості $R(x)$, оскільки похідні від малих функцій можуть бути досить великими. Тому важливо, щоб інтерполяційна функція $\varphi(x)$ була побудована як лінійна комбінація базисних функцій, що утворюють систему Чебишева на відповідному проміжку.

Формули чисельного диференціювання для нерівновддалених вузлів

Розглянемо сформульовану задачу на основі інтерполяційної формули Ньютона для нерівновддалених вузлів:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_2, x_1, x_0) + \cdots$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})f(x_n, \ldots, x_1, x_0)$$

із залишковим членом $R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots$

$$(x - x_n)f(x, x_n, \ldots, x_1, x_0).$$

Для скорочення запису позначимо $x - x_i = \alpha_i$. Після диференціювання отримаємо:

$$p'_n(x) = f(x_1, x_0) + (\alpha_0 + \alpha_1)f(x_2, x_1, x_0) + \cdots + (\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2} +$$
$$\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-3}\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1})f(x_n, \ldots, x_1, x_0).$$

Залишковий член матиме вигляд:

$$R(x) = \frac{d\omega_n(x)}{dx} \cdot f(x, x_n, \dots, x_1, x_0) + \omega_n(x) \cdot \frac{df(x, x_n, \dots, x_1, x_0)}{dx},$$

де $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Після спрощення й використання зв'язку розподілених різниць із похідними матимемо:

$$R(x) = \frac{d\omega_n(x)}{dx} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} + \omega_n(x) \cdot \frac{f^{(n+2)}(\zeta_1)}{(n+2)!}.$$

У вузлах інтерполювання другий член обертається у нуль.

За аналогією працюємо з другою похідною:

$$p_n''(x) = 2(f(x_2, x_1, x_0) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(x_3, x_2, x_1, x_0) + \dots + (\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-3} + \alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-4}\alpha_{n-2} + \alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_{n-1}) f(x_n, \dots, x_1, x_0).$$

Залишковий член матиме вигляд:

$$R(x) = \frac{d^2\omega_n(x)}{d^2x} \cdot f(x, x_n, \dots, x_1, x_0) + 2\frac{d\omega_n(x)}{dx} \cdot \frac{df(x, x_n, \dots, x_1, x_0)}{dx} + \omega_n(x) \cdot \frac{d^2 f(x, x_n, \dots, x_1, x_0)}{d^2x}$$

або в разі спрощення й використання зв'язку розподілених різниць із похідними матимемо:

$$R(x) = \frac{d^2\omega_n(x)}{d^2x} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} + 2\frac{d\omega_n(x)}{dx} \cdot \frac{f^{(n+2)}(\zeta_1)}{(n+2)!} + 2\omega_n(x) \cdot \frac{f^{(n+3)}(\zeta_2)}{(n+3)!}.$$

У вузлах інтерполювання останній член обертається в нуль.

Приклад. Функція $y = \sin x$ задана вузлами (табл. 5.1):

Таблиця 5.1

x	10° 14° 16° 20°
$\sin x$	0,173648 0,241922 0,275637 0,342020

Обчислити $\cos 15^{\circ}$ та $\sin 15^{\circ}$, скориставшись формулами чисельного диференціювання.

Розв'язок. Розташуємо розподілені різниці в табл. 5.2:

Таблиця 5.2

x	$f(x)$	$f(x_k, x_{k-1})$	$f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2})$	$f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, x_{k-3})$
10°	0,173648			
		0,0170685		
14°	0,241922		–0,00003517	
		0,0168575		–0,00000084
16°	0,275637		–0,00004362	
		0,01659575		
20°	0,342020			

Скористаємося інтерполяційної формули Ньютона для нерівновддалених вузлів, де $x = 15^{\circ}, \alpha_0 = 15^{\circ} - 10^{\circ} = 5^{\circ}$, $\alpha_1 = 15^{\circ} - 14^{\circ} = 1^{\circ}, \alpha_2 = 15^{\circ} - 16^{\circ} = -1^{\circ}$.

Оскільккт $\cos x = (\sin x)'$, то

$\cos 15^{\circ} = (f(x_1, x_0) + (\alpha_0 + \alpha_1) f(x_2, x_1, x_0) + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2) f(x_3, x_2, x_1, x_0)) \frac{180}{\pi} = (0{,}0170685 - 0{,}000211 + 0{,}00000084) \cdot 57{,}295779 = 0{,}965912.$

Оскільки $\sin x = -(\sin x)''$, то

$\sin 15^{\circ} = -2(f(x_2, x_1, x_0) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(x_3, x_2, x_1, x_0))(\frac{180}{\pi})^2 = 2(0{,}00003517 + 5 \cdot 0{,}00000084) \cdot 3282{,}8063 = 0{,}257027.$

Формули чисельного диференціювання для рівновддалених вузлів

Формула чисельного диференціювання на основі *першої інтерполяційної формули Ньютона* має вигляд:

$$p_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$
$$+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{5!}\Delta^5 y_0$$
$$+ \cdots + q(q-1)\ldots(q-n+1)\frac{\Delta^n y_0}{n!},$$

де $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Розкриваємо дужки в многочлені

$$p_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \frac{q^5 - 10q^4 + 35q^3 - 50q^2 + 24q}{120}\Delta^5 y_0 \\ + \cdots$$

та диференціюємо

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = \frac{dp}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q - 1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 \right. \\ + \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 \\ \left. + \frac{5q^4 - 40q^3 + 105q^2 - 100q + 24}{120}\Delta^5 y_0 + \cdots \right),$$

$$\frac{d^2 p_n(x)}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (q - 1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{12}\Delta^4 y_0 \right. \\ \left. + \frac{2q^3 - 12q^2 + 21q - 10}{12}\Delta^5 y_0 + \cdots \right).$$

Формула чисельного диференціювання на основі *другої інтерполяційної формули Ньютона* має вигляд:

$$p_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \\ + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)}{5!}\Delta^5 y_0 \\ + \cdots + q(q+1)\ldots(q+n-1)\frac{\Delta^n y_0}{n!},$$

де $q = \frac{x - x_n}{h}$.

Розкриваємо дужки в многочлені

$$p_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q^2 + q}{2}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q^3 + 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_{n-3} +$$

$$+\frac{q^4+6q^3+11q^2+6q}{24}\Delta^4 y_{n-4}$$
$$+\frac{5q^4+40q^3+105q^2+100q+24}{120}\Delta^5 y_0+\cdots$$

та диференціюємо

$$\frac{dp_n(x)}{dx}=\frac{dp}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}=$$
$$=\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{2q+1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2+6q+2}{6}\Delta^3 y_0\right.$$
$$+\frac{2q^3+9q^2+11q+3}{12}\Delta^4 y_0$$
$$\left.+\frac{5q^4+40q^3+105q^2+100q+24}{120}\Delta^5 y_0+\cdots\right),$$
$$\frac{d^2p_n(x)}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0+(q+1)\Delta^3 y_0+\frac{6q^2+18q+11}{12}\Delta^4 y_0\right.$$
$$\left.+\frac{2q^3+12q^2+21q+10}{12}\Delta^5 y_0+\cdots\right).$$

Формула чисельного диференціювання на основі *першої інтерполяційної формули Гауса* має вигляд:

$$p_{2n}(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+$$
$$+\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}$$
$$+\cdots+\frac{(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}$$
$$+\frac{(q+n-1)\ldots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n},$$

де $q=\frac{x-x_0}{h}$ (для $x>x_0$).

Розкриваємо дужки й диференціюємо многочлен:

$$\frac{dp_n(x)}{dx}=\frac{1}{h}\left(\Delta y_0+\frac{2q-1}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{3q^2-1}{3!}\Delta^3 y_{-1}\right.$$
$$\left.+\frac{2q^3-3q^2-q+1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\cdots\right),$$
$$\frac{d^2p_n(x)}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1}+q\Delta^3 y_{-1}+\frac{6q^2-6q+1}{12}\Delta^4 y_{-2}+\cdots\right).$$

Формула чисельного диференціювання на основі *другої інтерполяційної формули Гауса* має вигляд:

$$p_{2n}(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} +$$
$$+\frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-3}$$
$$+ \cdots + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1}y_{-n}$$
$$+ \frac{(q+n)(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n},$$

де $q = \frac{x-x_0}{h}$ (для $x < x_0$).

Розкриваємо дужки і диференціюємо многочлен:

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = \frac{1}{h}\left(\Delta y_{-1} + \frac{2q+1}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{6}\Delta^3 y_{-2} \right.$$
$$\left. + \frac{2q^3+3q^2-q-1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \cdots \right),$$

$$\frac{d^2p_n(x)}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} + q\Delta^3 y_{-2} + \frac{6q^2-6q-1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \cdots \right).$$

Формула чисельного диференціювання на основі *інтерполяційної формули Стірлінга* має вигляд:

$$p_{2n}(x) = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}$$
$$+ \frac{q^2(q^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{5!}\cdot\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2}$$
$$+ \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \cdots$$
$$+ \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)\dots(q^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!}$$
$$\cdot\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n} + \Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2}$$
$$+ \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)\dots(q^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n},$$

де $q = \frac{x-x_0}{h}$.

Зазвичай цю формулу використовують, якщо $|q| \le 0{,}25$.

Розкриваємо дужки і диференціюємо многочлен:

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + q \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2 - 1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{2q^3 - q}{12}\Delta^4 y_{-2} + \cdots\right),$$

$$\frac{d^2 p_n(x)}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{-1} + q\,\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{6q^2 - 1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \cdots\right).$$

Формула чисельного диференціювання на основі *інтерполяційної формули Бесселя* має вигляд:

$$p_{2n}(x) = \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + (q - 0{,}5)\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{(q-0{,}5)q(q-1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \frac{(q-0{,}5)q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!} \cdot \Delta^5 y_{-2} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q+3)}{6!} \cdot \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \cdots + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2} + \frac{(q-0{,}5)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\ldots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n},$$

де $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Зазвичай цю формулу використовують, якщо $0{,}25 \le q \le 0{,}75$.

Розкриваємо дужки і диференціюємо многочлен:

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q - 1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{3q^2 - 3q + 0{,}5}{6} \cdot \Delta^3 y_{-1} + \frac{2q^3 - 3q^2 - q + 1}{12} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \cdots\right),$$

$$\frac{d^2 p_n(x)}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{2q - 1}{2}\,\Delta^3 y_{-1} + \frac{6q^2 - 6q - 1}{12} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \cdots\right).$$

Приклад. Функція $y = \sin x$ задана вузлами (табл. 5.3):

Таблиця 5.3

x	5° 7° 9° 11° 13° 15°
$\sin x$	0,087156 0,121869 0,156434 0,190809 0,224951 0,258819

Обчислити першу та другу похідні в точках 6°, 10°та 14°.

Розв'язок. Побудуємо таблицю різниць 5.4:

Таблиця 5.4

x	$\sin x$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
5°	0,087156				
		0,034713			
7°	0,121869		–0,000148		
		0,034565		–0,000042	
9°	0,156434		–0,000190		–0,000001
		0,034375		–0,000043	
11°	0,190809		–0,000233		0,000002
		0,034142		–0,000041	
13°	0,224951		–0,000274		
		0,033868			
15°	0,258819				

Для точки $x = 6^\circ$, яка розташована на початку проміжку, за x_0 візьмемо 5° і скористаємося формулами для першою інтерполяційної формули Ньютона. Тоді $q = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1}{2}$, а

$$\frac{dp_n(6^\circ)}{dx} = \frac{1}{2}\left(0{,}034713 + 0 + \frac{3(\frac{1}{2})^2 - 6\cdot\frac{1}{2} + 2}{6}\cdot(-0{,}000042)\right)\cdot\frac{180}{\pi}$$

$$= 0{,}99498,$$

$$\frac{d^2p_n(6^\circ)}{dx^2} = \frac{1}{2^2}\left(-0{,}000148 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)\cdot 0{,}000042\right)\cdot(\frac{180}{\pi})^2 = -0{,}138017.$$

Використання множників $\frac{180}{\pi}$ і $(\frac{180}{\pi})^2$ пов'язано з тим, що крок аргументу має градусну міру.

Для точки $x = 10^{\circ}$, яка рзташована всередині проміжку, за x_0 візьмемо 9°, обчислимо $q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1}{2}$. Тоді скористаємося формулами для інтерполяційної формули Беселя:

$$\frac{dp_n(10^{\circ})}{dx} = \frac{1}{2}\left(0{,}034375 + 0 + \frac{3(\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2}) + 0{,}5}{6} \cdot 0{,}000043\right) \cdot \frac{180}{\pi}$$
$$= 0{,}985219,$$

$$\frac{d^2p_n(10^{\circ})}{dx^2} = \frac{1}{2^2}\left(\frac{-0{,}000190 - 0{,}000233}{2} + 0\right) \cdot (\frac{180}{\pi})^2 = -0{,}173754.$$

Для точки $x = 14^{\circ}$, яка розташована наприкінці проміжку, за x_0 візьмемо 15° і скористаємося формулами для другої інтерполяційної формули Гауса. Тоді $q = \frac{x - x_0}{h} = -\frac{1}{2}$, а

$$\frac{dp_n(15^{\circ})}{dx} = \frac{1}{2}\left(0{,}033868 + 0 + \frac{3 \cdot (-\frac{1}{2})^2 - 1}{6}(-0{,}000041)\right) \cdot \frac{180}{\pi}$$
$$= 0{,}970787,$$
$$\frac{d^2p_n(15^{\circ})}{dx^2} = \frac{1}{2^2}\left(-0{,}000274 - \frac{1}{2} \cdot (-0{,}000041)\right) \cdot (\frac{180}{\pi})^2 = -0{,}208258.$$

Формули чисельного диференціювання без використання різниць

Деколи зручно формули чисельного диференціювання виражати не через різниці, а безпосередньо через значення функцій. Наведемо готові вирази, що отримані з формули Лагранжа для рівновіддалених вузлів, щодо похідних першого порядка при різних значеннях n.

Якщо $n = 2$ (три точки):

$$y_0' = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3}f'''(\zeta),$$
$$y_1' = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0) - \frac{h^2}{6}f'''(\zeta),$$
$$y_2' = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^2}{3}f'''(\zeta).$$

Якщо $n = 3$ (чотири точки):

$$y_0' = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} f^{(\mathrm{IV})}(\zeta),$$

$$y_1' = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} f^{(\mathrm{IV})}(\zeta),$$

$$y_2' = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12} f^{(\mathrm{IV})}(\zeta),$$

$$y_3' = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} f^{(\mathrm{IV})}(\zeta).$$

Якщо $n = 4$ (п’ять точок):

$$y_0' = \frac{1}{12h}(-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) - \frac{h^4}{5} f^{(\mathrm{V})}(\zeta),$$

$$y_1' = \frac{1}{12h}(-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) + \frac{h^4}{20} f^{(\mathrm{V})}(\zeta),$$

$$y_2' = \frac{1}{12h}(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + \frac{h^4}{30} f^{(\mathrm{V})}(\zeta),$$

$$y_3' = \frac{1}{12h}(-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) + \frac{h^4}{20} f^{(\mathrm{V})}(\zeta),$$

$$y_4' = \frac{1}{12h}(3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) + \frac{h^4}{5} f^{(\mathrm{V})}(\zeta).$$

Якщо $n = 5$ (шість точок):

$$y_0' = \frac{1}{60h}(-137y_0 + 300y_1 - 300y_2 + 200y_3 - 75y_4 + 12y_5) - \frac{h^5}{6} f^{(\mathrm{VI})}(\zeta),$$

$$y_1' = \frac{1}{60h}(-12y_0 - 65y_1 + 120y_2 - 60y_3 + 20y_4 - 3y_5) + \frac{h^5}{30} f^{(\mathrm{VI})}(\zeta),$$

$$y_2' = \frac{1}{60h}(3y_0 - 30y_1 - 20y_2 + 60y_3 - 15y_4 + 2y_5) - \frac{h^5}{60} f^{(\mathrm{VI})}(\zeta),$$

$$y_3' = \frac{1}{60h}(-2y_0 + 15y_1 - 60y_2 + 20y_3 + 30y_4 - 3y_5) + \frac{h^5}{60} f^{(\mathrm{VI})}(\zeta),$$

$$y_4' = \frac{1}{60h}(3y_0 - 20y_1 + 60y_2 - 120y_3 + 65y_4 + 12y_5) - \frac{h^5}{30} f^{(\mathrm{VI})}(\zeta),$$

$$y_5' = \frac{1}{60h}(-12y_0 + 75y_1 - 200y_2 + 300y_3 - 300y_4 + 137y_5) + \frac{h^5}{6} f^{(\mathrm{VI})}(\zeta).$$

Якщо $n = 6$ (сім точок):

$$y_0' = \frac{1}{60h}(-147y_0 + 360y_1 - 450y_2 + 400y_3 - 225y_4 + 72y_5 - 10y_6) + \frac{h^6}{7} f^{(\mathrm{VII})}(\zeta),$$

$$y_1' = \frac{1}{60h}(-10y_0 - 77y_1 + 150y_2 - 100y_3 + 50y_4 - 15y_5 + 2y_6) - \frac{h^6}{42} f^{(\mathrm{VII})}(\zeta),$$

$$y_2' = \frac{1}{60h}(2y_0 - 24y_1 - 35y_2 + 80y_3 - 30y_4 + 8y_5 - y_6) + \frac{h^6}{105} f^{(\mathrm{VII})}(\zeta),$$

$$y_3' = \frac{1}{60h}(-y_0 + 9y_1 - 45y_2 + 45y_4 - 9y_5 + y_6) - \frac{h^6}{140} f^{(\mathrm{VII})}(\zeta),$$

$$y_4' = \frac{1}{60h}(y_0 - 8y_1 + 30y_2 - 80y_3 + 35y_4 + 24y_5 - 2y_6) + \frac{h^6}{105} f^{(\mathrm{VII})}(\zeta),$$

$$y_5' = \frac{1}{60h}(-2y_0 + 15y_1 - 50y_2 + 100y_3 - 150y_4 + 77y_5 + 10y_6) - \frac{h^6}{42} f^{(\mathrm{VII})}(\zeta),$$

$$y_6' = \frac{1}{60h}(10y_0 - 72y_1 + 225y_2 - 400y_3 + 450y_4 - 360y_5 + 147y_6) + \frac{h^6}{7} f^{(\mathrm{VII})}(\zeta).$$

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть умови доцільності використання чисельного диференціювання.
2. Наведіть формули чисельного диференціювання для нерівновіддалених вузлів.
3. Наведіть формули чисельного диференціювання на основі першої інтерполяційної формули Ньютона.
4. Наведіть формули чисельного диференціювання на основі другої інтерполяційної формули Ньютона.
5. Наведіть формули чисельного диференціювання на основі першої інтерполяційної формули Гауса.
6. Наведіть формули чисельного диференціювання на основі другої інтерполяційної формули Гауса.

7. Наведіть формули чисельного диференціювання на основі інтерполяційної формули Стірлінга.

8. Наведіть формули чисельного диференціювання на основі інтерполяційної формули Беселя.

Задачі для самостійного розв'язування

5.1. Функція $y = \sin x$ задана вузлами (табл. 5.5):

Таблиця 5.5

x	5° 7° 9° 11° 13° 15°
$\sin x$	0,087156 0,121869 0,156434 0,190809 0,224951 0,258819

Обчислити першу та другу похідні в точках $6^\circ 30'$, $10^\circ 30'$ та $14^\circ 30'$ за інтерполяційними формулами Ньютона, Гауса, Стірлінга і Беселя.

5.2. Функція $y = \lg x$ задана вузлами (табл. 5.6):

Таблиця 5.6

x	340 350 360 370
$\lg x$	2,5314789 2,5440680 2,5563025 2,5682017

Обчислити першу та другу похідні в точці 355.

5.3. Функція $y = \mathrm{arctg} x$ задана вузлами (табл. 5.7):

Таблиця 5.7

x	0,176327 0,267949 0,363970 0,466308
$\mathrm{arctg} x$	10° 15° 20° 25°

Обчислити першу та другу похідні в точці 0,3.

5.4. Функція $y = f(x)$ задана вузлами (табл. 5.8):

Таблиця 5.8

x	20 22 24 26 28 30

$f(x)$	0,2293149 0,2300167 0,2307190 0,2314220 0,2321255 0,0,2328296

Обчислити першу та другу похідні в точках 21 і 29.

6. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Задачі, які потребують обчислення інтегралів, виникають майже в усіх областях прикладної математики. Інколи вдається знайти аналітичну формулу результату, після чого залишається обчислити значення визначеного інтеграла за формулою Ньютона – Лейбниця:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Але в багатьох випадках немає змоги знайти аналітичну формулу або вона виходить настільки складною, що обчислення інтеграла за її допомогою складніше, ніж за допомогою інших формул. У таких випадках є сенс звертатися до методів чисельного інтегрування.

Формули прямокутників

З курсу математичного аналізу пам’ятаємо, що визначений інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції, яка розташована під графіком функції $y = f(x)$ у межах проміжку $[a; b]$ (рис. 6.1).

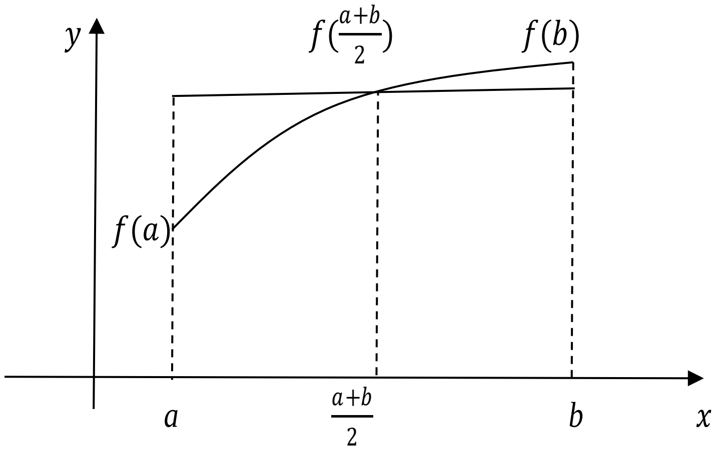

Рис. 6.1. Геометрична інтерпретація формули прямокутників

Якщо відрізок інтегрування поділити навпіл точкою $x = \frac{a+b}{2}$ та обчислити значення підінтегральної функції в цій точці $y = f(\frac{a+b}{2})$, то, побудувавши на проміжку$[a; b]$ прямокутник висотою $f(\frac{a+b}{2})$, можемо його площу наближено розглядати як площу криволінійної трапеції, тобто

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{\text{пр}} = f(\frac{a+b}{2}) \cdot (b-a),$$

а з урахуванням залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2}) \cdot (b-a) + R(x),$$

де

$$R(x) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\zeta),$$
$$a \leq \zeta \leq b.$$

Якщо проміжок $[a; b]$ розбити на n рівних відрізків $[a; x_1], [x_1; x_2], [x_2; x_3], \dots, [x_{n-1}; b]$ довжиною $h = \frac{b-a}{n}$, то на цих проміжках можна побудувати прямокутники, площі яких обчислюються за формулами:

$$S_1 = f(\frac{a+x_1}{2}) \cdot h;\ S_2 = f(\frac{x_1+x_2}{2}) \cdot h; \dots;\ S_n = f(\frac{x_{n-1}+b}{2}) \cdot h.$$

Тоді *формула середніх прямокутників* матиме вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + ih + \frac{h}{2}\right)$$

із залишковим членом

$$R(x) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot f''(\zeta),$$
$$a \leq \zeta \leq b.$$

Якщо виконати аналогічні дії на проміжках, але за висоту прямокутника вибрати відрізок довжиною, яка дорівнює значенню функції в лівій границі проміжку, то отримаємо *формулу лівих прямокутників*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih)$$

із залишковим членом

$$R(x) = \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot f'(\zeta),$$

$$a \le \zeta \le b.$$

Якщо виконати аналогічні дії на проміжках, але за висоту прямокутника вибрати відрізок довжиною, яка дорівнює значенню функції у правій границі проміжку, то отримаємо *формулу правих прямокутників*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$$

із залишковим членом

$$R(x) = -\frac{(b-a)^2}{2n} \cdot f'(\zeta),$$

$$a \le \zeta \le b.$$

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int_{1,2}^{2} \frac{\sqrt{0,7x^2+1}dx}{1,6x+\sqrt{x^2+0,5}},$$

використовуючи формули прямокутників для 10 інтервалів.

Розв'язок. У наведеному інтегралі $a = 1,2, b = 2$. Тоді

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1,2}{10} = 0,08.$$

Обчислимо значення підінтегральної функції у вузлових точках:

$$f(1,2) = 0,427742;\ f(1,28) = 0,417404;\ f(1,36) = 0,408439;$$

$$f(1,44) = 0,400623;\ f(1,52) = 0,393776;\ f(1,60) = 0,387751;$$

$$f(1,68) = 0,382424;\ f(1,76) = 0,377695;$$

$$f(1,84) = 0,373482;\ f(1,92) = 0,369713;\ f(2) = 0,36633.$$

Знайдемо значення інтеграла за формулою лівих прямокутників

$$\int_{1,2}^{2} \frac{\sqrt{0,7x^2+1}dx}{1,6x+\sqrt{x^2+0,5}}$$

$$= 0,08\big(f(1,2) + f(1,28) + f(1,36) + f(1,44) + f(1,52)$$

$$+ f(1,60) + f(1,68) + f(1,76) + f(1,84) + f(1,92)\big)$$

$$= 0,08 \cdot 3,939049 = 0,31512392.$$

Знайдемо значення інтеграла за формулою правих прямокутників

$$\int_{1,2}^{2} \frac{\sqrt{0,7x^2+1}dx}{1,6x+\sqrt{x^2+0,5}}$$

$$= 0,08\big(f(1,28) + f(1,36) + f(1,44) + f(1,52) + f(1,60)$$

$$+ f(1,68) + f(1,76) + f(1,84) + f(1,92) + f(2)\big)$$

$$= 0,08 \cdot 3,877673 = 0,31021384.$$

Отримані результати відрізняються сотими долями. Кінцевий результат можна отримати з півсуми значень інтегралів

$$\int_{1,2}^{2} \frac{\sqrt{0,7x^2+1}dx}{1,6x+\sqrt{x^2+0,5}} = \frac{0,31512392+0,31021384}{2} \approx 0,313.$$

Для роботи з формулою середніх прямокутників треба обчислити значення підінтегральної функції в середніх точках проміжків:

$$f(1,26) = 0,41985;\ f(1,32) = 0,412765;\ f(1,40) = 0,404399;$$
$$f(1,48) = 0,397089;\ f(1,56) = 0,390669;\ f(1,64) = 0,385006;$$
$$f(1,72) = 0,37999;\ f(1,80) = 0,375529;$$
$$f(1,88) = 0,371546;\ f(1,96) = 0,367976.$$

Знайдемо значення інтеграла за формулою середніх прямокутників

$$\int_{1,2}^{2} \frac{\sqrt{0,7x^2+1}dx}{1,6x+\sqrt{x^2+0,5}} =$$
$$= 0,08\big(f(1,26)+f(1,32)+f(1,40)+f(1,48)+f(1,56)+f(1,64) + f(1,72)+f(1,80)+f(1,88)+f(1,96)\big) = 0,08\cdot 3,904819 \approx 0,312.$$

Як бачимо, результати до сотих співпадають.

Формула трапецій

Знову розглянемо криволінійну трапецію, яка розташована під графіком функції $y = f(x)$ у межах проміжку $[a; b]$.

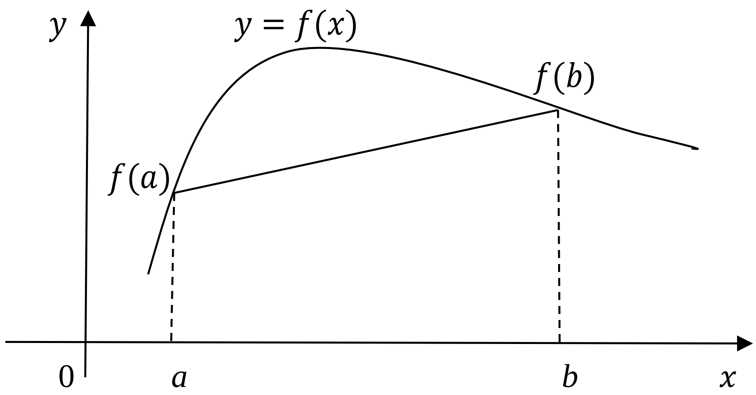

Рис. 6.2. Геометрична інтерпретація формули трапецій

Якщо з’єднати точки з координатами $(a, f(a))$ та $(b, f(b))$ прямою лінією (рис. 6.2), то отримаємо прямолінійну трапецію, площа якої обчислюється за формулою

$$S_{\text{тр}} = \frac{f(a)\ + f(b)}{2} \cdot (b - a).$$

Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{\text{тр}} = \frac{f(a)\ + f(b)}{2} \cdot (b - a),$$

а з урахуванням залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)\ + f(b)}{2} \cdot (b - a) + R(x),$$

де

$$R(x) = -\frac{(b - a)^3}{12} \cdot f''(\zeta),$$
$$a \le \zeta \le b.$$

Похибка формули трапецій зазвичай буває дуже велика. Цю похибку можна значно знизити, якщо застосувати формулу трапецій не відразу до всього відрізку $[a; b]$, а розбити його спочатку на частини і до кожної частини окремо застосувати формулу трапецій. Якщо розбити проміжок $[a; b]$ на n рівних відрізків $[a; x_1], [x_1; x_2], [x_2; x_3], \dots, [x_{n-1}; b]$ довжиною $h = \frac{b-a}{n}$, то на цих проміжках будуються прямолінійні трапеції, площі яких обчислюються за формулами:

$$S_1 = \frac{f(a)\ + f(x_1)}{2} \cdot h;$$

$$S_2 = \frac{f(x_1)\ + f(x_2)}{2} \cdot h;$$

...

$$S_n = \frac{f(x_{n-1})\ + f(b)}{2} \cdot h.$$

Тоді узагальнена формула трапецій матиме вигляд

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = h \cdot (\frac{f(a)\ + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih))$$

із залишковим членом

$$R(x) = -\frac{h^3}{12} \cdot (f''(\zeta_1) + f''(\zeta_2) + \dots + f''(\zeta_n)),$$

де $x_{i-1} \le \zeta_i \le x_i, i = 1, 2, \dots, n$, або

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot (\frac{f(a) \ + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(\zeta),$$

де $a \le \zeta \le b$.

Формула Сімпсона

Якщо в дослідженні формули трапецій ми фактично підінтегральну функцію $f(x)$ інтерполювали лінійною функцією, то в цьому пункті будемо інтерполювати квадратичною параболою, що зобразимо на рис. 6.3.

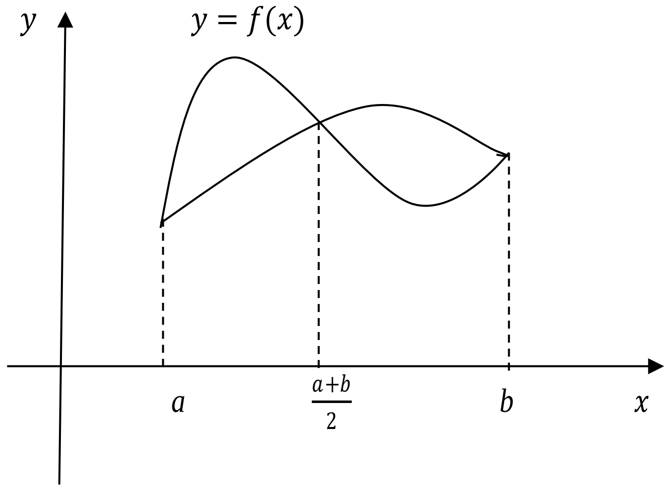

Рис. 6.3. Геометрична інтерпретація формули Сімпсона

За формулою Лагранжа для рівновіддалених вузлів рівняння параболи матиме вигляд

$$P(x) = \frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)} \cdot f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \\ + \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)} \cdot f(b).$$

Інтегрування цього многочлена дає такий результат:

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Тоді початковий інтеграл запишеться:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)+R(x),$$

де

$$R(x) = -\frac{(b-a)^5}{2^5}\cdot\frac{f^{(\mathrm{IV})}(\zeta)}{90},$$
$$a \le \zeta \le b.$$

Отримано формулу Сімпсона, яку є сенс застосовувати не відразу до всього проміжку $[a;b]$, а спочатку розбити його на частини і до кожної частини окремо застосувати її. Якщо відрізок $[a;b]$ розбити на $2n$ рівних проміжків (оскільки для побудови многочлена другого порядку потрібно мати на кожному частковому відрізку три точки), то узагальнена формула Сімпсона матиме вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx =$$
$$\frac{h}{3}\cdot\Big(f(a)+4\big(f(a+h)+f(a+3h)+\dots+f(a+(2n-1)\cdot h)\big)$$
$$+2\big(f(a+2h)+f(a+4h)+\dots+f(a+(2n-2)\cdot h)\big)$$
$$+f(b)\Big)-\frac{(b-a)^5}{2^5}\cdot\frac{f^{(\mathrm{IV})}(\zeta)}{90n^4},$$

де

$$h=\frac{b-a}{2n}, a \le \zeta \le b.$$

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

за узагальненою формулою трапецій та узагальненою формулою Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 проміжків.

Розв’язок. Наведений інтеграл можна обчислити аналітично:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\,\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} = 0{,}78539816,$$

що дасть змогу оцінити отримані результати.

Обчислимо значення підінтегральної функції у вузлових точках:

$$f(0)=1;\ f(0{,}1)=0{,}99009900;\ f(0{,}2)=0{,}96158846;$$
$$f(0{,}3)=0{,}91743119;\ f(0{,}4)=0{,}86206896;\ f(0{,}5)=0{,}8;$$
$$f(0{,}6)=0{,}73529411;\ f(0{,}7)=0{,}67114093;$$

$$f(0{,}8) = 0{,}60975609;\ f(0{,}9) = 0{,}55248618;\ f(1) = 0{,}5.$$

Скористаємося узагальненою формулою трапецій:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx h \cdot \left(\frac{f(a)\ + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right) =$$

$$0{,}1 \cdot \left(\frac{1\ +0{,}5}{2} + 0{,}99009900 + 0{,}96158846 + 0{,}91743119 + 0{,}86206896 + 0{,}8 + 0{,}73529411 + 0{,}67114093 + 0{,}60975609 + 0{,}55248618 \right) = 0{,}78498149.$$

Скористаємося узагальненою формулою Сімпсона:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx$$

$$\frac{h}{3} \cdot \Big(f(a) + 4\big(f(a+h) + f(a+3h) + \cdots + f(a+(2n-1)\cdot h)\big) + 2\big(f(a+2h) + f(a+4h) + \cdots + f(a+(2n-2)\cdot h)\big) + f(b) \Big)$$

$$= \frac{0{,}1}{3} \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}99009900 + 2 \cdot 0{,}96158846 + 4 \cdot 0{,}9174311$$

$$+2 \cdot 0{,}86206896 + 4 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}73529411 + 4 \cdot 0{,}67114093 +$$

$$+2 \cdot 0{,}60975609 + 4 \cdot 0{,}55248618 + 0{,}5) = 0{,}78539818.$$

Порівнявши результати бачимо, що формула Сімпсона забезпечує точніший розрахунок.

Формула чисельного інтегрування Гауса

Якщо в попередніх пунктах розглядалась задача інтегрування функції, що задана рівновіддаленими вузлами, то в цьому пункті розглядається випадок, коли наперед задається кількість проміжків, але вибирається місце розташування кінців цих інтервалів. Для зручності межі інтегрування $[a;b]$ змінимо на проміжок $[-1;1]$ шляхом введення нової змінної

$$t = \frac{2x-(a+b)}{b-a},$$

звідки

$$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(a+b).$$

Тоді інтеграл матиме вигляд

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 \varphi(t)dt,$$

де $\varphi(t) = \frac{1}{2}(b-a)\cdot f\left(\frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(a+b)\right)$.

Розглянемо роботу методу на прикладі випадку, коли підінтегральна функція замінюється на лінійною

$$y = s_1 + s_2 \cdot t,$$

для якої виконується рівняння

$$\int_{-1}^1 (s_1 + s_2 \cdot t)dt = \int_{-1}^1 \varphi(t)dt.$$

Це означає, що площа під підінтегральною функцією має дорівнювати площі під прямою, що наведено на рис. 6.4.

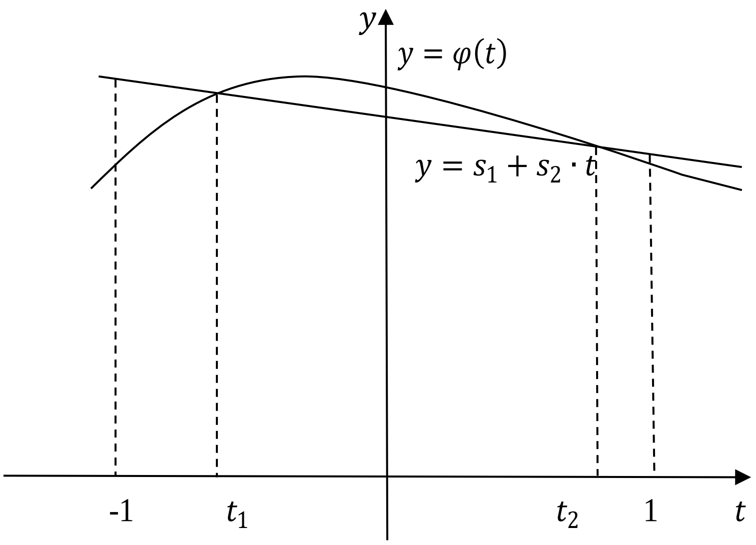

Рис. 6.4. Геометрична інтерпретація формули Гауса

Покладемо, що шуканий інтеграл можна виразити таким чином:

$$\int_{-1}^1 \varphi(t)dt = C_1 \cdot \varphi(t_1) + C_2 \cdot \varphi(t_2),$$

де C_1, C_2, t_1, t_2 – невідомі. Оскільки маємо чотири невідомі, то можна припустити, що $y = \varphi(t)$ є кубічною функцією:

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,$$

яку можна переписати

$$\varphi(t) = s_1 + s_2 \cdot t + (t - t_1)(t - t_2)(b_0 + b_1 \cdot t).$$

Якщо s_1 та s_2 мають відповідати умові

$$\int_{-1}^{1}(s_1 + s_2 \cdot t)dt = \int_{-1}^{1}\varphi(t)dt,$$

то

$$\int_{-1}^{1}(t - t_1)(t - t_2)(b_0 + b_1 \cdot t)dt = 0$$

або

$$\int_{-1}^{1}(b_0(t - t_1)(t - t_2) + b_1 t(t - t_1)(t - t_2))dt = 0.$$

Оскільки ця рівність має виконуватися за всіх значень b_0 та b_1, мають виконуватися умови:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1}(t - t_1)(t - t_2)dt = 0, \\ \int_{-1}^{1}t(t - t_1)(t - t_2)dt = 0. \end{cases}$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} + 2t_1 t_2 = 0, \\ t_1 + t_2 = 0. \end{cases}$$

Тобто

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Для пошуку C_1 та C_2 скористаємося таким перетворенням:

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt = \int_{-1}^{1}(s_1 + s_2 \cdot t)dt = (s_1 \cdot t + s_2 \cdot t^2)\Big|_{-1}^{1} = 2s_1.$$

Оскільки $\varphi(t_1) = s_1 + s_2 \cdot t_1$, а $\varphi(t_2) = s_1 + s_2 \cdot t_2$ (див. рис. 6.4), то

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt = C_1 \cdot \varphi(t_1) + C_2 \cdot \varphi(t_2) = C_1 \cdot (s_1 + s_2 \cdot t_1) + C_2 \cdot (s_1 + s_2 \cdot t_2)$$

$$== s_1 \cdot (C_1 + C_2) + s_2 \cdot (C_1 \cdot t_1 + C_2 \cdot t_2) =$$

$$= s_1 \cdot (C_1 + C_2) + \frac{s_2}{\sqrt{3}} \cdot (C_2 - C_1).$$

З іншого боку

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt = 2s_1.$$

Тоді, прирівнявши коефіцієнти близько s_1 та s_2, матимемо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_2 - C_1 = 0, \end{cases}$$

$$C_2 = C_1 = 1,$$

а результат інтегрування:

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt = \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Узагальнена формула Гауса має такий вигляд:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a) \cdot \left(C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \cdots + C_n f(x_n)\right)$$

ыз залишковим членом

$$R_n(x) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{\left((2n)!\right)^3 (2n+1)} \cdot f^{(2n)}(\zeta),$$

де

$$x_i = \frac{1}{2}(b-a)t_i + \frac{1}{2}(a+b), i = 1, 2, \dots, n.$$

Значення t_i та C_i для різних значень n наведені в табл. 6.1:

Таблиця 6.1

n	t_i	C_i	R_n
1	$t_1 = 0$	$C_1 = 2$	$R_1 = \frac{1}{3} \cdot f''(\zeta)$
2	$t_1 = -0{,}577350$ $t_2 = 0{,}577350$	$C_1 = 1$ $C_2 = 1$	$R_2 = \frac{1}{135} \cdot f^{IV}(\zeta)$
3	$t_1 = -0{,}774597$ $t_2 = 0{,}774597$ $t_3 = 0$	$C_1 = 0{,}555556$ $C_2 = 0{,}888889$ $C_3 = 0{,}555556$	$R_3 = \frac{1}{15750} \cdot f^{VI}(\zeta)$
4	$t_1 = -0{,}861136$ $t_2 = -0{,}339981$ $t_3 = 0{,}339981$ $t_4 = 0{,}861136$	$C_1 = 0{,}347855$ $C_2 = 0{,}652145$ $C_3 = 0{,}652145$ $C_4 = 0{,}347855$	$R_4 = \frac{1}{3472875} \cdot f^{VIII}(\zeta)$
5	$t_1 = -0{,}90618$ $t_2 = -0{,}538469$ $t_3 = 0$ $t_4 = 0{,}538469$ $t_5 = 0{,}90618$	$C_1 = 0{,}23693$ $C_2 = 0{,}47863$ $C_3 = 0{,}56889$ $C_4 = 0{,}47863$ $C_5 = 0{,}23693$	$R_5 = \frac{1}{1237732650} \cdot f^{X}(\zeta)$

З таблиці видно, що значення t_i та C_i досить громіздкі. Тому формули Гауса є сенс використовувати в тих випадках, коли маємо потребу у високій точності, а значення функції за великої кількості аргументів отримати складно.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int_{1,6}^{2,7} \frac{x+0,8}{\sqrt{x^2+1,2}}dx$$

за формулами Гауса для $n = 4$ та $n = 5$.

Розв'язок. Для наведеного інтеграла

$$x_i = \frac{1}{2}(b-a)t_i + \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(2,7-1,6)t_i + \frac{1}{2}(1,6+2,7) =$$
$$= 0,55t_i + 2,15.$$

Значення t_i та C_i для різних значень n беремо з таблиці. Якщо $n = 4$, маємо табл. 6.2:

Таблиця 6.2

t_i	C_i	x_i	$f(x_i)$
$t_1 = -0,861136$	$C_1 = 0,347855$	$x_1 = 1,676375$	$f(x_1) = 1,236607$
$t_2 = -0,339981$	$C_2 = 0,652145$	$x_2 = 1,96301$	$f(x_2) = 1,229109$
$t_3 = 0,339981$	$C_3 = 0,652145$	$x_3 = 2,33699$	$f(x_3) = 1,21542$
$t_4 = 0,861136$	$C_4 = 0,347855$	$x_4 = 2,623625$	$f(x_4) = 1,204173$

Отримані значення підставляємо у формулу Гауса:

$$\int_{1,6}^{2,7} \frac{x+0,8}{\sqrt{x^2+1,2}}dx \approx$$
$$\approx \frac{2,7-1,6}{2} \cdot (0,347855 \cdot 1,236607 + 0,652145 \cdot 1,229109 + 0,652145$$
$$\cdot 1,21542 + 0,347855 \cdot 1,204173) = 0,55 \cdot 2,4432248916$$
$$= 1,3437736904$$

Якщо $n = 5$, маємо табл. 6.3:

Таблиця 6.3

t_i	C_i	x_i	$f(x_i)$
$t_1 = -0,90618$	$C_1 = 0,23693$	$x_1 = 1,651601$	$f(x_1) = 1,237018$
$t_2 = -0,538469$	$C_2 = 0,47863$	$x_2 = 1,853842$	$f(x_2) = 1,23245$
$t_3 = 0$	$C_3 = 0,56889$	$x_3 = 2,15$	$f(x_3) = 1,222552$
$t_4 = 0,538469$	$C_4 = 0,47863$	$x_4 = 2,446158$	$f(x_4) = 1,211144$
$t_5 = 0,90618$	$C_5 = 0,23693$	$x_5 = 2,648399$	$f(x_5) = 1,203205$

Отримані значення підставляємо у формулу Гауса:

$$\int_{1,6}^{2,7} \frac{x+0,8}{\sqrt{x^2+1,2}}dx \approx$$

$$\approx \frac{2,7-1,6}{2} \cdot (0,23693 \cdot 1,237018 + 0,47863 \cdot 1,23245 + 0,56889 \cdot 1,222552 + 0,47863 \cdot 1,211144 + 0,23693 \cdot 1,203205) = 0,55 \cdot 2,4432370389 = 1,3437803714$$

Розрахунки забезпечили співпадіння результатів до четвертого знаку після коми. Отже,

$$\int_{1,6}^{2,7} \frac{x+0,8}{\sqrt{x^2+1,2}}dx \approx 1,3438.$$

Екстраполяція за Річардсоном

Нехай I_{n_1} та I_{n_2} є двома наближеними значеннями інтеграла, що знайдені за однією формулою з n_1 та n_2 ($n_2 > n_1$). Тоді точніше значення інтеграла можна отримати за формулою

$$I_{n_1,n_2} = I_{n_2} + \frac{n_1^m}{n_2^m - n_1^m}\left(I_{n_2} - I_{n_1}\right),$$

де m – порядок залишкового члена формули інтегрування (для формули трапецій m =2, для формули Сімпсона m =4)

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

за узагальненою формулою трапецій, поділивши відрізок інтегрування на 5 проміжків. Уточнити результат за екстраполяцією Річардсона, використавши розрахунки для 10 проміжків.

Розв’язок. Наведений інтеграл вже був досліджений вище для випадку з десятьма проміжками. Розглянемо вузли, які будуть використані в наближеному обчисленні інтеграла для 5 проміжків:

$$f(0) = 1;\ f(0,2) = 0,96158846;\ f(0,4) = 0,86206896;$$
$$f(0,6) = 0,73529411;\ f(0,8) = 0,60975609;\ f(1) = 0,5.$$

Скористаємося узагальненою формулою трапецій:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx h \cdot \left(\frac{f(a)\ + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right) =$$

$$0{,}2\cdot\left(\frac{1\ +0{,}5}{2}+0{,}96158846+0{,}86206896+0{,}73529411\right.$$
$$\left.+\,0{,}60975609\right)=0{,}78374152.$$

Отже, $I_5 = 0{,}78374152.$

З попереднього прикладу маємо $I_{10} = 0{,}78498149.$

Уточнене значення інтеграла обчислюємо за формулою екстраполяції Річардсона:

$$I_{5,10} = I_{10}+\frac{5^2}{10^2-5^2}(I_{10}-I_5)=$$
$$=0{,}78498149+\frac{1}{3}(0{,}78498149-0{,}78374152)=0{,}78539481.$$

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть умови доцільності використання чисельного інтегрування.
2. Наведіть формули лівих прямокутників чисельного інтегрування.
3. Наведіть формули правих прямокутників чисельного інтегрування.
4. Наведіть формули середніх прямокутників чисельного інтегрування.
5. Наведіть формули трапецій чисельного інтегрування.
6. Наведіть формули Сімпсона чисельного інтегрування.
7. Наведіть формули Гауса чисельного інтегрування.
8. Порівняйте умови застосування формул прямокутників, трапецій, Сімпсона, Гауса.
9. Наведіть формулу екстраполяція за Річардсоном чисельного інтегрування.

Задачі для самостійного розв'язування

6.1. Обчислити інтеграл

$$\int_{0,8}^{1,6}\frac{\sqrt{2x+1{,}6}dx}{1{,}8+\sqrt{0{,}3x^2+2{,}3}},$$

використовуючи формули прямокутників для 10 інтервалів. Результати порівняти.

6.2. Обчислити інтеграл

$$\int_{0,32}^{0,66} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2,3}}$$

за узагальненою формулою трапецій з точністю до трьох знаків.

6.3. Обчислити інтеграл

$$\int_{1,6}^{3,2} \frac{x}{2} \lg(\frac{x^2}{2}) dx$$

за узагальненою формулою Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 8 проміжків.

6.4. Обчислити інтеграл

$$\int_{0,4}^{1,7} \frac{x + 2,2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

за формулами Гауса для $n = 4$ та $n = 5$.

6.5. Обчислити інтеграл

$$\int_{3}^{6} \sqrt{x^2 + 1}\, dx$$

за узагальненою формулою трапецій, поділивши відрізок інтегрування на 3 проміжки. Уточнити результат за екстраполяцією Річардсона, використавши розрахунки для 6 проміжків.

7. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Методи розв'язування нелінійних рівнянь з однією змінною поділяються на точні та ітераційні.

Розглянемо ітераційні методи розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих порядків і трансцендентних рівнянь, загальний вигляд яких є

$$f(x) = 0.$$

Під час пошуку наближених значень коренів таких рівнянь розв'язуються дві задачі:

1) відокремлення коренів, тобто пошук достатньо малих проміжків, кожний з яких містить один і тільки один корінь рівняння;
2) обчислення коренів із заданою точністю.

Треба зазначити суттєву перевагу ітераційних методів розв'язування нелінійних рівнянь. З їх застосуванням не відбувається накопичення похибки, а загальна похибка округлення дорівнює похибці, що виникла на останній ітерації.

Відокремлення коренів рівняння

Для розв'язування рівняння $f(x) = 0$ насамперед важливо дослідити розташування коренів і заключити кожен корінь у достатньо малий проміжок, де відсутні інші корені. Для цієї мети зручно використовувати графічні методи.

Для пошуку грубих значень коренів можна побудувати графік функції $y = f(x)$ і знайти абсциси точок перетину графіка з віссю OX.

Іноді зручно спочатку представити рівняння у вигляді $\varphi(x) = \rho(x)$, а потім побудувати графіки функцій $y = \varphi(x)$ та $y = \rho(x)$, знайти абсциси їх точок перетину, які і будуть наближеними значеннями коренів.

Для виділення інтервалів, у яких знаходяться дійсні корені рівняння $f(x) = 0$, для неперервної функції $y = f(x)$ можна скористатися такими твердженнями.

Якщо на кінцях деякого проміжку неперервна функція має значення різних знаків, то на цьому інтервалі рівняння $f(x) = 0$ має хоча б один корінь.

Якщо при цьому $y = f(x)$ має першу похідну, що не змінює знак, то корінь єдиний.

Нехай $y = f(x)$ є аналітичною функцією змінної x на проміжку; якщо на кінцях проміжку вона має значення різних знаків, то проміжок містить непарну кількість коренів; якщо на кінцях проміжку вона має значення однакових знаків, то проміжок не містить коренів або їх кількість парна.

Приклад. Відокремити корені аналітично в рівнянні

$$\operatorname{arctg}(x-1) + 2x - 3 = 0.$$

Розв'язок. Нехай $f(x) = \operatorname{arctg}(x-1) + 2x - 3$. Її похідна –

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} + 2,$$

а корені похідної відсутні, оскільки похідна додатна на всій числовій осі. Отже, функція зростає на всій області визначення і має єдиний корінь.

Обчислимо значення функції в таких точках: $f(1) = -1$; $f(2) = \frac{\pi}{4} + 1$. Оскільки значення функції мають різні знаки, то корінь рівняння належить проміжку $[1; 2]$.

Далі розглядатимемо числові методи обчислення коренів із заданою точністю.

Метод послідовних наближень

У разі застосування методу послідовних наближень потрібно рівняння привести до вигляду $x = f(x)$, а потім, увівши початкове значення x_0, обчислити послідовність значень

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}).$$

Процес обчислень завершується з виконанням умови щодо точності. Центральне питання методу – чи буде збіжним ітераційний процес?

Розглянемо геометричне дослідження процесу.

Нехай для неперервної функції $y = f(x)$ виконується умова $0 < f'(x) < 1$. Тоді схематично геометричне дослідження процесу наведено на рис. 7.1.

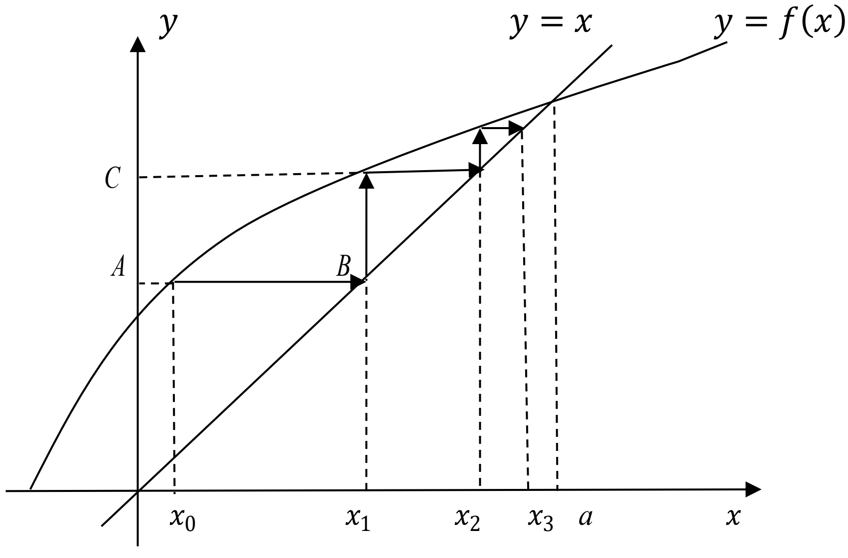

Рис. 7.1. Метод послідовних наближень за умови $0 < f'(x) < 1$

Для розв'язування перетвореного рівняння відшуковується точка перетину кривої $y = f(x)$ та прямої $y = x$, тобто абсциса точки перетину a, яка є коренем рівняння.

Щоб досягти цієї точки, позначимо початкове значення розв'язку – абсцису x_0, з якої проводимо вертикаль до перетину з кривою $y = f(x)$, де $f(x_0)$ – ордината точки A, з іншого боку $x_1 = f(x_0)$, яке можна отримати, провівши з точки A горизонталь до перетину з прямою $y = x$ (точка B). Опустивши з точки B перпендикуляр до осі абсцис, матимемо на ній точку x_1. Далі вчиняємо аналогічно щодо точки x_1. З неї проводимо вертикаль до перетину з кривою $y = f(x)$, де $f(x_0)$ – ордината точки C, з іншого боку $x_2 = f(x_1)$, яке можна отримати, провівши з точки A горизонталь до перетину з прямою $y = x$. Опустивши перпендикуляр до осі абсцис, матимемо на ній точку x_2 і т. д. З виконанням умови $0 < f'(x) < 1$ довжини вертикалей і горизонталей зменшуватимуться, а абсциси зі зростанням n наближуватимуться до a.

Розглянемо тепер функцію $y = f(x)$ за умови $-1 < f'(x) < 0$, що відображено на рис. 7.2. Послідовні операції пошуку розв'язку рівняння $x = f(x)$ зображені стрілками, які наближуються до точного результату a, але у випадку від'ємної похідної кожне наступне наближення буде з протилежного боку від $x = a$. Для функції з додатною похідною всі послідовні наближення були з одного боку від точного значення кореня.

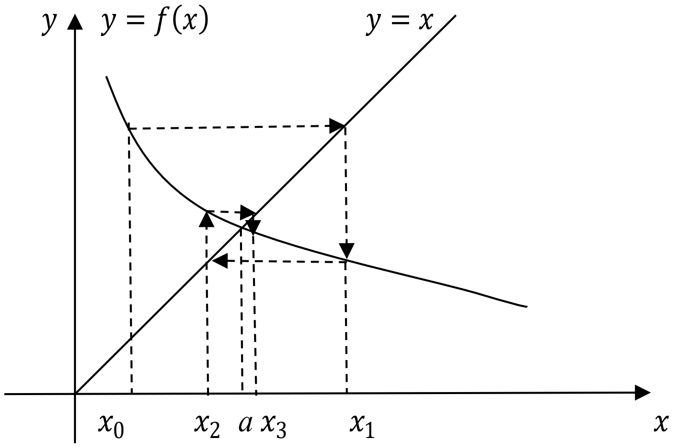

Рис. 7.2. Метод послідовних наближень за умови $-1 < f'(x) < 0$

Розглянемо варіанти, коли $f'(x) > 1$ (рис. 7.3) та $f'(x) < -1$ (рис. 7.4). У цих випадках кожне наступне значення x розташовується все далі і далі від точного значення кореня.

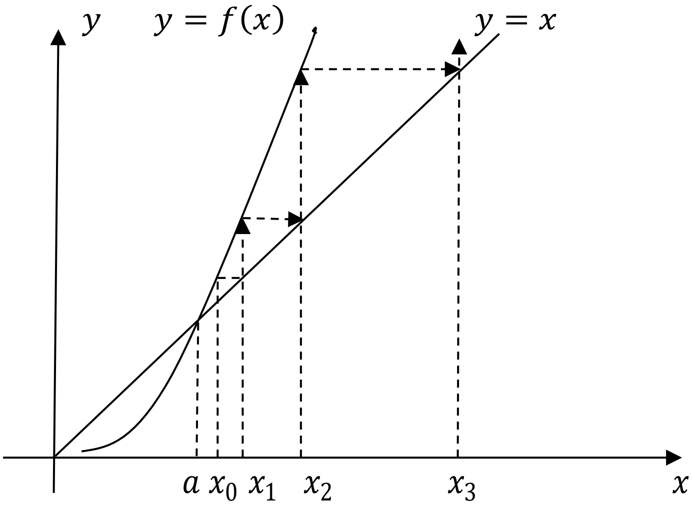

Рис. 7.3. Метод послідовних наближень за умови $f'(x) > 1$

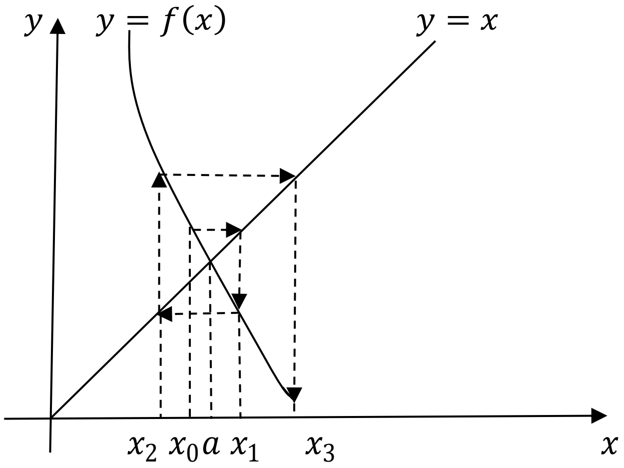

Рис. 7.4. Метод послідовних наближень за умови $f'(x) < -1$

Наведені геометричні дослідження наводять на думку, що метод послідовних наближень збігається до точного значення за умови $|f'(x)| < 1$. Доведемо це твердження.

По-перше,

$$a = f(a), x_n = f(x_{n-1}).$$

Тоді

$$x_n - a = f(x_{n-1}) - f(a).$$

Помножуємо праву частину на

$$\frac{x_{n-1} - a}{x_{n-1} - a}$$

та отримуємо

$$x_n - a = \frac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a} \cdot (x_{n-1} - a).$$

За теоремою про інтегральне середнє матимемо

$$x_n - a = f'(\zeta) \cdot (x_{n-1} - a),$$

де ζ перебуває між x_{n-1} і a.

Нехай M – найбільше значення $f'(x)$ на всьому проміжку, що включає $x_0, x_1, \dots, x_n, a$. Тоді

$$|x_n - a| \le M \cdot |x_{n-1} - a|.$$

Так само отримуємо

$$|x_{n-1} - a| \le M \cdot |x_{n-2} - a|,$$

з чого випливає

$$|x_n - a| \le M^2 \cdot |x_{n-2} - a|.$$

Виконуючи аналогічні перетворення, матимемо

$$|x_n - a| \le M^n \cdot |x_0 - a|.$$

Очевидно, якщо на всьому проміжку $M < 1$, то незалежно від вибору початкового значення x_0 зі зростанням значення n права частина зменшуватиметься (якщо $n \to \infty$, вираз $M^n \cdot |x_0 - a| \to 0$), а це означає, що

$$x_n \to a.$$

З іншого боку, якщо $M > 1$, величина $|x_n - a|$ необмежено зростає зі зростанням n.

Отже, якщо $|f'(x)| < 1$, процес послідовних наближень є збіжним, а якщо $|f'(x)| > 1$ – розбіжним.

Нерівність $|f'(x)| < 1$ є достатньою збіжності ітераційного процесу. Але ця умова не є потрібою, оскільки існують функції, для яких ця умова не виконується, але розв'язок відповідного рівняння можна знайти.

Для оцінки похибки методу використовують формули:

$$|x_n - a| \le \frac{M^n}{1 - M} \cdot |x_1 - x_0|,$$

$$|x_n - a| \le \frac{M}{1 - M} \cdot |x_n - x_{n-1}|.$$

Приклад. Знайти додатний корінь многочлена $x^2 - e^{-x} = 0$ з точністю до 0,001 за методом послідовних наближень.

Розв'язок. Оцінимо наявність коренів графічно (рис. 7.5). Для цього перепишемо рівняння $x^2 = e^{-x}$ і побудуємо графіки функцій $f(x) = x^2$ та $g(x) = e^{-x}$.

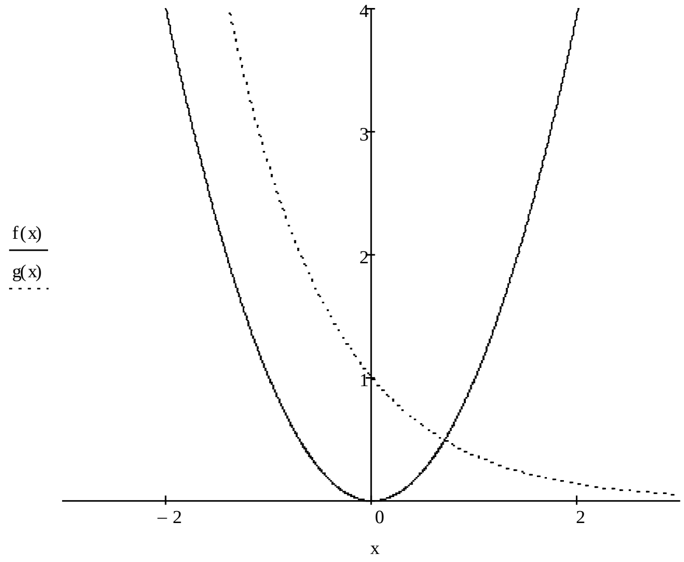

Рис. 7.5. Оцінка наявності коренів рівняння $x^2 - e^{-x} = 0$

Побудувавши графіки цих функцій (рис. 7.5), бачимо, що вони перетинаються в додатній області осі абсцис тільки в одній точці, абсциса якої розташована справа від $x = 0$. Обчислимо значення лівої частини рівняння в окремих точках:

$$x = 0;\ x^2 - e^{-x} = -1 < 0;$$

$$x = 1;\ x^2 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e} > 0.$$

Отже, корінь буде між 0 та 1. Оцінимо ті самі значення в точці 0,5:

$$x = 0{,}5;\ x^2 - e^{-x} = -0{,}357 < 0,$$

що означає належність кореня проміжку $[0{,}5; 1]$. Процес уточнення через середнє арифметичне може бути продовжений до отримання кореня із заданою точністю (метод проб).

Щоб скористатися методом послідовних наближень, перепишемо рівняння у вигляді $x = f(x)$:

$$x^2 = e^{-x};$$

$$x = e^{-\frac{x}{2}}.$$

Для перевірки достатньої умови збіжності візьмемо першу похідну від правої частини

$$\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}},$$

для якої виконується умова $\left|-\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}\right| < 1$ на проміжку $[0{,}5; 1]$

$$(-0{,}3897 < -\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} < -0{,}3033).$$

У ролі x_0 візьмемо середину проміжку $0{,}75$ і застосуємо ітераційний процес із заданою точністю. Результати занесемо до табл. 7.1:

Таблиця 7.1

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0,75	
1	0,6873	0,0627
2	0,7091	0,0218
3	0,7015	0,0076
4	0,7042	0,0027
5	0,7032	0,0010

Останній результат забезпечує задану точність. Отже, $x \approx 0{,}703$ з похибкою

$$|x_n - a| \le \frac{0{,}3897^n}{1-0{,}3897}\cdot|0{,}6873-0{,}75| = 0{,}00092.$$

Метод хорд

Знову розглядається рівняння $f(x)=0$.

Метод хорд є покращеним методом послідовних наближень, у якому геометрично процес пошуку наступного наближення x_{n+1} полягає в тому, що проводиться хорда між точками $\big(x_n, f(x_n)\big)$ та $\big(x_{n-1}, f(x_{n-1})\big)$ до перетину з віссю абсцис, що зображено на рис. 7.6, 7.7, 7.8, 7.9.

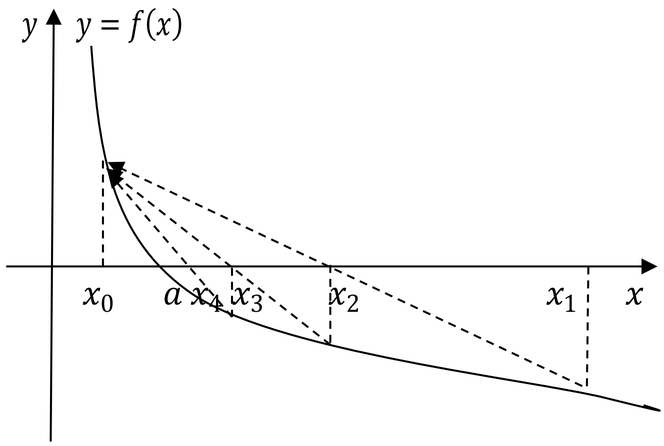

Рис. 7.6. Приклад роботи методу хорд за умови $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

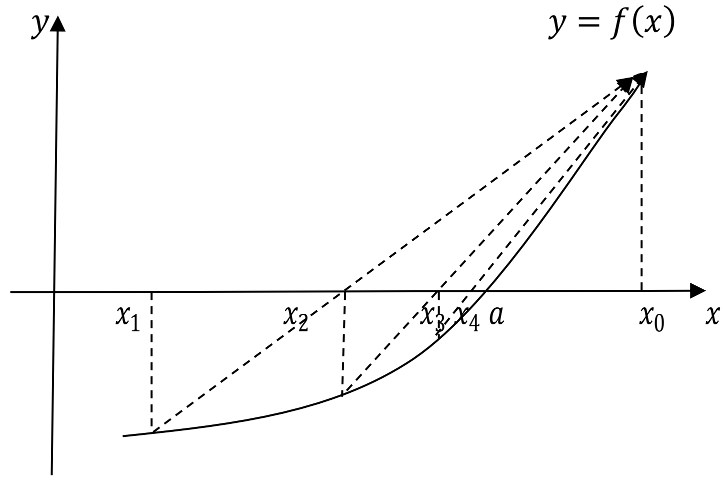

Рис. 7.7. Приклад роботи методу хорд за умови $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

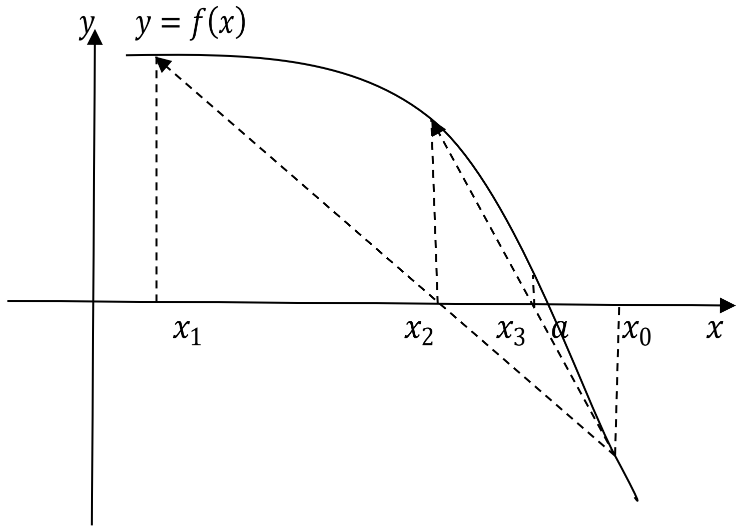

Рис. 7.8. Приклад роботи методу хорд за умови $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

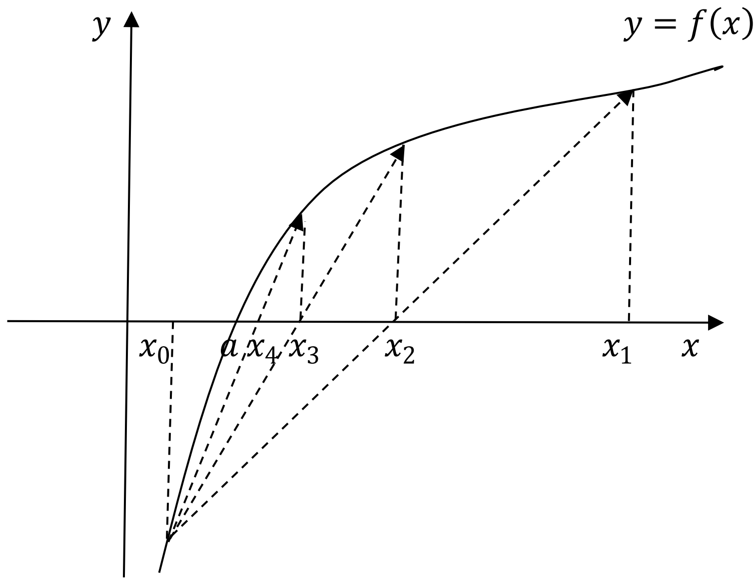

Рис. 7.9. Приклад роботи методу хорд за умови $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

Такий підхід дає змогу суттєво прискорити процес пошуку кореня рівняння.

Ітераційні формули для методу хорд мають вигляд:

1) якщо $f(b) \cdot f''(x) > 0$ на $[c, b]$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n)$$

за умови $x_0 = c$;

2) якщо $f(c) \cdot f''(x) > 0$ на $[c, b]$, то

$$x_{n+1} = a - \frac{f(c)}{f(x_n) - f(c)} \cdot (x_n - c)$$

за умови $x_0 = b$.

Приклад. Знайти додатний корінь многочлена $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$ з точністю до 0,0000001 за методом хорд.

Розв'язок. Оцінимо наявність додатного кореня графічно (рис. 7.10), перетворивши рівняння до вигляду $x^3 = -5x^2 + 15x + 7$ і розглянувши дві функції $f(x) = x^3$ і $g(x) = -5x^2 + 15x + 7$.

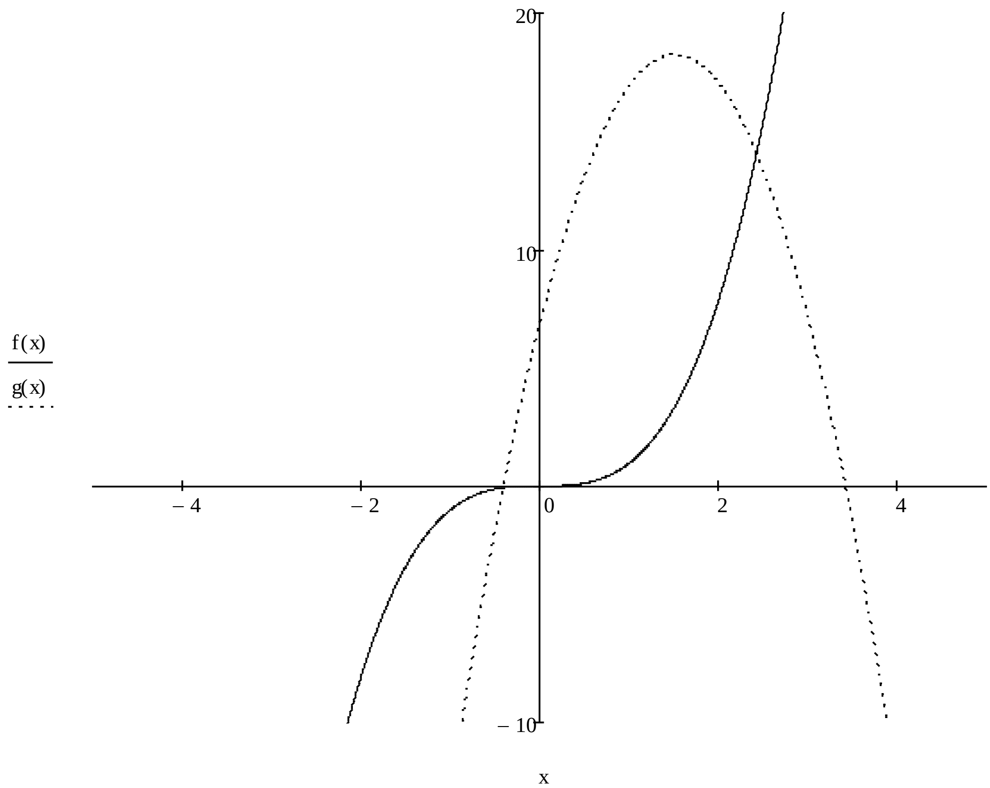

Рис. 7.10. Оцінка наявності коренів рівняння $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$

Побудувавши графіки цих функцій (рис. 7.10), бачимо, що вони перетинаються в додатній області осі абсцис тільки в одній точці, абсциса якої перебуває справа від $x = 2$. Обчислимо значення многочлена в точках, що розташовані справа від $x = 2$:

$$x = 2;\ x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = -9;$$
$$x = 3;\ x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 20.$$

Значення многочлена мають різні знаки, тому корінь має бути між ними:

$$x = 2{,}5;\ x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 2{,}375.$$

Обчислення говорять, що корінь має бути між $x = 2$ та $x = 2{,}5$. Розрахуємо многочлен, якщо $x = 2{,}4$:

$$x = 2{,}4;\ x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = -0{,}376.$$

Отже, корінь матимемо між $x = 2{,}4$ та $x = 2{,}5$.

У наведеному прикладі перша похідна від многочлена дорівнює

$$3x^2 - 10x - 15,$$

а друга похідна – $6x - 10$, яка на проміжку $[2{,}4; 2{,}5]$ є додатною. Тоді для застосування методу хорд скористаємося формулами

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n)$$

за умови $x_0 = 2{,}4$, бо $f(2{,}5) \cdot f''(x) > 0$.

Результати занесемо до табл. 7.2:

Таблиця 7.2

n	x_n	$f(x_n)$	x_{n+1}
0	2,4	−0,376	2,4136677
1	2,4136677	−0,0145313	2,4141927
2	2,4141927	−0,0005555	2,4142128
3	2,4142128	−0,0000203	2,4142128
4	2,4142128		

На четвертому кроці отримали значення, яке до семи знаків після коми не відрізняється від попереднього.

Відповідь. $\approx 2{,}4142128$.

Метод Ньютона-Рафсона (метод дотичних)

Метод Ньютона-Рафсона застосовується до рівняння $f(x) = 0$, ітераційні формули якого випливають з геометричного змісту похідної та мають вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1, ...$$

Застосування методу вимагає, щоб функція $f(x)$ була двічі неперервно диференційованою на відрізку $[a, b]$ і під час вибору x_0 виконувалася умова

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Геометрично процес пошуку наступного наближення x_{n+1} полягає в тому, що проводиться дотична до кривої $y = f(x)$ у точці x_n до перетину з віссю абсцис, що зображено на рис. 7.11,7.12,7.13, 7.14.

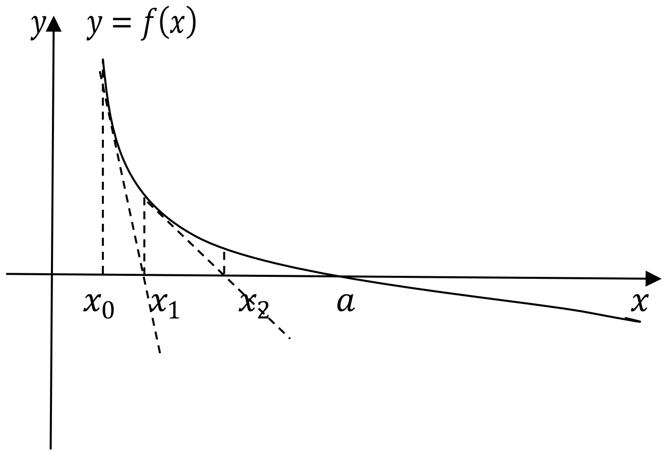

Рис. 7.11. Приклад роботи методу дотичних за умови $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

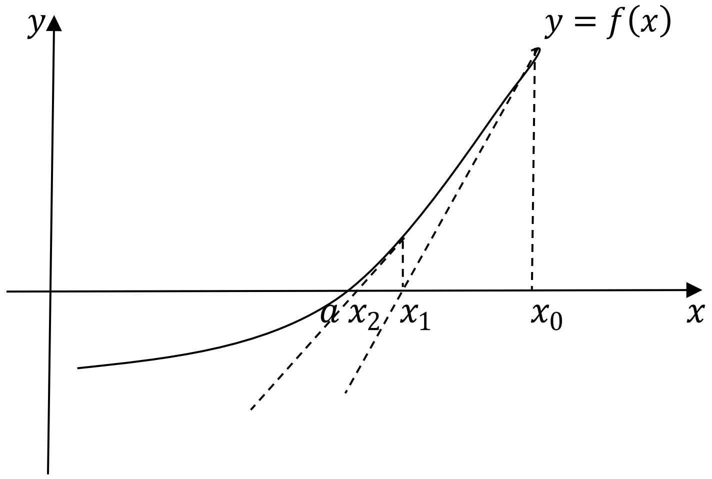

Рис. 7.12. Приклад роботи методу дотичних за умови $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

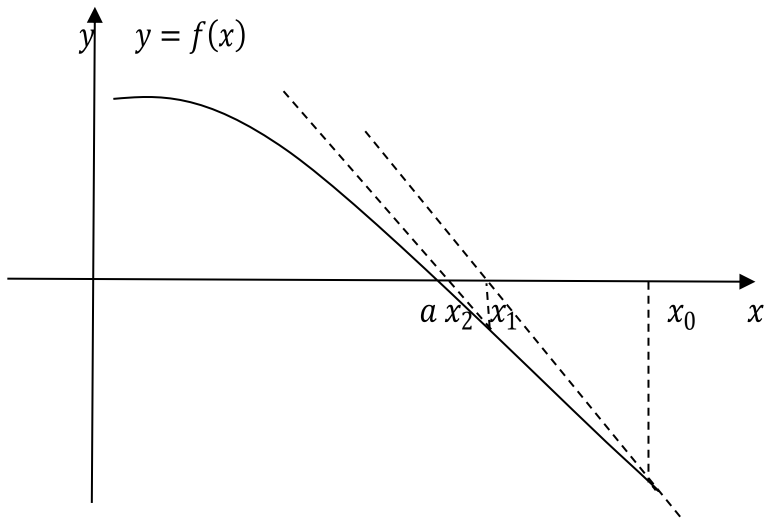

Рис. 7.13. Приклад роботи методу дотичних за умови $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

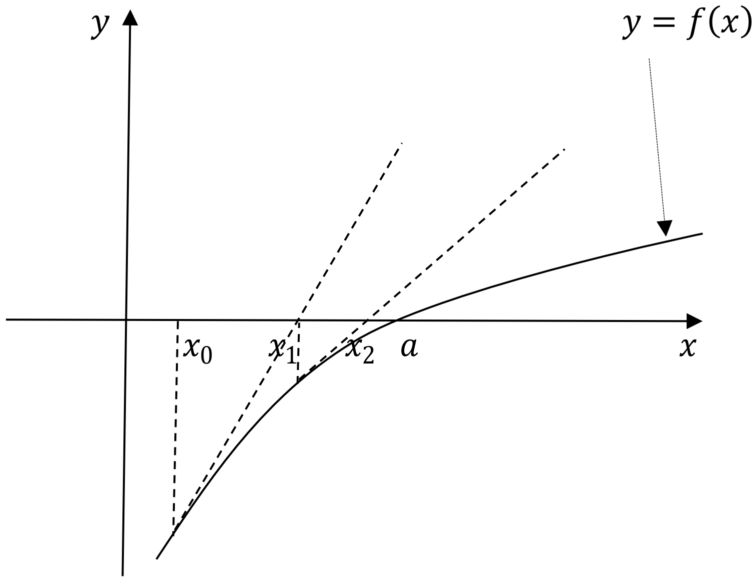

Рис. 7.14. Приклад роботи методу дотичних за умови $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

З рисунків видно, що за методом дотичних наближені значення збігаються до дійсного кореня a монотонно з боку x_0. Якщо для x_0 не виконується умова $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, тобто $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$, то процес може і не бути збіжним до кореня, що наведено, наприклад, на рис. 7.15.

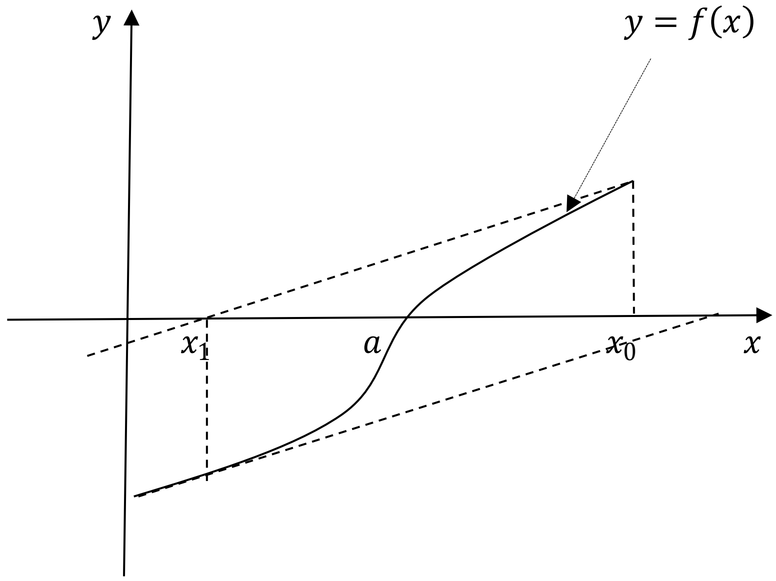

Рис. 7.15. Приклад розбіжності методу дотичних, якщо $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$

Ітераційні формули для методу дотичних мають вигляд:

1) якщо $f(b) \cdot f''(x) > 0$ на $[c, b]$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

за умови $x_0 = b$;

2) якщо $f(c) \cdot f''(x) > 0$ на $[c, b]$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

за умови $x_0 = c$.

Швидкість методу Ньютона – Рафсона можна оцінити таким чином. За формулою Тейлора

$$0 = f(a) = f(x_n) + f'(x_n)(a - x_n) + \frac{1}{2} f''(\zeta)(a - x_n)^2,$$

де

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - a - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\zeta)}{f'(x_n)} \cdot (a - x_n)^2.$$

Тоді

$$x_{n+1} - a = x_n - a - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\zeta)}{f'(x_n)} \cdot (a - x_n)^2.$$

Якщо $m = \min\limits_{[c,b]} |f'(x)|$, а $M = \max\limits_{[c,b]} |f''(x)|$, де $[c, b]$ – проміжок, що містить x_0 та a, на якому не змінюється знак $f'(x)$ і $f''(x)$, то

$$|x_{n+1} - a| \le \frac{M}{2m} \cdot |x_n - a|^2,$$

тобто метод дотичних має квадратичну збіжність.

Приклад. Знайти додатний корінь многочлена $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$ з точністю до 0,0000001 за методом дотичних.

Розв'язок. У попередньому прикладі для наведеного многочлена було з'ясовано, що шуканий корінь має бути на проміжку $[2{,}4; 2{,}5]$, а друга похідна $6x - 10$ на проміжку $[2{,}4; 2{,}5]$ є додатною. Тоді для застосування методу дотичних скористаємося формулами

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

за умови $x_0 = 2{,}5$, бо $f(2{,}5) \cdot f''(x) > 0$.

Результати занесемо до табл. 7.3:

Таблиця 7.3

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	2,5	2,375	28,75	2,4173931
1	2,4173931	0,843686	27,3043304	2,4142878
2	2,4142878	0,0019769	26,6292347	2,4142136
3	2,4142136	0,0000010	26,6274179	2,4142136
4	2,4142136			

На четвертому кроці отримали значення, яке до семи знаків після коми не відрізняється від попереднього.

Відповідь. $\approx 2{,}4142136$.

Комбінований метод хорд та дотичних

Комбінуючи метод хорд і метод дотичних, можна отримати ще один метод пошуку дійсних коренів рівняння $f(x) = 0$. Перевага такого підходу полягає в тому, що за попередніх припущень відносно $f'(x)$ і $f''(x)$ послідовні наближення лежать по різні боки від кореня, що дає змогу слідкувати в процесі обчислень за досягнутою точністю і мати збіжність, яка є швидшою за збіжність методу хорд.

Ітераційні формули для комбінованого методу хорд і дотичних мають вигляд:

1) якщо $f(b) \cdot f''(x) > 0$ на $[c, b]$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\overline{x_n}) - f(x_n)}(\overline{x_n} - x_n);\ \overline{x_{n+1}} = \overline{x_n} - \frac{f(\overline{x_n})}{f'(\overline{x_n})}$$

за умови $x_0 = c, \overline{x_0} = b$.

1) якщо $f(c) \cdot f''(x) > 0$ на $[c, b]$, то

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)};\ \overline{x_{n+1}} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\overline{x_n}) - f(x_n)}(\overline{x_n} - x_n)$$

за умови $x_0 = c, \overline{x_0} = b$,

де x_{n+1} та $\overline{x_{n+1}}$ - наближені значення кореня з нестачею та надлишком.

Запитання для самоперевірки

1. Які задачі розглядаються із застосуванням числових методів?
2. Опишіть прийоми відокремлення коренів рівнянь.
3. Опишіть метод послідовних наближень.
4. Сформулюйте достатню умову збіжності методу послідовних наближень.
5. Запишіть оцінку похибки методу послідовних наближень.
6. Опишіть метод хорд.
7. Опишіть метод дотичних.
8. Запишіть оцінку похибки методу дотичних.
9. Опишіть комбінований метод хорд і дотичних.

Задачі для самостійного розв'язування

7.1. Відокремити корені аналітично:

1) $e^{-x} - 2x + 1 = 0$; 2) $3^{-x} - 2x - 5 = 0$;

3) $\mathrm{arctg}x + 2x = 0$; 4) $3^x + 5x - 2 = 0$.

7.2. Відокремити корені аналітично й уточнити їх за методом проб із точністю до 0,01:

1) $2x^4 - x^2 - 10 = 0$; 2) $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$;

3) $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$; 4) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$.

7.3. Відокремити корені графічно:

1) $0{,}5^x - 3 = -(x+1)^2$; 2) $2x^2 - 0{,}5^x - 3 = 0$;

3) $(x-2)^2 2^x = 1$; 4) $0{,}5^x + 1 = (x-2)^2$.

7.4. Відокремити корені графічно й уточнити їх за методом проб із точністю до 0,01:

1) $x^2\cos 2x = -1$; 2) $x\lg(x+1) = 1$;

3) $x^2 - 10\sin x = 0$; 4) $(x+3)\cos x = 1$.

7.5. Відокремити корені графічно й уточнити їх за методом хорд із точністю до 0,001:

1) $x^2 + 4\sin x = 0$; 2) $\mathrm{ctg}x - \frac{1}{5}x = 0$;

3) $x + \lg x = 0{,}5$; 4) $2\lg x - \frac{1}{2}x = -1$.

7.6. Відокремити корені аналітично й уточнити їх за методом хорд із точністю до 0,001:

1) $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 2 = 0$; 2) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$;

3) $x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}6x - 1{,}6 = 0$; 4) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}4 = 0$.

7.7. Відокремити корені графічно й уточнити їх за методом дотичних із точністю до 0,001:

1) $x^2 + 4\sin x = 0$; 2) $\mathrm{ctg}x - \frac{1}{5}x = 0$;

3) $x + \lg x = 0{,}5$; 4) $2\lg x - \frac{1}{2}x = -1$.

7.8. Відокремити корені аналітично й уточнити їх за методом дотичних з точністю до 0,001:

1) $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 2 = 0$; 2) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0$;

3) $x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}6x - 1{,}6 = 0$; 4) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}4 = 0$.

8. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Система нелінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \qquad\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – змінні, а хоча б одна з функцій $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є нелінійною. Її розв'язок є складнішою задачею, ніж розв'язок одного рівняння. Розглянемо окремі методи розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Метод простих ітерацій

Для роботи за методом простих ітерацій початкову систему треба привести до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_n = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Ітераційний процес описується формулами:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = F_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right), \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = F_n\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right), \end{cases}$$

де вектор $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ – початковий наближений розв'язок системи до невідомого точного розв'язку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, який є єдиним у деякій області. Для того щоб отримати розв'язок із заданою точністю, ітераційний процес продовжується доти, доки два послідовні наближення $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ і $x^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$ співпадатимуть із заданою точністю.

Нехай $\rho(x', x'') = \max\limits_i |x_i' - x_i''|$. Тоді *достатньою умовою* збіжності методу простих ітерацій є виконання такої теореми:

Якщо на множині R всіх векторів x, для яких $\rho(x, \alpha) \le r$, система функцій $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1,2, \dots, n$ задовільняє умові

$$|F_i(x') - F_i(x'')| \le K \cdot \rho(x', x'')$$

з константою K, що менша за одиницю, то за будь-якого початкового вектора $x^{(0)} \in R$ послідовність $x^{(k)}, k = 0,1,2, \dots$ збігається до α.

На практиці зручніше користуватися іншою достатньою умовою збіжності методу простих ітерацій. Якщо функції $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1,2, \dots, n$ у деякій опуклій області D, що містить вектор α, є неперервними та диференційованими і для них виконується одна з двох умов

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right| < 1, i = 1,2, \dots, n$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right| < 1, j = 1,2, \dots, n,$$

то послідовність $x^{(k)}, k = 0,1,2, \dots$ збігається до α.

Перша умова є системою

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right| + \dots + \left|\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right| < 1, \\ \left|\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right| + \dots + \left|\frac{\partial F_2}{\partial x_n}\right| < 1, \\ \dots \\ \left|\frac{\partial F_n}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial F_n}{\partial x_2}\right| + \dots + \left|\frac{\partial F_n}{\partial x_n}\right| < 1, \end{cases}$$

а друга умова – системою

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right| + \dots + \left|\frac{\partial F_n}{\partial x_1}\right| < 1, \\ \left|\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right| + \left|\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right| + \dots + \left|\frac{\partial F_n}{\partial x_2}\right| < 1, \\ \dots \\ \left|\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right| + \left|\frac{\partial F_2}{\partial x_n}\right| + \dots + \left|\frac{\partial F_n}{\partial x_n}\right| < 1. \end{cases}$$

Для системи з двох нелінійних рівнянь із двома невідомими

$$\begin{cases} x = F_1(x, y), \\ y = F_2(x, y) \end{cases}$$

достатня умова збіжності процесу матиме вигляд:

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F_2}{\partial x}\right| < 1, \\ \left|\frac{\partial F_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial F_2}{\partial y}\right| < 1 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F_1}{\partial y}\right| < 1, \\ \left|\frac{\partial F_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F_2}{\partial y}\right| < 1, \end{cases}$$

а сам ітераційний процес:

$$\begin{cases} x_{k+1} = F_1(x_k, y_k), \\ y_{k+1} = F_2(x_k, y_k). \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати систему за методом простих ітерацій із точністю до 10^{-3}:

$$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 1, \\ \sin y + 2x = 1{,}6. \end{cases}$$

Розв'язок. Перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} y = 1 - \cos(x-1), \\ x = 0{,}8 - 0{,}5\sin y. \end{cases}$$

Пошук початкового розв'язку відбувається графічно (рис. 8.1), де $f(x) = 1 - \cos(x-1)$, $g(y) = 0{,}8 - 0{,}5\sin y$. З графіка бачимо, що система має один розв'язок, який перебуває в області *D*:

$$0{,}6 < x < 0{,}9\colon\ -0{,}1 < y < 0{,}2.$$

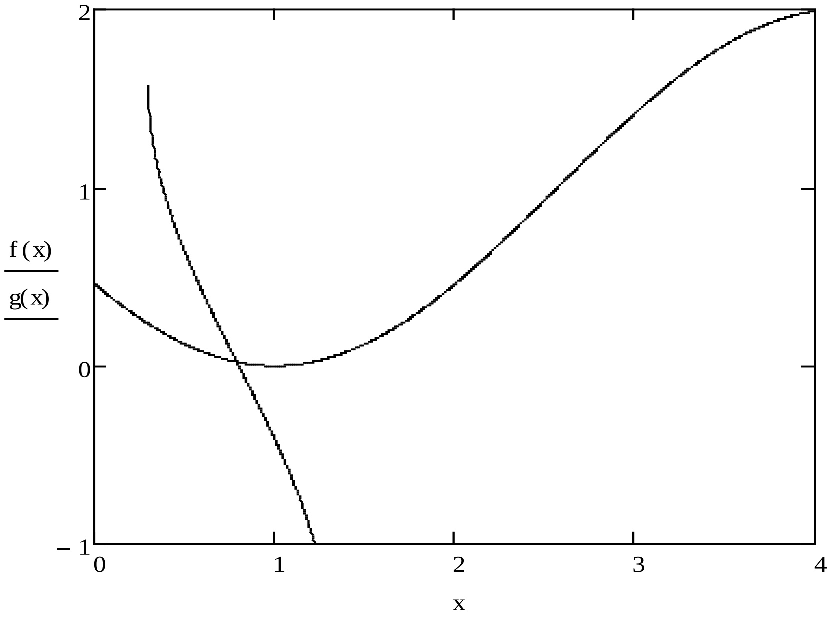

Рис. 8.1. Оцінка розв'язку системи

Перевіримо виконання достатньої умови збіжності метода. Маємо

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 1 - \cos(x-1), \\ F_2(x,y) = 0{,}8 - 0{,}5\sin y. \end{cases}$$

Шукаємо часткові похідні:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \sin(x-1);\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial F_2}{\partial y} = -0{,}5\cos y.$$

В області *D* маємо

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F_2}{\partial x}\right| = |\sin(x-1)| \le \sin 0{,}3 < 1;$$

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial F_2}{\partial y}\right| = |0{,}5\cos y| < 1.$$

Отже, достатня умова збіжності виконується.

За початковий розв’язок візьмемо $x_0 = 0{,}75, y_0 = 0{,}05$.

Результати обчислень занесемо до табл. 8.1:

Таблиця 8.1

k	x_k	y_k
0	0,75	0,05
1	0,7750	0,0311
2	0,7845	0,0252
3	0,7874	0,0231
4	0,7885	0,0225
5	0,7888	0,0223

Відповідь. $x \approx 0{,}789, y \approx 0{,}022$.

Метод Ньютона

Нехай система нелінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \quad\quad\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

де $f_1, \dots, f_n$ – неперервно-диференційовані функції.

Алгоритм методу базується на розкладі кожної функції системи в околі точки з координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ в ряд Тейлора. Початкова система матиме вигляд:

$$\begin{cases} f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ \quad\quad + \Delta x_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}, \\ \quad\quad\dots \\ f_n(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ \quad\quad + \Delta x_1 \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}, \end{cases}$$

Припустимо, що прирости вибрані таким чином, що точки з координатами $x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n$ є коренями цієї системи рівнянь із задним наближенням. Тоді ліві частини рівнянь системи можна прирівняти до нуля, унаслідок чого матимемо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\Delta x_n = -f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\Delta x_n = -f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

або у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ -f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

де $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ – матриця Якобі, яка має бути невиродженою в деякому околі точного розв’язку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Унаслідок таких перетворень система може розглядатися як система лінійних рівнянь відносно приростів. Якщо вирахувати початкові значення наближень $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, які досить близькі до точного розв’язку, то можна розв’язувати систему відносно $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ і знаходити розв’язки системи як суму попереднього значення та приросту. Процес продовжується доти, доки не буде виконано умову точності.

Для системи з двома рівняннями

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

ітераційний процес матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \dfrac{\Delta_{x_k}}{\Delta_k}, \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{\Delta_{y_k}}{\Delta_k}, \end{cases}$$

де

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x_k, y_k)}{\partial x} & \frac{\partial F_1(x_k, y_k)}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(x_k, y_k)}{\partial x} & \frac{\partial F_2(x_k, y_k)}{\partial y} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_k} = -\begin{vmatrix} F_1(x_k, y_k) & \frac{\partial F_1(x_k, y_k)}{\partial y} \\ F_2(x_k, y_k) & \frac{\partial F_2(x_k, y_k)}{\partial y} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{y_k} = \begin{vmatrix} F_1(x_k, y_k) & \frac{\partial F_1(x_k, y_k)}{\partial x} \\ F_2(x_k, y_k) & \frac{\partial F_2(x_k, y_k)}{\partial x} \end{vmatrix}.$$

Приклад. Уточнити за методом Ньютона наближені розв’язки $x_0 = 0{,}4$

та $y_0 = 0{,}9$ системи

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 2xy - y - 2 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + 3xy - 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 4x^2 + y^2 + 2xy - y - 2 = 0, \\ F_2(x,y) = 2x^2 + y^2 + 3xy - 3 = 0. \end{cases}$$

Шукаємо часткові похідні:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 8x + 2y;\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 4x + 3y;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y + 2x - 1;\ \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y + 3x.$$

$$F_1(x_0,y_0) = -0{,}73;\ \frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial x} = 5{,}0;\ \frac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial y} = 1{,}6;$$

$$F_2(x_0,y_0) = -0{,}79;\ \frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial x} = 4{,}3;\ \frac{\partial F_2(x_0,y_0)}{\partial y} = 3{,}0.$$

Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} 5{,}0 \cdot \Delta x_0 + 1{,}6 \cdot \Delta y_0 = 0{,}7, \\ 4{,}3 \cdot \Delta x_0 + 3{,}0 \cdot \Delta y_0 = 0{,}79. \end{cases}$$

$$\Delta x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}7 & 1{,}6 \\ 0{,}79 & 3{,}0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5{,}0 & 1{,}6 \\ 4{,}3 & 3{,}0 \end{vmatrix}} = 0{,}114, x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 0{,}514,$$

$$\Delta y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 5{,}0 & 0{,}7 \\ 4{,}3 & 0{,}79 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5{,}0 & 1{,}6 \\ 4{,}3 & 3{,}0 \end{vmatrix}} = 0{,}100, y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1{,}000.$$

$$F_1(x_1,y_1) = 0{,}084784;\ \frac{\partial F_1(x_1,y_1)}{\partial x} = 6{,}112;\ \frac{\partial F_1(x_1,y_1)}{\partial y} = 2{,}028;$$

$$F_2(x_1,y_1) = 0{,}070392;\ \frac{\partial F_2(x_1,y_1)}{\partial x} = 5{,}056;\ \frac{\partial F_2(x_1,y_1)}{\partial y} = 3{,}542.$$

Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} 6{,}112 \cdot \Delta x_1 + 2{,}028 \cdot \Delta y_1 = -0{,}084784, \\ 5{,}056 \cdot \Delta x_1 + 3{,}542 \cdot \Delta y_1 = -0{,}070392. \end{cases}$$

$$\Delta x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}084784 & 2{,}028 \\ -0{,}070392 & 3{,}542 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6{,}112 & 2{,}028 \\ 5{,}056 & 3{,}542 \end{vmatrix}} = -0{,}013826, x_2 = x_1 + \Delta x_1 = 0{,}500174,$$

$$\Delta y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6{,}112 & -0{,}084784 \\ 5{,}056 & -0{,}070392 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6{,}112 & 2{,}028 \\ 5{,}056 & 3{,}542 \end{vmatrix}} = -0{,}000138, y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0{,}999862.$$

$$F_1(x_2, y_2) = 0{,}000768;\ \frac{\partial F_1(x_2, y_2)}{\partial x} = 6{,}001116;\ \frac{\partial F_1(x_2, y_2)}{\partial y} = 2{,}000072;$$

$$F_2(x_2, y_2) = 0{,}000387;\ \frac{\partial F_2(x_2, y_2)}{\partial x} = 5{,}000282;\ \frac{\partial F_2(x_2, y_2)}{\partial y} = 3{,}500246.$$

Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} 6{,}001116 \cdot \Delta x_2 + 2{,}000072 \cdot \Delta y_2 = -0{,}000768, \\ 5{,}000282 \cdot \Delta x_2 + 3{,}500246 \cdot \Delta y_2 = -0{,}000387. \end{cases}$$

$$\Delta x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}000768 & 2{,}000072 \\ -0{,}000387 & 3{,}500246 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6{,}001116 & 2{,}000072 \\ 5{,}000282 & 3{,}500246 \end{vmatrix}} = -0{,}000174, x_3 = x_2 + \Delta x_2 = 0{,}500000,$$

$$\Delta y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6{,}001116 & -0{,}000768 \\ 5{,}000282 & -0{,}000387 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6{,}001116 & 2{,}000072 \\ 5{,}000282 & 3{,}500246 \end{vmatrix}} = 0{,}000138, y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 1{,}000000.$$

Отримано точний розв'язок $x = 0{,}5, y = 1$.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть загальний вигляд системи нелінійних рівнянь.

2. Опишіть метод простих ітерацій розв'язування системи нелінійних рівнянь.

3. Наведіть достатні умови збіжності методу простих ітерацій розв'язування системи нелінійних рівнянь.

4. Опишіть метод Ньютона розв'язування системи нелінійних рівнянь.

5. Наведіть матрицю Якобі та вкажіть умови, що на неї накладаються.

Задачі для самостійного розв'язування

8.1. Розв'язати систему нелінійних рівнянь за методом простих ітерацій із точністю до 0,01:

1) $\begin{cases} \sin(x-1) + y = 1{,}5, \\ x - \sin(y+1) = 1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1, \\ 2y + \cos x = 2, \end{cases}$

3) $\begin{cases} \cos(y-1)+x=0{,}8, \\ y-\cos x=2, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \cos(x-1)+y=1, \\ \sin y+2x=1{,}6. \end{cases}$

8.2. Розв'язати систему нелінійних рівнянь за методом Ньютона з точністю до 0,01:

1) $\begin{cases} \mathrm{tg}xy=x^2, \\ 0{,}6x^2+2y^2=1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(y+x)-1{,}2x=0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$

3) $\begin{cases} \mathrm{tg}(xy+0{,}3)=x^2, \\ 0{,}5x^2+2y^2=1, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin(y+x)-1{,}1x=0{,}1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

9. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Задача Коші

Задача Коші для звичайного диференціального рівняння n-го порядку

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$$

полягає в пошуку функції $y=y(x)$, що відповідає як наведеному диференціальному рівнянню, так і початковим умовам

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

де $x_0,y_0,y'_0,\dots,y_0^{(n-1)}$ – задані числа.

Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку має вигляд

$$y'=f(x,y), y(x_0)=y_0.$$

Із застосуванням чисельних методів пошук розв'язку звичайного диференціального рівняння відбувається в табличному вигляді функції $y=y(x)$.

Метод степеневих рядів

Напишемо розклад функції $y=y(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_k $(k=0,1,\dots)$:

$$y(x)=y(x_k)+\frac{y'(x_k)}{1!}\cdot(x-x_k)+\frac{y''(x_k)}{2!}\cdot(x-x_k)^2+\frac{y'''(x_k)}{3!}\cdot(x-x_k)^3+\dots+\frac{y^{(n)}(x_k)}{n!}\cdot(x-x_k)^n+\cdots$$

Нехай процес розв'язку (x_0 – відоме з умови задачі, $x_1, x_2, \dots, x_k$) дійшов до деякої заданої точки і треба перейти до наступної, а послідовні значення аргументу $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ розташовані на однаковій відстані h одне від одного. Тоді наступне значення аргументу – $x_{k+1} = x_k + h$, а значення функції в цій точці -

$$y_{k+1} = y(x_{k+1}) = y_k + \frac{y'(x_k)}{1!} \cdot h + \frac{y''(x_k)}{2!} \cdot h^2 + \frac{y'''(x_k)}{3!} \cdot h^3 + \cdots$$

Чим більше доданків ряду буде обчислено, тім точнішим матимемо результат. У будь-якому випадку треба обчислювати значення похідних функції $y(x)$. Із заданого диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ отримаємо

$$y'' = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot f(x,y).$$

Тоді

$$y_{k+1} = y_k + h\left(y'(x_k) + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y} \cdot f(x_k, y_k)\right)\right) + O(h^3),$$

де $O(h^3)$ – наступні члени ряду, порядок яких не нижчий за третій.

З практичного погляду зору застосування методу степеневих рядів ускладнено потребою обчислення на кожному кроці частинних похідних (а інколи і неможливо), зі збільшенням кількості доданків з метою отримання більш точного результату виникає потреба в обчисленні y''', y^{IV} тощо. Тому досліджуватимемо інші методи.

Метод Ейлера

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. Припустимо, що відома точка (x_k, y_k) на шуканій кривій (рис. 9.1). Тоді можна провести пряму лінію з кутовим коефіцієнтом $y_k' = f(x_k, y_k)$.

Наступною точкою розв'язку можна вважати ту, де пряма перетне пряму $x = x_k + h$. Рівняння прямої матиме вигляд

$$y = y_k + y_k'(x - x_k),$$

а ордината шуканої точки $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$.

Аналогічно розраховуються і будуються наступні точки, що зображено на рис. 9.1. Якщо з’єднати точки перетину прямих, то отримаємо ламану, яка є наближенням до шуканої кривої.

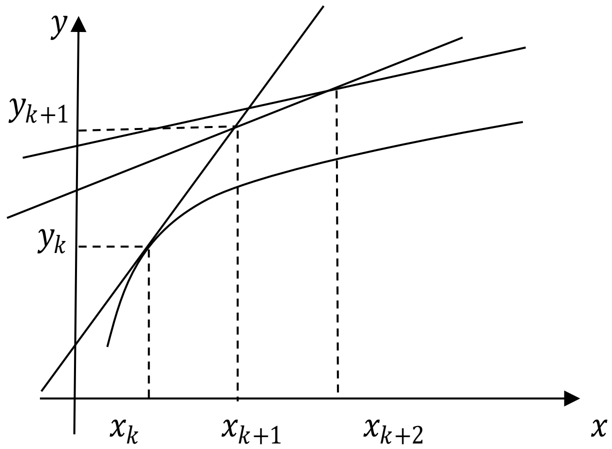

Рис. 9.1. Приклад роботи методу Ейлера

Отримане наближення узгоджується з рядом Тейлора до членів першого порядку h.

Якщо рівняння розв’язується на проміжку $[a, b]$, то метод Ейлера застосовується таким чином:

1) обчислюється крок $h = \frac{b-a}{n}$;
2) задається аргумент $x_k = x_0 + k \cdot h, k = 0, 1, 2, \ldots, n$;
3) обчислюється наступне значення ординати $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;
4) отримані точки $(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \ldots, n$, задають шукану функцію.

Похибка обчислень на кожному кроці становить $R_h = 0{,}5 \cdot h^2 \cdot y''(\varepsilon)$, де $x_k \leq \varepsilon \leq x_{k+1}$.

Удосконалений метод ламаних

Удосконалений метод ламаних є розвиненням методу Ейлера. Знову розглядаємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ і коментуємо метод геометрично. Напочатку аналогічно до попереднього методу через точку (x_k, y_k) проводимо пряму лінію з кутовим коефіцієнтом $f(x_k, y_k)$, але далі беремо точку P, що лежить на перетині побудованої прямої та прямої $x = x_k + \frac{h}{2}$. Ордината такої точки дорівнює $y = y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k)$. Отже, через точку P проходить пряма з кутовим коефіцієнтом $f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k)\right)$, яку шляхом паралельного переносу зсуваємо до точки (x_k, y_k). Перетин цієї нової прямої

$$y = y_k + f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k)\right)(x - x_k)$$

з вертикальною прямо $x = x_k + h$ дає шукану точку (x_{k+1}, y_{k+1}).

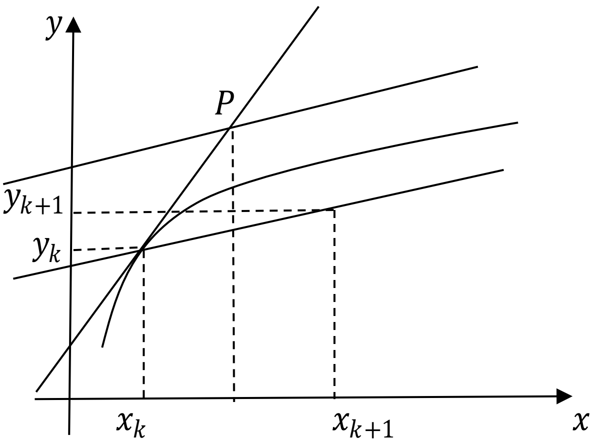

Рис. 9.2. Приклад роботи вдосконаленого методу ламаних

Цей метод узгоджується з розкладом у ряд Тейлора до членів другого порядку h. Отже, похибка методу має порядок h^3.

Якщо рівняння розв'язується на проміжку $[a, b]$, то вдосконалений метод ламаних застосовується таким чином:

1) обчислюється крок $h = \frac{b-a}{n}$;
2) задається проміжний аргумент $x_{k+\frac{1}{2}} = x_0 + k \cdot h + \frac{h}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;
3) обчислюється проміжне значення ординати $y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;
4) обчислюється наступне значення ординати $y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$;
5) отримані точки $(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \ldots, n$, задають шукану функцію.

Приклад. Розв'язати задачу Коші для рівняння

$$y' = 0{,}185 \cdot (x^2 + \cos 0{,}7x) + 1{,}843y\,, y(0{,}2) = 0{,}25,$$

за вдосконаленим методом ламаних на проміжку $[0{,}2; 1{,}2]$ з кроком $h = 0{,}1$. Обчислення мають виконуватися з чотирма десятковими знаками.

Розв’язок. Для наведеного прикладу маємо

$$f(x,y) = 0{,}185 \cdot (x^2 + \cos 0{,}7x) + 1{,}843y.$$

Результати обчислень занесені до табл. 9.1:

Таблиця 9.1

x_k	y_k	y'_k	$\frac{h}{2} \cdot y'_k$	$x_{k+\frac{1}{2}}$	$y_{k+\frac{1}{2}}$	$y'_{k+\frac{1}{2}}$	$h \cdot y'_{k+\frac{1}{2}}$
0,2	0,25	0,6513	0,0326	0,25	0,2826	0,7145	0,0715
0,3	0,3215	0,7901	0,0395	0,35	0,3610	0,8675	0,0868
0,4	0,4083	0,9599	0,0480	0,45	0,4563	1,0543	0,1054
0,5	0,5137	1,1668	0,0583	0,55	0,5720	1,2816	0,1282
0,6	0,6419	1,4185	0,0709	0,65	0,7128	1,5581	0,1558
0,7	0,7977	1,7240	0,0862	0,75	0,8839	1,8932	0,1893
0,8	0,9870	2,0942	0,1047	0,85	1,0917	2,2989	0,2299
0,9	1,2169	2,5421	0.1271	0,95	1,3440	2,7895	0,2790
1,0	1,4959	3,0834	0,1543	1,05	1,6501	3,3823	0,3382
1,1	1,8341	3,7369	0,1868	1,15	2,0209	4,0974	0,4097
1,2	2,2438						

Перший стовпчик таблиці містить значення аргументу з кроком $h = 0{,}1$, другий – значення шуканої функції, де перше значення 0,25 беремо з умови задачі, а інші значення обчислюємо за формулою

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right),$$

де y_k – попереднє значення з цього ж стовпчика, а $h \cdot f\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right)$ беремо з останнього стовпчика (попередній рядок). Третій стовпчик обчислюється за формулою $y'_k = f(x_k, y_k)$ з використанням попередніх значень x_k та y_k. Четвертий стовпчик отримуємо на базі третього, пам’ятаючи, що $\frac{h}{2} = 0{,}05$, а п’ятий – з першого за формулою $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2}$. Шостий стовпчик обчислюється за формулою $y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k)$ додаванням попередніх значень з другого і четвертого стовпчиків. Елементи сьомого стовпчика обчислюються за формулою $y'_{k+\frac{1}{2}} = f\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right)$ з використанням попередніх значень $x_{k+\frac{1}{2}}$ та $y_{k+\frac{1}{2}}$ п’ятого й шостого стовпчиків. Останній стовпчик отримано на базі попереднього, пам'ятаючи, що $h = 0{,}1$. Отже, розв'язком рівняння є вузли функції, значення яких містяться в першому та другому стовпчиках.

Удосконалений метод Ейлера – Коші

Розглядається задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. В удосконаленому методі Ейлера – Коші знаходиться середній кутовий коефіцієнт нахилу дотичних для точок (x_k, y_k) та (x_{k+1}, y_{k+1}) з методу Ейлера. Спочатку через точку (x_k, y_k) проводимо пряму лінію L_1 з кутовим коефіцієнтом $f(x_k, y_k)$ до перетину з прямою $x = x_k + h$. Тоді нова точка матиме координати $x_{k+1} = x_k + h, y_{k+1}^* = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$. Через неї проводимо нову пряму L_2 з кутовим коефіцієнтом $f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)$. Усереднення двох кутових коефіцієнтів дає пряму L з кутовим коефіцієнтом

$$\frac{1}{2} \cdot \left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)\right).$$

Через точку (x_k, y_k) проводимо пряму лінію, що паралельна до прямої L, поки вона не перетне вертикальну пряму $x = x_k + h$. Отримана точка з координатами

$$x_{k+1} = x_k + h, y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} h \cdot \left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)\right)$$

і буде шуканою точкою.

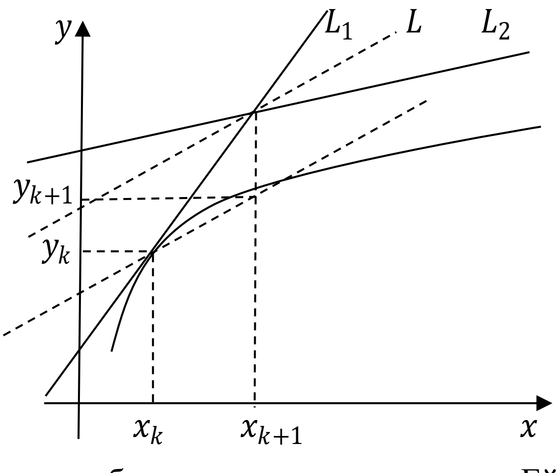

Рис. 9.3. Приклад роботи удосконаленого методу Ейлера – Коші

Цей метод узгоджується з розкладом у ряд Тейлора до членів другого порядку h. Отже, похибка методу має порядок h^3.

Якщо рівняння розв'язується на проміжку $[a, b]$, то вдосконалений метод Ейлера –Коші застосовується таким чином:

1) обчислюється крок $h = \frac{b-a}{n}$;

2) задається аргумент $x_k = x_0 + k \cdot h, k = 0, 1, 2, \dots, n$;

3) обчислюється проміжне значення ординати $y_{k+1}^* = y_k + h \cdot f(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$;

4) обчислюється наступне значення ординати $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h \cdot \left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)\right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$;

5) отримані точки $(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \dots, n$, задають шукану функцію.

Приклад. Розв'язати задачу Коші для рівняння

$$y' = 0{,}185 \cdot (x^2 + \cos 0{,}7x) + 1{,}843y\,, y(0{,}2) = 0{,}25,$$

за удосконаленим методом Ейлера – Коші на проміжку $[0{,}2; 1{,}2]$ з кроком $h = 0{,}1$. Обчислення мають виконуватися з чотирма десятковими знаками.

Розв'язок. Розглядається рівняння з попереднього прикладу, де

$$f(x, y) = 0{,}185 \cdot (x^2 + \cos 0{,}7x) + 1{,}843y.$$

Результати обчислень занесені до табл. 9.2:

Таблиця 9.2

x_k	y_k	y_k'	$h \cdot y_k'$	y_{k+1}^*	$y_{k+1}^{*\prime}$	y_{k+1}^{Σ}	$\frac{h}{2} \cdot y_{k+1}^{\Sigma}$
0,2	0,25	0,6513	0,0651	0,3151	0,7784	1,4297	0,0715
0,3	0,3215	0,7901	0,0790	0,4005	0,9455	1,7356	0,0868
0,4	0,4083	0,9599	0,0960	0,5043	1,1495	2,1094	0,1055
0,5	0,5138	1,1670	0,1167	0,6305	1,3975	2,5645	0,1282
0,6	0,6420	1,4187	0,1419	0,7839	1,6986	3,1173	0,1559
0,7	0,7979	1,7244	0,1724	0,9703	2,0635	3,7879	0,1894
0,8	0,9873	2,0947	0,2095	1,1968	2,5050	4,5997	0,2300
0,9	1,2173	2,5428	0,2543	1,4716	3,0386	5,5814	0,2791
1,0	1,4964	3,0844	0,3084	1,8048	3,6830	6,7674	0,3384
1,1	1,8348	3,7382	0,3738	2,2086	4,4604	8,1986	0,4099
1,2	2,2447						

Перший стовпчик таблиці містить значення аргументу з кроком $h = 0{,}1$, другий – значення шуканої функції, де перше значення 0,25 беремо з умови задачі, а інші значення обчислюємо за формулою

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h \cdot \left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)\right),$$

де y_k – попереднє значення з цього ж стовпчика, а $\frac{1}{2}h \cdot \left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)\right)$ беремо з останнього стовпчика (попередній рядок). Третій стовпчик обчислюється за формулою $y_k' = f(x_k, y_k)$. Заповнення четвертого стовпчика очевидне, а у п'ятому – y_{k+1}^* обчислюється за формулою $y_{k+1}^* = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$, де y_k беремо з другого стовпчика, а $h \cdot f(x_k, y_k)$ – з четвертого стовпчика. Шостий стовпчик обчислюється за формулою $y_{k+1}^{*\prime} = f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)$. Елементи сьомого стовпчика отримуємо додаванням попередніх двох значень із третього й шостого стовпчиків $y_{k+1}^{\Sigma} = y_k' + y_{k+1}^{*\prime}$. Заповнення останнього стовпчика очевидне.

Отже, розв'язком рівняння є вузли функції, значення яких містяться в першому та другому стовпчиках.

Якщо порівняти розв'язки рівняння за вдосконаленим методом ламаних і вдосконаленим методом Ейлера – Коші, то бачимо, що результати співпадають із точністю до тисячних. Тому об'єднаний результат матиме вигляд (табл. 9.3):

Таблиця 9.3

x_k	y_k	x_k	y_k	x_k	y_k
0,2	0,25	0,6	0,642	1,0	1,496
0,3	0,322	0,7	0,798	1,1	1,835
0,4	0,408	0,8	0,987	1,2	2,245
0,5	0,514	0,9	1,217		

Удосконалений метод Ейлера з уточненнями

Удосконалений метод Ейлера з уточненнями є розвиненням попереднього метода.

Якщо рівняння $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ розв'язується на проміжку $[a, b]$, то вдосконалений метод Ейлера з уточненнями застосовується таким чином:

1) обчислюється крок $h = \frac{b-a}{n}$;
2) задається аргумент $x_k = x_0 + k \cdot h, k = 0, 1, 2, \dots, n$;
3) обчислюється грубе наближення наступного значення ординати
   $y_{k+1}^{(0)} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$;
4) корегується наступне значення ординати

$$y_{k+1}^{(i)} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i-1)}\right)\right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

доти, доки два послідовні наближення не збігатимуть із заданою точністю;

5) отримані точки $(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \dots, n$, задають шукану функцію.

Цей метод узгоджується з розкладом у ряд Тейлора до членів другого порядку h. Отже, похибка методу має порядок h^3.

Метод Рунге – Кутта

Спочатку проаналізуємо модифікації методу Ейлера, що отримані в попередніх пунктах. Вони описуються формулами виду

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \Phi(x_k, y_k, h),$$

де

$$\Phi(x_k, y_k, h) = a_1 \cdot f(x_k, y_k) + a_2 \cdot f(x_k + b_1 h, y_k + b_2 h y_k'),$$
$$y_k' = f(x_k, y_k).$$

Скористаємося розкладом функції $f(x, y)$ у такому виді:

$$f(x, y) = f(x_k, y_k) + (x - x_k)\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + (y - y_k)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \cdots$$

У розкладі $f(x, y)$ в ряд в околі точки (x_k, y_k) покладемо

$$x = x_k + b_1 h, y = y_k + b_2 h f(x_k, y_k).$$

Тоді

$$f\big(x_k + b_1 h, y_k + b_2 h f(x_k, y_k)\big) =$$
$$= f(x_k, y_k) + b_1 h \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} + b_2 h f(x_k, y_k)\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}$$
$$+ O(h^2).$$

Тоді

$$y_{k+1} = y_k + h(a_1 \cdot f(x_k, y_k) + a_2 \cdot f(x_k, y_k)$$
$$+ h\left(a_2 b_1 \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} + a_2 b_2 \cdot f(x_k, y_k)\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}\right) + O(h^3).$$

Порівнявши отриману формулу з рядом Тейлора

$$y_{k+1} = y_k + h\left(y'(x_k) + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y} \cdot f(x_k, y_k)\right)\right)$$
$$+ O(h^3),$$

маємо

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1, \\ a_2 b_1 = \dfrac{1}{2}, \\ a_2 b_2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Оскільки отримали систему трьох рівнянь із чотирма невідомими, то одне з невідомих можна задати довільно. Нехай $a_2 = \omega \neq 0$. Тоді

$$a_1 = 1 - \omega,$$

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2\omega},$$

а

$$y_{k+1} = y_k + h((1-\omega) \cdot f(x_k, y_k) + \omega f\left(x_k + \frac{h}{2\omega}, y_k + \frac{h}{2\omega} \cdot f(x_k, y_k)\right)) + O(h^3).$$

Це найбільш загальна форма запису методу Рунге – Кутта другого порядку. Якщо $\omega = \frac{1}{2}$, маємо вдосконалений метод Ейлера – Коші, а якщо $\omega = 1$ – удосконалений метод ламаних.

Методи Рунге – Кутта третього й четвертого порядків можна вивести аналогічно. Метод Рунге – Кутта четвертого порядку для розв’язування рівняння $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ є найрозповсюдженішим, його часто просто називають метод Рунге – Кутта, який описується формулами:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right),$$

де

$$k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$k_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_4^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right),$$

$$x_i = x_0 + i \cdot h, i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Похибка методу має порядок h^5.

Приклад. Розв’язати задачу Коші для рівняння

$$y' = 1{,}6x + 0{,}5y^2, y(0) = 0{,}3,$$

за методом Рунге–Кутта на проміжку $[0; 0{,}3]$ з кроком $h = 0{,}1$. Обчислення мають виконуватися з чотирма десятковими знаками.

Розв'язок. У наведеному рівнянні

$$f(x,y) = 1{,}6x + 0{,}5y^2.$$

Результати обчислень занесені до табл. 9.4:

Таблиця 9.4

i	x	y	$f(x,y)$	k	Δy
0	0 0,05 0,05 0,1	0,3 0,3 + 0,5 · $0{,}00450 = 0{,}3022$ 0,3 + 0,5 · $0{,}01257 = 0{,}3063$ 0,3 + 0,01269 $= 0{,}3127$	0,0450 0,1257 0,1269 0,2089	$k_1^{(0)}$ = 0,0450 $k_2^{(0)}$ = 0,01257 $k_3^{(0)}$ = 0,01269 $k_4^{(0)}$ = 0,02089	0,00450 0,02514 0,02538 0,02089
			$\Delta y_0 = 1/6 \cdot 0{,}07591 = 0{,}0127$		
1	0,1 0,15 0,15 0,2	0,3 + 0,0127 = 0,3127 0,3127 + 0,5 · 0,02089 = 0,3231 0,3127 + 0,5 · 0,02922 = 0,3273 0,3127 + 0,02936 = 0,3421	0,2089 0,2922 0,2936 0,3785	$k_1^{(1)}$ = 0,02089 $k_2^{(1)}$ = 0,02922 $k_3^{(1)}$ = 0,02936 $k_4^{(1)}$ = 0,03785	0,02089 0,05844 0,05872 0,03785
			$\Delta y_1 = 1/6 \cdot 0{,}17590 = 0{,}0293$		
2	0,2 0,25 0,25 0,3	0,3127 + $0{,}0293$ = 0,3420 0,3420 +0,5 · 0,03785 = 0,3609 0,3420 + 0,5· 0,04651 = 0,3653 0,3420 + 0,04667 = 0,3887	0,3785 0,4651 0,4667 0,5555	$k_1^{(2)}$ = 0,03785 $k_2^{(2)}$ = 0,04651 $k_3^{(2)}$ = 0,04667 $k_4^{(2)}$ = 0,05555	0,03785 0,09302 0,09334 0,05555
			$\Delta y_2 = 1/6 \cdot 0{,}27976 = 0{,}0466$		
3	0,3	0,3420 + $0{,}0466$ = 0,3886	0,5555		

Результуюча функція має вигляд (табл. 9.5):

Таблиця 9.5

x_i	0	0,1	0,2	0,3
y_i	0,3	0,3127	0,3420	0,3886

Метод Адамса

Недоліком методів Рунге-Кутта є потреба для обчислення наступної точки (x_{k+1}, y_{k+1}) розраховувати значення правої частини звичайного диференціального рівняння $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$, кілька разів. Розглянемо різницеві методи, представником яких є метод Адамса.

Застосування цих методів потребує лише одноразового обчислення правої частини звичайного диференціального рівняння на кожному кроці.

Нехай якимось чином були розраховані значення функції y_k для $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-l}$, де $x_{k-i} = x_k - i \cdot h$, h – крок. За відомими $f(x_k, y_k), f(x_{k-1}, y_{k-1}), \dots, f(x_{k-l}, y_{k-l})$ можна побудувати наближене представлення функції $f\big(x, y(x)\big)$ у вигляді функції, що легко інтегрується, наприклад $\varphi(x)$. Тоді можна наближено вважати

$$y_{k+1} = y_{k-l} + \int_{x_{k-l}}^{x_{k+1}} \varphi(x)dx.$$

Найпростіший спосіб наближеного представлення $f\big(x, y(x)\big)$ дає інтерполяція алгебраїчними многочленами. Якщо розглянути інтерполяційний многочлен Ньютона назад, то отримаємо формулу Адамса

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \cdot \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \cdot \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \cdot \Delta^3 q_{k-3} + \frac{251}{720} \cdot \Delta^4 q_{k-4} + \\ + \frac{95}{288} \cdot \Delta^5 q_{k-5} + \cdots,$$

де $q_k = h \cdot f(x_k, y_k), \Delta q_{k-1} = q_k - q_{k-1}, \Delta^2 q_{k-2} = \Delta q_{k-1} - \Delta q_{k-2}$ і т. д.

Похибка методу на кожному кроці має порядок h^{n+1}, де n – найвищий порядок різниці, що використовується у формулі Адамса.

Приклад. Розв’язати задачу Коші для рівняння

$$y' = 1{,}6x + 0{,}5y^2, y(0) = 0{,}3,$$

за методом Адамса з другими різницями на проміжку $[0; 1]$ з кроком $h = 0{,}1$. Обчислення мають виконуватися з чотирма десятковими знаками.

Розв’язок. У наведеному рівнянні

$$f(x, y) = 1{,}6x + 0{,}5y^2.$$

Для застосування методу Адамса треба мати початкові три вузли шуканої функції, які можна взяти з прикладу щодо застосування методу Рунге – Кутта до цього ж рівняння (табл. 9.6):

Таблиця 9.6

k	0	1	2
x_k	0	0,1	0,2
y_k	0,3	0,3127	0,3420

Наступні вузли обчислюватимемо за формулою Адамса і заноситимемо проміжні й шукані результати до табл. 9.7:

Таблиця 9.7

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	q_k	Δq_k	$\Delta^2 q_k$
0	0	0,3	0,0450	0,00450	0,01639	0,00057
1	0,1	0,3127	0,2089	0,02089	0,01696	0,00074
2	0,2	0,3420	0,3785	0,03785	0,01770	0,00103
3	0,3	0,3886	0,5555	0,05555	0,01873	0,00144
4	0,4	0,4533	0,7428	0,07428	0,02017	0,00202
5	0,5	0,5374	0,9445	0,09445	0,02219	0,00290
6	0,6	0,6425	1,1664	0,11664	0,02509	0,00411
7	0,7	0,7711	1,4173	0,14173	0,02920	0,00590
8	0,8	0,9266	1,7093	0,17093	0,03510	
9	0,9	1,1138	2,0603	0,20603		
10	1,0	1,3398				

Значення функції у вузлах обчислюються таким чином:

$$y_3 = y_2 + q_2 + \frac{1}{2}\cdot\Delta q_1 + \frac{5}{12}\cdot\Delta^2 q_0 = 0{,}3420 + 0{,}03785 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}01696 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}00057 = 0{,}3886;$$

$$y_4 = y_3 + q_3 + \frac{1}{2}\cdot\Delta q_2 + \frac{5}{12}\cdot\Delta^2 q_1 = 0{,}3886 + 0{,}05555 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}01770 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}00074 = 0{,}4533;$$

$$y_5 = y_4 + q_4 + \frac{1}{2}\cdot\Delta q_3 + \frac{5}{12}\cdot\Delta^2 q_2 = 0{,}4533 + 0{,}07428 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}01873 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}00103 = 0{,}5374;$$

$$y_6 = y_5 + q_5 + \frac{1}{2}\cdot\Delta q_4 + \frac{5}{12}\cdot\Delta^2 q_3 = 0{,}5374 + 0{,}09445 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}02017 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}00144 = 0{,}6425;$$

$$y_7 = y_6 + q_6 + \frac{1}{2}\cdot\Delta q_5 + \frac{5}{12}\cdot\Delta^2 q_4 = 0{,}6425 + 0{,}11664 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}02219 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}00202 = 0{,}6425;$$

$$y_7 = y_6 + q_6 + \frac{1}{2}\cdot\Delta q_5 + \frac{5}{12}\cdot\Delta^2 q_4 = 0{,}6425 + 0{,}11664 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}02219 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}00202 = 0{,}6425;$$

$$y_8 = y_7 + q_7 + \frac{1}{2} \cdot \Delta q_6 + \frac{5}{12} \cdot \Delta^2 q_5 = 0{,}7711 + 0{,}14173 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02509 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}00290 = 0{,}9266;$$

$$y_9 = y_8 + q_8 + \frac{1}{2} \cdot \Delta q_7 + \frac{5}{12} \cdot \Delta^2 q_6 = 0{,}9266 + 0{,}17093 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02920 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}00411 = 1{,}1138;$$

$$y_{10} = y_9 + q_9 + \frac{1}{2} \cdot \Delta q_8 + \frac{5}{12} \cdot \Delta^2 q_7 = 1{,}1138 + 0{,}20603 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}03510 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}00590 = 1{,}3398.$$

Відповіддю є зміст другого та третього стовпчиків таблиці.

Методи прогнозу та корекції

Однією з рис методів Рунге–Кутта є той факт, що для обчислення наступної точки (x_{k+1}, y_{k+1}) використовується інформація тільки про точку (x_k, y_k), але не про попередні. Також є потреба кожен раз обчислювати значення функції в одній або кількох проміжних точках. Проте ніяк не використовується інформація, накопичена на попередніх етапах розв'язування рівняння

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0.$$

Така інформація використовується в методах прогнозу та корекції.

Як приклад для прогнозу використаємо формулу

$$y_{k+1}^{(0)} = y_{k-1} + 2h \cdot f(x_k, y_k).$$

(за цією формулою неможливо обчислити значення y_1). Геометрично прогноз полягає в тому, що через точку (x_k, y_k) будується пряма з кутовим коефіцієнтом $f(x_k, y_k)$, яка шляхом паралельного переносу зсувається в точку (x_{k-1}, y_{k-1}). Перетин зсуненої прямої з вертикальною прямою $x = x_{k+1}$ забезпечує ідентифікацію ординати $y_{k+1}^{(0)}$, що відображено на рис. 9.4. Для корекції використовується формула

$$y_{k+1}^{(1)} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(0)}\right)\right),$$

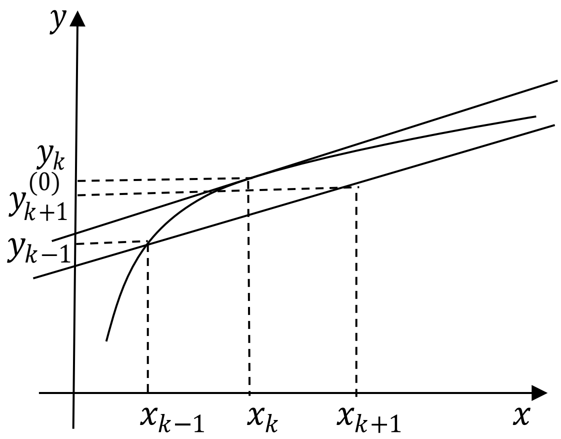

Рис. 9.4. Приклад роботи методу прогнозу та корекції (прогноз ординати)

яка геометрично означає, що проводиться пряма L_1 з кутовим коефіцієнтом $f(x_k, y_k)$ через точку (x_k, y_k). Через точку $\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(0)}\right)$ будується пряма лінія L_2 з кутовим коефіцієнтом $f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(0)}\right)$. Усереднення цих кутових коефіцієнтів дає пряму лінію L з кутовим коефіцієнтом $\frac{1}{2} \cdot \left(f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(0)}\right)\right)$, яка шляхом паралельного переносу зсувається в точку (x_k, y_k). Перетин зсуненої прямої з вертикальною прямою $x = x_{k+1}$ задає ординату $y_{k+1}^{(1)}$, що відображено на рис. 9.5.

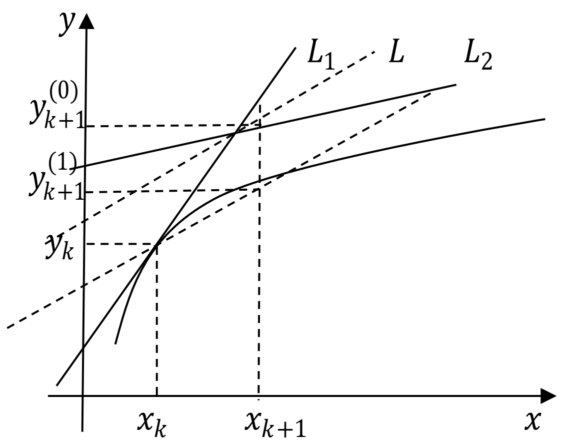

Рис. 9.5. Приклад роботи методу прогнозу та корекції (корекція ординати)

Коректування можна продовжити за формулою

$$y_{k+1}^{(i)} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i-1)}\right)\right)$$

до виконання умови щодо точності

$$\left|y_{k+1}^{(i+1)} - y_{k+1}^{(i)}\right| < \varepsilon.$$

Якщо рівняння $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ розв'язується на проміжку $[a, b]$, то описаний метод застосовується таким чином:

1) обчислюється крок $h = \frac{b-a}{n}$;
2) задається аргумент $x_k = x_0 + k \cdot h, k = 0, 1, 2, \ldots, n$;
3) значення y_1 обчислюється за методом Ейлера;
4) обчислюється прогнозне значення наступної ординати
   $y_{k+1}^{(0)} = y_{k-1} + 2h \cdot f(x_k, y_k), k = 1, 2, \ldots, n-1$;
5) корегується значення ординати
   $y_{k+1}^{(i)} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i-1)}\right)\right), k = 1, 2, \ldots, n-1,$
   доти, доки два послідовні наближення не збігатимуть із заданою точністю;
6) отримані точки $(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \ldots, n$, задають шукану функцію.

Похибка методу має порядок h^3.

Метод Мілна

Нехай для рівняння $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ вже відомі значення функції y_k для $x_k = x_0 + k \cdot h \; (k = 1, 2, 3)$. Тоді для прогнозування наступних значень $y_k \; (k = 4, 5, \ldots)$ використовують першу формулу Мілна

$$y_k^{\text{пр}} = y_{k-4} + \frac{4h}{3} \cdot \left(2f(x_{k-3}, y_{k-3}) - f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 2f(x_{k-1}, y_{k-1})\right),$$

а для корекції значення y_k використовують другу формулу Мілна

$$y_k^{\text{кор}} = y_{k-2} + \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 4f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f\left(x_k, y_k^{\text{пр}}\right)\right).$$

Абсолютна похибка значення $y_k^{\text{кор}}$ наближено визначається за формулою

$$\varepsilon \approx \frac{1}{29} \left| y_k^{\text{кор}} - y_k^{\text{пр}} \right|.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші для рівняння

$$y' = 1{,}6x + 0{,}5y^2, y(0) = 0{,}3,$$

за методом Мілна на проміжку $[0; 1]$ з кроком $h = 0{,}1$. Обчислення мають виконуватися з чотирма десятковими знаками.

Розв'язок. У наведеному рівнянні

$$f(x, y) = 1{,}6x + 0{,}5y^2.$$

Для застосування методу Мілна треба мати початкові чотири вузли шуканої функції, які можна взяти з прикладу щодо застосування методу Рунге – Кутта до цього ж рівняння (табл. 9.8):

Таблиця 9.8

i	0	1	2	3
x_i	0	0,1	0,2	0,3
y_i	0,3	0,3127	0,3420	0,3886

Наступні вузли обчислюватимемо за формулами Мілна.

$$y_4^{\text{пр}} = y_0 + \frac{4h}{3} \cdot \left(2f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) + 2f(x_3, y_3)\right)$$
$$= 0{,}3 + \frac{0{,}4}{3} \cdot (2 \cdot 0{,}2089 - 0{,}3785 + 2 \cdot 0{,}5555) = 0{,}4534;$$
$$f\left(x_4, y_4^{\text{пр}}\right) = 0{,}7428;$$
$$y_4^{\text{кор}} = y_2 + \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_2, y_2) + 4f(x_3, y_3) + f\left(x_4, y_4^{\text{пр}}\right)\right)$$
$$= 0{,}3420 + \frac{0{,}1}{3} \cdot (0{,}3785 + 4 \cdot 0{,}5555 + 0{,}7428) = 0{,}4534;$$
$$y_4^{\text{пр}} = y_4^{\text{кор}} = 0{,}4534.\text{ Отже, } y_4 = 0{,}4534.$$
$$y_5^{\text{пр}} = y_1 + \frac{4h}{3} \cdot \left(2f(x_2, y_2) - f(x_3, y_3) + 2f(x_4, y_4)\right)$$
$$= 0{,}3127 + \frac{0{,}4}{3} \cdot (2 \cdot 0{,}3785 - 0{,}5555 + 2 \cdot 0{,}7428)$$
$$= 0{,}5376;$$
$$f\left(x_5, y_5^{\text{пр}}\right) = 0{,}9445;$$
$$y_5^{\text{кор}} = y_3 + \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_3, y_3) + 4f(x_4, y_4) + f\left(x_5, y_5^{\text{пр}}\right)\right)$$
$$= 0{,}3886 + \frac{0{,}1}{3} \cdot (0{,}5555 + 4 \cdot 0{,}7428 + 0{,}9445) = 0{,}5376;$$
$$y_5^{\text{пр}} = y_5^{\text{кор}} = 0{,}5376.\text{ Отже, } y_5 = 0{,}5376.$$
$$y_6^{\text{пр}} = y_2 + \frac{4h}{3} \cdot \left(2f(x_3, y_3) - f(x_4, y_4) + 2f(x_5, y_5)\right)$$
$$= 0{,}3420 + \frac{0{,}4}{3} \cdot (2 \cdot 0{,}5555 - 0{,}7428 + 2 \cdot 0{,}9445)$$
$$= 0{,}6430;$$
$$f\left(x_6, y_6^{\text{пр}}\right) = 1{,}1667;$$

$$y_6^{\text{кор}} = y_4 + \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_4, y_4) + 4f(x_5, y_5) + f\left(x_6, y_6^{\text{пр}}\right)\right)$$

$$= 0{,}4534 + \frac{0{,}1}{3} \cdot (0{,}7428 + 4 \cdot 0{,}9445 + 1{,}1667) = 0{,}6430;$$

$y_6^{\text{пр}} = y_6^{\text{кор}} = 0{,}6430.$ Отже, $y_6 = 0{,}6430.$

$$y_7^{\text{пр}} = y_3 + \frac{4h}{3} \cdot \left(2f(x_4, y_4) - f(x_5, y_5) + 2f(x_6, y_6)\right)$$

$$= 0{,}3886 + \frac{0{,}4}{3} \cdot (2 \cdot 0{,}7428 - 0{,}9445 + 2 \cdot 1{,}1667)$$

$$= 0{,}7719;$$

$$f\left(x_7, y_7^{\text{пр}}\right) = 1{,}4179;$$

$$y_7^{\text{кор}} = y_5 + \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_5, y_5) + 4f(x_6, y_6) + f\left(x_7, y_7^{\text{пр}}\right)\right)$$

$$= 0{,}5376 + \frac{0{,}1}{3} \cdot (0{,}9445 + 4 \cdot 1{,}1667 + 1{,}4179) = 0{,}7719;$$

$y_7^{\text{пр}} = y_7^{\text{кор}} = 0{,}7719.$ Отже, $y_7 = 0{,}7719.$

$$y_8^{\text{пр}} = y_4 + \frac{4h}{3} \cdot \left(2f(x_5, y_5) - f(x_6, y_6) + 2f(x_7, y_7)\right)$$

$$= 0{,}4534 + \frac{0{,}4}{3} \cdot (2 \cdot 0{,}9445 - 1{,}1667 + 2 \cdot 1{,}4179)$$

$$= 0{,}9278;$$

$$f\left(x_8, y_8^{\text{пр}}\right) = 1{,}7104;$$

$$y_8^{\text{кор}} = y_6 + \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_6, y_6) + 4f(x_7, y_7) + f\left(x_8, y_8^{\text{пр}}\right)\right)$$

$$= 0{,}6430 + \frac{0{,}1}{3} \cdot (1{,}1667 + 4 \cdot 1{,}4179 + 1{,}7104) = 0{,}9280;$$

$y_8^{\text{пр}} \approx y_8^{\text{кор}}.$ Отже, $y_8 = 0{,}9280.$

$$y_9^{\text{пр}} = y_5 + \frac{4h}{3} \cdot \left(2f(x_6, y_6) - f(x_7, y_7) + 2f(x_8, y_8)\right)$$

$$= 0{,}5376 + \frac{0{,}4}{3} \cdot (2 \cdot 1{,}1667 - 1{,}4179 + 2 \cdot 1{,}7106)$$

$$= 1{,}1158;$$

$$f\left(x_9, y_9^{\text{пр}}\right) = 2{,}0625;$$

$$y_9^{\text{кор}} = y_7 + \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_7, y_7) + 4f(x_8, y_8) + f\left(x_9, y_9^{\text{пр}}\right)\right)$$

$$= 0{,}7719 + \frac{0{,}1}{3} \cdot (1{,}4179 + 4 \cdot 1{,}7106 + 2{,}0625) = 1{,}1160;$$

$y_9^{\text{пр}} \approx y_9^{\text{кор}}.$ Отже, $y_9 = 1{,}1160.$

$$y_{10}^{\text{пр}} = y_6 + \frac{4h}{3} \cdot \big(2f(x_7, y_7) - f(x_8, y_8) + 2f(x_9, y_9)\big)$$
$$= 0{,}6430 + \frac{0{,}4}{3} \cdot (2 \cdot 1{,}4179 - 1{,}7106 + 2 \cdot 2{,}0627)$$
$$= 1{,}3431;$$
$$f\big(x_9, y_9^{\text{пр}}\big) = 2{,}5020;$$
$$y_{10}^{\text{кор}} = y_8 + \frac{h}{3} \cdot \Big(f(x_8, y_8) + 4f(x_9, y_9) + f\big(x_{10}, y_{10}^{\text{пр}}\big)\Big)$$
$$= 0{,}9280 + \frac{0{,}1}{3} \cdot (1{,}7106 + 4 \cdot 2{,}0627 + 2{,}5020) = 1{,}3434;$$
$$y_{10}^{\text{пр}} \approx y_{10}^{\text{кор}}. \text{ Отже, } y_{10} = 1{,}3434.$$

Результати обчислень занесені до табл. 9.9:

Таблиця 9.9

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0	0,3	6	0,6	0,6430
1	0,1	0,3127	7	0,7	0,7719
2	0,2	0,3420	8	0,8	0,9280
3	0,3	0,3886	9	0,9	1,1160
4	0,4	0,4534	10	1,0	1,3434
5	0,5	0,5376			

Аналізуючи методи Рунге – Кутта, різницеві методи і методи прогнозу та корекції, бачимо, що в методах Рунге –Кутта використовується інформація щодо чергової точки розв'язку і не використовуються дані про попередні результати, тобто ці методи дають змогу розпочинати розв'язувати диференціальні рівняння. На відміну від них, різницеві методи й методи прогнозу та корекції потребують інформації про кілька перших точок шуканої функції, що виключає їх використання на початку розв'язування рівняння.

Але якщо із застосуванням методів Рунге – Кутта на кожній ітерації треба кілька разів обчислювати значення правої частини рівняння, то методи прогнозу й корекції потребують використання значень правої частини рівняння, що були знайдені на попередніх етапах. Такий підхід економить час на обчислення. Різницеві методи потребують однократно обчислення правої частини рівняння на кожній ітерації та економлять час завдяки використанню різниць відповідних порядків.

Методи Рунге – Кутта дають змогу легко змінювати крок h між сусідніми точками шуканої функції, тоді як зі зміною кроку h в рамках різницевих методів і методів прогнозу та корекції розв’язок диференціального рівняння продовжується з нового початкового кроку, що потребує повернення до розрахунків чергових початкових значень вузлів шуканої функції.

Зважаючи на наведені властивості методів, можна дійти висновку про ефективність їх комбінування, а саме початкові значення шуканої функції є сенс обчислювати за методом Рунге – Кутта, а наступні значення та їх корегування – за різницевими методами і методами прогнозу та корекції.

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть задачу Коші для розв’язування звичайного диференціального рівняння.

2. Опишіть метод степеневих рядів розв’язування звичайного диференціального рівняння.

3. Опишіть метод Ейлера розв’язування звичайного диференціального рівняння.

4. Опишіть удосконалений метод ламаних розв’язування звичайного диференціального рівняння.

5. Опишіть удосконалений метод Ейлера – Коші розв’язування звичайного диференціального рівняння.

6. Опишіть удосконалений метод Ейлера з уточненням розв’язування звичайного диференціального рівняння.

7. Опишіть метод Рунге – Кутта розв’язування звичайного диференціального рівняння.

8. Опишіть метод Адамса розв’язування звичайного диференціального рівняння.

8. У чому полягає ідея методів прогнозу та корекції?

9. Опишіть метод Мілна розв’язування звичайного диференціального рівняння.

10. Дайте порівняльний аналіз досліджених методів розв’язування звичайного диференціального рівняння.

Задачі для самостійного розв'язування

9.1. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння за вдосконаленим методом ламаних на проміжку $[0{,}2;\, 1{,}2]$ з кроком $h = 0{,}1$ і початковою умовою $y(0{,}2) = 0{,}25$:

$$1)\ y' = 0{,}176 \cdot (x^2 + \sin 0{,}8x) + 1{,}247y,$$
$$2)\ y' = 0{,}245 \cdot (x^2 + \cos 0{,}4x) + 1{,}452y,$$
$$3)\ y' = 0{,}184 \cdot (x^2 + \sin 0{,}6x) + 0{,}747y,$$
$$4)\ y' = 0{,}212 \cdot (x^2 + \cos 1{,}2x) + 1{,}544y.$$

Обчислення мають виконуватися з чотирма десятковими знаками.

9.2. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння з завдання 9.1 за методом Ейлера – Коші.

9.3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння за методом Рунге – Кутта на проміжку $[0;\, 0{,}3]$ з кроком $h = 0{,}1$ і початковою умовою $y(0) = 0$:

$$1)\ y' = \frac{\cos y}{1{,}5+x} - 1{,}25y^2,$$
$$2)\ y' = 1 - (x-1)\sin y + 2(x+y),$$
$$3)\ y' = 1 - \sin(0{,}75x - y) + \frac{1{,}75y}{1+x},$$
$$4)\ y' = \cos(x-y) + \frac{1{,}25y}{1{,}5+x}.$$

Обчислення мають виконуватися з чотирма десятковими знаками.

9.4. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння з завдання 9.3 за методом Адамса з другими різницями на проміжку $[0;\, 1]$ з кроком $h = 0{,}1$ і початковою умовою $y(0) = 0$. Обчислення мають виконуватися з чотирма десятковими знаками.

9.5. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння за методом Мілна на проміжку $[0;\, 1]$ з кроком $h = 0{,}1$:

$$1)\ y' = xy + 0{,}2y^2, y(0) = 0{,}7,$$
$$2)\ y' = 0{,}1x^2 + 2y^2, y(0) = 0{,}2,$$
$$3)\ y' = 3x + 0{,}1y^2, y(0) = 0{,}4,$$
$$4)\ y' = 0{,}2x + 3y^2, y(0) = 0{,}2.$$

Обчислення мають виконуватися з чотирма десятковими знаками.

10. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Диференціальні рівняння з частинними похідними

Якщо у диференціальному рівнянні невідомою є функція кількох змінних, тобто невідома функція входить до рівняння разом зі своїми частинними похідними, то рівняння називається *рівнянням із частинними похідними.*

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з двома незалежними змінними мають вигляд

$$A(x,y)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$+F(x,y)\cdot u+G(x,y)=0,$$

де x, y – незалежні змінні, $u = u(x,y)$ – шукана функція, а хоча б одна з функцій $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$ не є нульовою.

Як у звичайних диференціальних рівняннях серед сукупності розв'язків результуючий розв'язок вибирався за допомогою початкової умови, так і в рівняннях із частинними похідними має бути присутня додаткова інформація, але вже у вигляді кривої на площині *XOY*, якщо йдеться про дві незалежні змінні. Така крива може бути як замкненою, так і незамкненою.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку можна поділити на такі типи:

– еліптичні рівняння, якщо $B^2(x,y)-4\cdot A(x,y)\cdot C(x,y)<0$,
– параболічні рівняння, якщо $B^2(x,y)-4\cdot A(x,y)\cdot C(x,y)=0$,
– гіперболічні рівняння, якщо $B^2(x,y)-4\cdot A(x,y)\cdot C(x,y)>0$.

Рівняння можуть одночасно належати до кількох типів залежно від значень функціональних коефіцієнтів.

Ідея методу сіток

Розглянемо задачу Діріхле для лінійного диференціального рівняння другого порядку з двома незалежними змінними виду

$$A(x,y)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+D(x,y)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+E(x,y)\cdot u=$$
$$=F(x,y),$$

де функції $A(x,y), B(x,y), C(x,y), D(x,y), E(x,y), F(x,y)$ визначені в деякій області G, що обмежена кривою Г, яка задана неперервною функцією φ. Усі функції є неперервними в $G+\Gamma$, $A(x,y)$ та $B(x,y)$ – додатними в $G+\Gamma$, а $E(x,y)$ – недодатня в ній. Тобто диференціальне рівняння є еліптичним.

Задача Діріхле полягає в пошуку функції $u=u(x,y)$, що відповідає умові рівняння в області G, а на її границі Г – умові φ.

Для опису методу сіток введемо дві сукупності паралельних прямих

$$x_i = x_0 + i \cdot h, i = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots, y_k = y_0 + k \cdot l, k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots,$$

де h та l – відповідні кроки.

Точки перетину цих прямих називаються вузлами. Два вузли називаються сусідніми, якщо вони віддалені один від одного в напрямку осі OX або осі OY на відстань кроку сітки в напрямку відповідної осі. Розглядаються тільки ті вузли, що належать $G+\Gamma$. Ті з них, у яких усі чотири сусідні вузли належать указаній області, називаються внутрішніми, а ті з них, у яких хоча б один із сусідніх вузлів не належить $G+\Gamma$, називаються граничними. Для кожного вузла будуються різницеві рівняння (похідні наближено замінюються відповідними різницями).

Спочатку розглянемо напрямок OX. Розклад функції $u(x,y_0)$ в ряд Тейлора в околі точки (x_0,y_0) можна записати у вигляді

$$u(x,y_0) = u(x_0,y_0) + (x-x_0) \cdot \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{(x-x_0)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(\zeta,y_0)}{\partial x^2},$$

де ζ перебуває між x та x_0. Якщо покласти $x = x_0 + h$, то

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} - \frac{u(x_0+h,y_0) - u(x_0,y_0)}{h} = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(\zeta,y_0)}{\partial x^2},$$

де $x_0 \le \zeta \le x_0 + h$.

Тоді наближено

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0+h,y_0) - u(x_0,y_0)}{h}$$

з похибкою

$$R = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(\zeta,y_0)}{\partial x^2}.$$

Таким чином отримали праву різницю.

Якщо в ряд Тейлора підставити $x = x_0 - h$, то отримаємо ліву різницю

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0,y_0) - u(x_0-h,y_0)}{h}.$$

Додавши ліву та праву різниці і поділивши на 2, матимемо

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0 - h, y_0)}{2h}.$$

Напишемо тепер наближення для другої частинної похідної, скориставшись правою різницею:

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial u(x_0 + h, y_0)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}}{h}.$$

Підставляючи в останню формулу праву та ліву різниці для перших похідних, матимемо

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{u(x_0 + h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0)}{h^2}.$$

Для оцінки похибки знову використаємо ряд Тейлора:

$$u(x, y_0) = u(x_0, y_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{(x - x_0)^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 u(x_0, y_0)}{\partial x^3} + \frac{(x - x_0)^4}{24} \cdot \frac{\partial^4 u(\zeta, y_0)}{\partial x^4}.$$

Розписавши його для $x = x_0 + h$ та $x = x_0 - h$, а потім додавши дві рівності, отримаємо похибку

$$R = -\frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u(\zeta, y_0)}{\partial x^4},$$

де $x_0 - h \leq \zeta \leq x_0 + h$.

Аналогічні результати можна отримати і для напрямку *OY*:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{u(x_0, y_0 + l) - u(x_0, y_0 - l)}{2l},$$

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} = \frac{u(x_0, y_0 + l) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - l)}{l^2}.$$

Використовуючи отримані вирази, можна переписати диференціальне рівняння із частинними похідними у рівняння зі скінченими різницями. Наприклад, рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

можна записати як

$$\frac{u(x_0 + h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0)}{h^2} + \frac{u(x_0, y_0 + l) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - l)}{l^2} = 0.$$

Якщо застосувати отримані результати до кожного вузла (i, k), де i – номер по осі *OX*, k – номер по осі *OY*, $i, k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(i,k)} = \frac{u_{(i+1,k)} - u_{(i-1,k)}}{2h};\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(i,k)} = \frac{u_{(i,k+1)} - u_{(i,k-1)}}{2l};$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(i,k)} = \frac{u_{(i+1,k)} - 2u_{(i,k)} + u_{(i-1,k)}}{h^2};$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{(i,k)} = \frac{u_{(i,k+1)} - 2u_{(i,k)} + u_{(i,k-1)}}{l^2},$$

де $u_{(i,k)} = u(x_0 + ih, y_0 + \ kl)$.

Підставивши отримані результати для кожного внутрішнього вузла в диференціальне рівняння, отримаємо відповідне рівняння зі скінченими різницями. Якщо вузол є граничним, то $u_{(i,k)}$ має дорівнювати значенню функції φ в точці Г, що є найближчою до вузла. Таким чином, треба розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, у якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих.

Рівняння Лапласа в прямокутній області

Рівняння Лапласа має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

У попередньому пункті для нього було отримано такий результат

$$\frac{u(x_0 + h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0)}{h^2} + \frac{u(x_0, y_0 + l) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - l)}{l^2} = 0.$$

Якщо до рівняння Лапласа застосувати квадратну сітку, тобто $h = l$, то матимемо різницеве рівняння

$$\frac{u(x_0 + h, y_0) + u(x_0 - h, y_0) + u(x_0, y_0 + h) + u(x_0, y_0 - h) - 4u(x_0, y_0)}{h^2} == 0,$$

звідки $u(x_0, y_0) =$

$$= \frac{1}{4} \cdot \big(u(x_0 + h, y_0) + u(x_0 - h, y_0) + u(x_0, y_0 + h) + u(x_0, y_0 - h)\big).$$

Отримана формула описує схему заміни рівняння Лапласа різницевим рівнянням (зверніть увагу, що справа записано середнє арифметичне значень функції $u = u(x, y)$ сусідніх вузлів). Застосуємо цю схему до кожного внутрішнього вузла за умови, що область G є прямокутником із границею Г, яка описується функцією $\varphi(x, y)$:

$$u(x_1, y_1) = \frac{1}{4} \cdot \big(u(x_2, y_1) + \varphi(x_0, y_1) + u(x_1, y_2) + \varphi(x_1, y_0)\big),$$

$$u(x_2, y_1) = \frac{1}{4} \cdot \big(u(x_3, y_1) + u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + \varphi(x_2, y_0)\big),$$

$$u(x_3, y_1) = \frac{1}{4} \cdot \big(u(x_4, y_1) + u(x_2, y_1) + u(x_3, y_2) + \varphi(x_3, y_0)\big),$$

$$\dots$$

$$u(x_{n-1}, y_1) = \frac{1}{4} \cdot \big(\varphi(x_n, y_1) + u(x_{n-2}, y_1) + u(x_{n-1}, y_2) + \varphi(x_{n-1}, y_0)\big),$$

$$u(x_1, y_2) = \frac{1}{4} \cdot \big(u(x_2, y_2) + \varphi(x_0, y_2) + u(x_1, y_3) + u(x_1, y_1)\big),$$

$$u(x_2, y_2) = \frac{1}{4} \cdot \big(u(x_3, y_2) + u(x_1, y_2) + u(x_2, y_3) + u(x_2, y_1)\big),$$

$$\dots$$

$$u(x_{n-1}, y_2) = \frac{1}{4} \cdot \big(\varphi(x_n, y_2) + u(x_{n-2}, y_2) + u(x_{n-1}, y_3) + u(x_{n-1}, y_1)\big),$$

$$\dots$$

$$u(x_1, y_{m-1}) = \frac{1}{4} \cdot \big(u(x_2, y_{m-1}) + \varphi(x_0, y_{m-1}) + \varphi(x_1, y_m) + u(x_1, y_{m-2})\big),$$

$$u(x_2, y_{m-1}) = \frac{1}{4} \cdot \big(u(x_3, y_{m-1}) + u(x_1, y_{m-1}) + \varphi(x_2, y_m) + u(x_2, y_{m-2})\big),$$

$$\dots$$

$$u(x_{n-1}, y_{m-1}) = \frac{1}{4} \times$$

$$\times \big(\varphi(x_n, y_{m-1}) + u(x_{n-2}, y_{m-1}) + \varphi(x_{n-1}, y_m) + u(x_{n-1}, y_{m-2})\big),$$

де

$$u(x_i, y_0) = \varphi(x_i, y_0), i = 0,1, \dots, n,$$

$$u(x_i, y_m) = \varphi(x_i, y_m), i = 0,1, \dots, n,$$

$$u(x_0, y_j) = \varphi(x_0, y_j), j = 0,1, \dots, m,$$

$$u(x_n, y_j) = \varphi(x_n, y_j), j = 0,1, \dots, m$$

є значеннями функції $u = u(x, y)$ у граничних вузлах.

Отримали систему $(n-1) \cdot (m-1)$ лінійних рівнянь з $(n-1) \cdot (m-1)$ невідомими, до розв’язування якої зручно застосувати метод Зейделя. Метод Зейделя в разі застосування до еліптичних різницевих рівнянь називається методом Лібмана.

Приклад. Використовуючи метод сіток, скласти наближений розв’язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа у квадраті

$A(0;0), B(0;1), C(1;1), D(1;0)$; крок $h = 0{,}2$. Використати процес усереднення Лібмана для отримання відповіді з точністю до 0,01.

На границі квадрата функція $\varphi(x,y)$ має вигляд: $\varphi_{AB} = 45y(1-y), \varphi_{BC} = 25x, \varphi_{CD} = 25, \varphi_{AD} = 25x\sin\frac{\pi x}{2}$.

Розв’язок. Область розв’язків має вигляд (рис. 10.1):

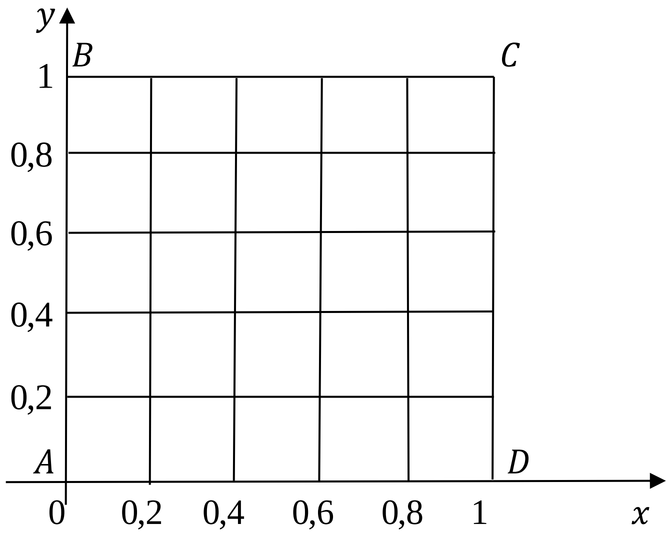

Рис. 10.1. Область розв’язків задачі

Значення функції $\varphi(x,y)$ на сторонах квадрата обчислимо за відповідними формулами. AB:

$$\varphi_{AB} = 45y(1-y);\ \varphi(0;0) = 0;\ \varphi(0;0{,}2) = 7{,}2;$$

$$\varphi(0;0{,}4) = 10{,}8;\ \varphi(0;0{,}6) = 10{,}8;\ \varphi(0;0{,}8) = 7{,}2;\ \varphi(0;1) = 0.$$

BC:

$$\varphi_{BC} = 25x;\ \varphi(0{,}2;1) = 5;\ \varphi(0{,}4;1) = 10;\ \varphi(0{,}6;1) = 15;$$

$$\varphi(0{,}8;1) = 20;\ \varphi(1;1) = 25.$$

CD:

$$\varphi_{CD} = 25;\ \varphi(1;0{,}8) = \varphi(1;0{,}6) = \varphi(1;0{,}4) = \varphi(1;0{,}2)\varphi(1;0) = 25.$$

AD:

$$\varphi_{AD} = 25x\sin\frac{\pi x}{2};\ \varphi(0{,}2;0) = 1{,}545;\ \varphi(0{,}4;0) = 5{,}878;$$

$$\varphi(0{,}6;0) = 12{,}135;\ \varphi(0{,}8;0) = 19{,}021.$$

Пронумеруємо внутрішні вузли. Враховуючи їх невелику кількість, нумерація буде одновимірною (рис. 10.2).

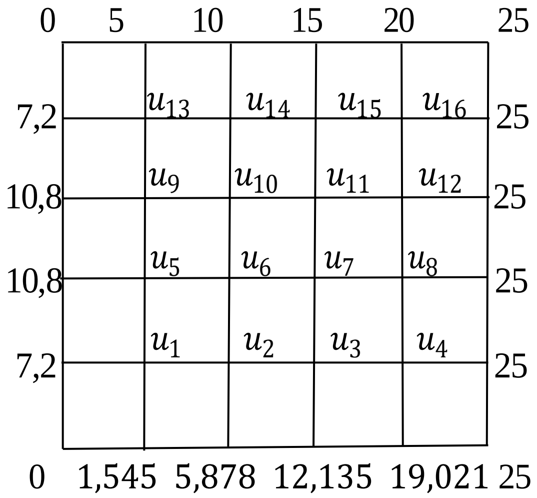

Рис. 10.2. Розміщення вузлів в області розв'язків задачі (прямокутна область)

Використовуючи формулу

$$u(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \big(u(x_0 + h, y_0) + u(x_0 - h, y_0) + u(x_0, y_0 + h) + u(x_0, y_0 - h)\big),$$

побудуємо різницеві рівняння.

$u_1 = \frac{1}{4} \cdot (7{,}2 + 1{,}545 + u_2 + u_5);$ $u_2 = \frac{1}{4} \cdot (5{,}878 + u_1 + u_3 + u_6);$

$u_3 = \frac{1}{4} \cdot (12{,}135 + u_2 + u_4 + u_7);$ $u_4 = \frac{1}{4} \cdot (19{,}021 + 25 + u_3 + u_8);$

$u_5 = \frac{1}{4} \cdot (10{,}8 + u_1 + u_6 + u_9);$ $u_6 = \frac{1}{4} \cdot (u_2 + u_5 + u_7 + u_{10});$

$u_7 = \frac{1}{4} \cdot (u_3 + u_6 + u_8 + u_{11});$ $u_8 = \frac{1}{4} \cdot (25 + u_4 + u_7 + u_{12});$

$u_9 = \frac{1}{4} \cdot (10{,}8 + u_5 + u_{10} + u_{13});$ $u_{10} = \frac{1}{4} \cdot (u_6 + u_9 + u_{11} + u_{14});$

$u_{11} = \frac{1}{4} \cdot (u_7 + u_{10} + u_{12} + u_{15});$ $u_{12} = \frac{1}{4} \cdot (25 + u_8 + u_{11} + u_{16});$

$u_{13} = \frac{1}{4} \cdot (7{,}2 + 5 + u_9 + u_{14});$ $u_{14} = \frac{1}{4} \cdot (10 + u_{10} + u_{13} + u_{15});$

$u_{15} = \frac{1}{4} \cdot (15 + u_{11} + u_{14} + u_{16});$ $u_{16} = \frac{1}{4} \cdot (20 + 25 + u_{12} + u_{15}).$

До розв'язування побудованої системи є сенс застосувати метод Зейделя, розрахункові формули для якого мають вигляд:

$$u_1^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \big(8{,}745 + u_2^{(k-1)} + u_5^{(k-1)}\big);$$

$$u_2^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \big(5{,}878 + u_1^{(k)} + u_3^{(k-1)} + u_6^{(k-1)}\big);$$

$$u_3^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(12{,}135 + u_2^{(k)} + u_4^{(k-1)} + u_7^{(k-1)}\right);$$

$$u_4^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(44{,}021 + u_3^{(k)} + u_8^{(k-1)}\right);$$

$$u_5^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(10{,}8 + u_1^{(k)} + u_6^{(k-1)} + u_9^{(k-1)}\right);$$

$$u_6^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(u_2^{(k)} + u_5^{(k)} + u_7^{(k-1)} + u_{10}^{(k-1)}\right);$$

$$u_7^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(u_3^{(k)} + u_6^{(k)} + u_8^{(k-1)} + u_{11}^{(k-1)}\right);$$

$$u_8^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(25 + u_4^{(k)} + u_7^{(k)} + u_{12}^{(k-1)}\right);$$

$$u_9^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(10{,}8 + u_5^{(k)} + u_{10}^{(k-1)} + u_{13}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{10}^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(u_6^{(k)} + u_9^{(k)} + u_{11}^{(k-1)} + u_{14}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{11}^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(u_7^{(k)} + u_{10}^{(k)} + u_{12}^{(k-1)} + u_{15}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{12}^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(25 + u_8^{(k)} + u_{11}^{(k)} + u_{16}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{13}^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(12{,}2 + u_9^{(k)} + u_{14}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{14}^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(10 + u_{10}^{(k)} + u_{13}^{(k)} + u_{15}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{15}^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(15 + u_{11}^{(k)} + u_{14}^{(k)} + u_{16}^{(k-1)}\right);$$

$$u_{16}^{(k)} = \frac{1}{4} \cdot \left(45 + u_{12}^{(k)} + u_{15}^{(k)}\right).$$

Для обчислення початкових значень змінних розглянемо чотири горизонталі, на яких розташовані невідомі. Будемо вважати, що функція $u = u(x, y)$ по цих горизонталях розподілена рівномірно. Перша горизонталь містить u_1, u_2, u_3, u_4 в межах точок 7,2 та 25. Тоді відстань між змінними становить $(25 - 7{,}2)/5 = 3{,}56$. Отже,

$$u_1^{(0)} = 7{,}2 + 3{,}56 = 10{,}76;\ u_2^{(0)} = 10{,}76 + 3{,}56 = 14{,}32;$$

$$u_3^{(0)} = 14{,}32 + 3{,}56 = 17{,}88;\ u_4^{(0)} = 17{,}88 + 3{,}56 = 21{,}44.$$

Друга горизонталь містить u_5, u_6, u_7, u_8 у межах точок 10,8 та 25. Тоді відстань між змінними становить $(25 - 10{,}8\ )/5 = 2{,}84$. Отже,

$$u_5^{(0)} = 10{,}8 + 2{,}84 = 13{,}64;\ u_6^{(0)} = 13{,}64 + 2{,}84 = 16{,}48;$$

$$u_7^{(0)} = 116{,}48 + 2{,}84 = 19{,}32;\ u_8^{(0)} = 19{,}32 + 2{,}84 = 22{,}16.$$

Третя горизонталь повторює другу, тому

$$u_9{}^{(0)} = 10{,}8 + 2{,}84 = 13{,}64;\ u_{10}{}^{(0)} = 13{,}64 + 2{,}84 = 16{,}48;$$

$$u_{11}{}^{(0)} = 116{,}48 + 2{,}84 = 19{,}32;\ u_{12}{}^{(0)} = 19{,}32 + 2{,}84 = 22{,}16.$$

Четверта горизонталь повторює першу, тому

$$u_{13}{}^{(0)} = 7{,}2 + 3{,}56 = 10{,}76;\ u_{14}{}^{(0)} = 10{,}76 + 3{,}56 = 14{,}32;$$

$$u_{15}{}^{(0)} = 14{,}32 + 3{,}56 = 17{,}88;\ u_{16}{}^{(0)} = 17{,}88 + 3{,}56 = 21{,}44.$$

Розраховані нульові значення заносимо до табл. 10.1:

Таблиця 10.1

1	0	5	10	15	20	25
0,8	7,2	10,76	14,32	17,88	21,44	25
0,6	10,8	13,64	16,48	19,32	22,16	25
0,4	10,8	13,64	16,48	19,32	22,16	25
0,2	7,2	10,76	14,32	17,88	21,44	25
0	0	1,545	5,878	12,135	19,021	25
y x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Чергові перераховані наближені розв’язки заносимо до наступної табл. 10.2:

Таблиця 10.2

1	9,790	13,258	17,027	20,904	2	9,346	12,708	16,561	20,679
	12,641	15,363	18,411	21,589		11,927	14,460	17,630	21,153
	12,524	15,170	18,241	21,506		11,754	14,243	17,443	21,079
	9,176	12,354	16,312	20,623		8,406	11,442	15,610	20,384
3	9,092	12,371	16,287	20,544	4	8,930	12,158	16,116	20,458
	11,461	13,829	17,100	20,887		11,150	13,414	16,761	20,718
	11,239	13,518	16,856	20,771		10,877	13,036	16,454	20,567
	7,985	10,929	15,189	20,074		7,728	10,581	14,911	19,926
5	8,826	12,021	16,005	20,403	6	8,758	11,933	15,934	20,368
	10,945	13,144	16,542	20,608		10,811	12,968	16,399	20,537
	10,634	12,712	16,189	20,433		10,472	12,497	16,014	20,345
	7,551	10,344	14,715	19,826		7,431	10,184	14,583	19,759
7	8,714	11,875	15,887	20,344	8	8,685	11,837	15,851	20,327
	10,723	12,853	16,306	20,490		10,665	12,777	16,221	20,457
	10,365	12,365	15,899	20,490		10,294	12,263	15,875	20,263

	7,350	10,077	14,496	19,716		7,297	10,007	14,439	19,687
9	8,666	11,811	15,835	20,319	10	8,654	11,796	15,823	20,313
	10,628	12,725	16,203	20,439		10,603	12,695	16,178	20,427
	10,248	12,215	15,778	20,228		10,220	12,165	15,744	20,210
	7,262	9,960	14,414	19,675		7,238	9,936	14,381	19,658
11	8,646	11,786	15,815	20,308	12	8,640	11,779	15,809	20,306
	10,587	12,674	16,162	20,418		10,576	12,661	16,150	20,413
	10,198	12,137	15,722	20,199		10,184	12,120	15,708	20,192
	7,225	9,912	14,362	19,648		7,214	9,898	14,351	19,643
13	8,637	11,774	15,806	20,304	14	8,635	11,772	15,803	20,303
	10,569	12,652	16,143	20,409		10,565	12,646	16,138	20,407
	10,176	12,108	15,699	20,188		10,170	12,101	15,693	20,185
	7,207	9,889	14,344	19,639		7,202	9,883	14,339	19,637
15	8,634	11,770	15,802	20,302					
	10,562	12,642	16,135	20,405					
	10,167	12,096	15,689	20,183					
	7,200	9,879	14,336	19,636					

Останні дві таблиці містять відповідні значення, які відрізняються менше за 0,01, тому обчислення припиняються. Останні значення округлюємо до сотих, отримуючи відповідь (табл. 10.3):

Таблиця 10.3

1	0	5	10	15	20	25
0,8	7,2	8,63	11,77	15,80	20,30	25
0,6	10,8	10,56	12,64	16,14	20,40	25
0,4	10,8	10,17	12,10	15,69	20,18	25
0,2	7,2	7,20	9,88	14,34	19,64	25
0	0	1,54	5,88	12,14	19,02	25
y x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Рівняння Лапласа в довільній області

Назагал граничні вузли не розташовані на лінії Г. Це питання розв’язується шляхом складання для значень функції у граничних вузлах особливих рівнянь, які відрізняються від рівнянь для внутрішніх вузлів.

Розглянемо рис. 10.3, де точка A є граничним вузлом, B є точкою перетину лінії Г з прямою, що належить сітці, при цьому $AB = \delta < h$, а точка C – найближчий до A внутрішній вузол, який розташований на продовженні відрізка AB.

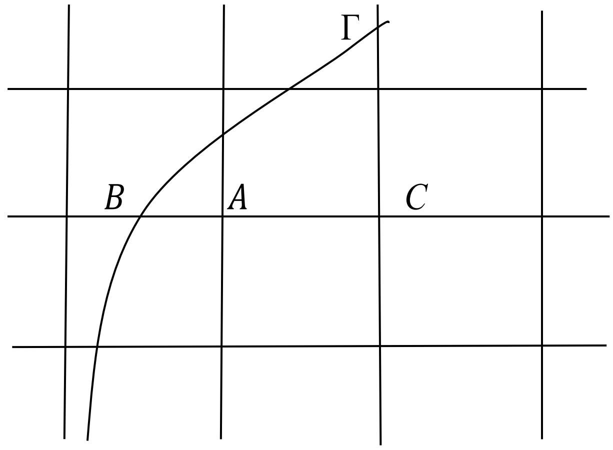

Рис. 10.3. Приклад розташування кривої Г та граничного вузла

Тоді для вузла A можна написати рівняння

$$u_A = \frac{\delta \cdot u_C + h \cdot \varphi_B}{\delta + h}.$$

Рівняння означає, що значення u_A отримується лінійною інтерполяцією значень u_C та φ_B. Похибка буде мати порядок h^2.

Ще одна форма запису цієї формули:

$$u_A = \varphi_B + \delta \cdot \frac{u_C - \varphi_B}{\delta + h}.$$

Якщо точка A лежить усередині області G, то значення δ беремо зі знаком «+», а якщо поза межами області G, то значення δ беремо зі знаком «–».

Приклад. Використовуючи метод сіток, скласти наближений розв’язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в області, що обмежена кривою Г: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, де $\varphi(x, y) = 0{,}5(|x| + |y|)$; крок $h = 1$. Використати процес уточнення Лібмана для отримання відповіді з точністю до 0,01.

Розв’язок. Так як граничною кривою є еліпс з центром в початку координат та півосями 4 і 3, то побудуємо розв’язок лише в першому квадранті декартової системи координат (рис. 10.4).

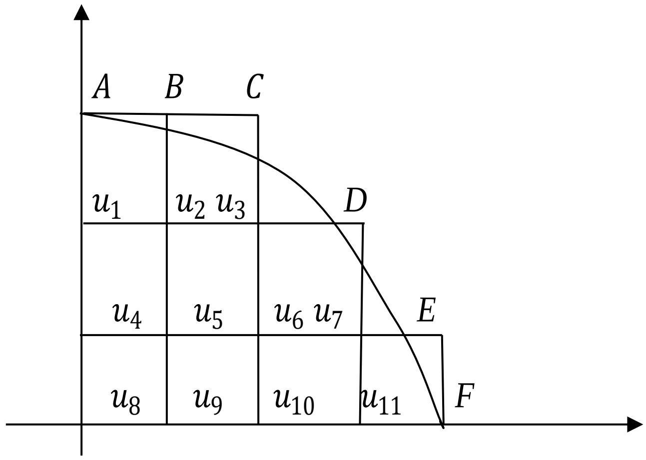

Рис. 10.4. Розміщення вузлів в області розв'язків задачі (довільна область)

Із кроком $h = 1$ по осі *OX* значення y занесено до табл. 10.4.:

Таблиця 10.4

Граничні вузли	*A*	*B*	*C*	*D*	*F*
x	0	1	2	3	4
y	3	2,90	2,60	1,98	0

Значення функції $\varphi(x, y)$ у граничних вузлах обчислюємо за формулою $\varphi(x, y) = 0{,}5(|x| + |y|)$:

$$\varphi_A = 0{,}5(0 + 3) = 1{,}5;\ \varphi_B = 0{,}5(1 + 2{,}9) = 1{,}95;$$

$$\varphi_C = 0{,}5(2 + 2{,}6) = 2{,}3;\ \varphi_D = 0{,}5(3 + 1{,}98) = 2{,}49;$$

$$\varphi_F = 0{,}5(4 + 0) = 2.$$

Щоб знайти значення шуканої функції $u = u(x, y)$ у внутрішніх вузлах $u_i, i = 1, 2, \ldots, 11$, побудуємо відповідні різницеві рівняння:

$$u_1 = \frac{1}{4} \cdot (1{,}5 + 2u_2 + u_4);\ u_2 = \frac{1}{4} \cdot (1{,}95 + u_1 + u_3 + u_5);$$

$$u_3 = \frac{1}{4} \cdot (4{,}49 + u_2 + u_6);\ u_4 = \frac{1}{4} \cdot (u_1 + 2u_5 + u_8);$$

$$u_5 = \frac{1}{4} \cdot (u_2 + u_4 + u_6 + u_9);\ u_6 = \frac{1}{4} \cdot (u_3 + u_5 + u_7 + u_{10});$$

$$u_7 = \frac{1}{4} \cdot (4{,}88 + u_6 + u_{11});\ u_8 = \frac{1}{4} \cdot (2u_4 + 2u_9);$$

$$u_9 = \frac{1}{4} \cdot (u_8 + u_{10} + 2u_5);\ u_{10} = \frac{1}{4} \cdot (u_9 + u_{11} + 2u_6);$$

$u_{11} = \dfrac{1}{4} \cdot (2 + 2u_7 + u_{10})$.

Розв'язком побудованої системи є значення $u_1 = 1{,}91$; $u_2 = 2{,}05$; $u_3 = 2{,}10$; $u_4 = 2{,}05$; $u_5 = 2{,}11$; $u_6 = 2{,}18$; $u_7 = 2{,}34$; $u_8 = 2{,}11$; $u_9 = 2{,}13$; $u_{10} = 2{,}19$; $u_{11} = 2{,}28$.

Значення в граничних точках перераховуються за інтерполяційною формулою $u_{A^*} = \varphi_A + \delta \cdot \frac{u_Z - \varphi_A}{\delta + 1}$,
де A^* – граничний вузол; A – найближча до A^* точка, що належить граничній лінії Г; Z – внутрішній вузол, що розташований на одній прямій з A; δ – відстань між A^* та A; $\delta > 0$, якщо A^* розташована всередині області *G*, $\delta < 0$, якщо A^* перебуває поза межами області *G*. Тоді

$$u_A = \varphi_A = 1{,}5;$$

$$\delta_B = 2{,}90 - 3 = -0{,}1;\ u_{B^*} = 1{,}95 - 0{,}1 \cdot \frac{2{,}05 - 1{,}95}{0{,}9} = 1{,}94;$$

$$\delta_C = 2{,}60 - 3 = -0{,}4;\ u_{C^*} = 2{,}3 - 0{,}4 \cdot \frac{2{,}1 - 2{,}3}{0{,}6} = 2{,}43;$$

$$\delta_D = 1{,}98 - 2 = -0{,}02;\ u_{D^*} = 2{,}49 - 0{,}02 \cdot \frac{2{,}34 - 2{,}49}{0{,}98} = 2{,}49;$$

$$\delta_E = 3{,}77 - 4 = -0{,}23;\ u_{E^*} = 2{,}39 - 0{,}23 \cdot \frac{2{,}34 - 2{,}39}{0{,}77} = 2{,}40;$$

$$u_F = \varphi_F = 2.$$

Отримані результати утворюють початковий розв'язок (табл. 10.5):

Таблиця 10.5

1,5	1,94	2,43		
1,91	2,05	2,10	2,49	
2,05	2,11	2,18	2,34	2,40
2,11	2,13	2,19	2,28	2

Процес уточнення (процес Лібмана) полягає в обчисленні нових значень функції у внутрішніх вузлах як середнє арифметичне значень функції в сусідніх вузлах, а у граничних вузлах – за вищенаведеною інтерполяційною формулою. Перерахунок продовжується доти, доки відповідні значення не збігатимуть із заданою точністю 0,01. Результати обчислень наведені в табл. 10.6–10.12:

Таблиця 10.6

1,5	1,94	2,31		
1,91	2,02	2,29	2,49	
2,06	2,10	2,18	2,34	2,40
2,09	2,13	2,19	2,22	2

Таблиця 10.7

1,5	1,94	2,33		
1,90	2,06	2,25	2,49	
2,05	2,10	2,23	2,32	2,41
2,10	2,12	2,18	2,22	2

Таблиця 10.8

1,5	1,94	2,31		
1,92	2,05	2,28	2,49	
2,05	2,12	2,21	2,34	2,40
2,09	2,12	2,20	2,20	2

Таблиця 10.9

1,5	1,94	2,33		
1,91	2,06	2,26	2,49	
2,06	2,11	2,23	2,33	2,41
2,09	2,14	2,19	2,22	2

Таблиця 10.10

1,5	1,94	2,31		
1,92	2,06	2,28	2,49	
2,06	2,12	2,22	2,34	2,40
2,10	2,13	2,20	2,21	2

Таблиця 10.11

1,5	1,94	2,32		
1,92	2,06	2,27	2,49	
2,06	2,12	2,23	2,33	2,41
2,10	2,20	2,22	2,22	2

Таблиця 10.12

1,5	1,94	2,32		
1,92	2,06	2,27	2,49	
2,06	2,12	2,23	2,33	2,41
2,10	2,20	2,22	2,22	2

Запитання для самоперевірки

1. Який вигляд мають диференціальні рівняння із частинними похідними?

2. Опишіть задачу Діріхле для лінійного диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку з двома незалежними

змінними. На які типи поділяються рівняння вказаного виду?

3. У чому полягає ідея методу сіток щодо наближеного розв'язування диференціальних рівнянь із частинними похідними?

4. Виведіть формули переходу до різницевих рівнянь.

5. Опишіть процес розв'язування рівняння Лапласа для прямокутної області.

6. Опишіть процес розв'язування рівняння Лапласа для довільної області.

Задачі для самостійного розв'язування

10.1. Використовуючи метод сіток, скласти наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа у квадраті $A(0;0), B(0;1), C(1;1), D(1;0)$; крок $h = 0{,}2$. Під час розв'язування задачі використати процес усереднення Лібмана для отримання відповіді з точністю до 0,01. На границі квадрата функція $\varphi(x, y)$ має вигляд:

1) $\varphi_{AB} = 15\sqrt{y}, \varphi_{BC} = 15(1-x), \varphi_{CD} = 30y(1-y), \varphi_{AD} = 0,$

2) $\varphi_{AB} = 30\cos\frac{\pi y}{2}, \varphi_{BC} = 20x(1-x), \varphi_{CD} = 25y(1-y^2),$

$$\varphi_{AD} = 30(1-x^2),$$

3) $\varphi_{AB} = 10y^2(1-y), \varphi_{BC} = 30\sin\pi x, \varphi_{CD} = 0,$

$$\varphi_{AD} = 15x(1-x^2),$$

4) $\varphi_{AB} = 25y, \varphi_{BC} = 25(1-x^2), \varphi_{CD} = 30\sqrt{y}(1-y), \varphi_{AD} = 0.$

10.2. Використовуючи метод сіток, скласти наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа; крок $h = 1$. Під час розв'язування задачі використати процес уточнення Лібмана для отримання відповіді з точністю до 0,01. Початкові умови:

1) $\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1, \varphi(x, y) = 0{,}5|x| + |y|,$

2) $\Gamma: \begin{cases} |x| = 4 - y^2 \\ x \in [-4{,}4] \end{cases}, \varphi(x, y) = |x| + 0{,}5|y|,$

3) $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1, \varphi(x, y) = |x| + 0{,}5|y|,$

4) $\Gamma: (|x| + 5)(|y| + 5) = 45, \varphi(x, y) = |x| + 0{,}5|y|.$

Список літератури

1. Чисельні методи : конспект лекцій / О. В. Горда. – Київ : КНУБА, 2009. – 76 с.
2. Чисельні методи. Ч. 2 : конспект лекцій / О. В. Горда. – Київ : КНУБА, 2010. – 72 с.
3. Овчинников П. П., Міхайленко В. М. Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 2. – Київ : Техніка, 2004 – 792 с.
4. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці : підручник для студ. вищ. навч. закл. / За ред. М. З. Згуровського. – Київ : Вид. група BHV, 2006. – 479 с.
5. Ісаханов Г. В., Чорний С. М. Чисельні методи розв’язання задач будівництва. – Київ : Вища школа, 1995. – 374 с.
6. Сплайн-функції та їх застосування : навч. посіб. / Б. П. Довгий, А. В. Ловейкін, Є. С. Вакал, Ю. Є. Вакал. – Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. – 117 с.
7. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. – М.: Издательство «Мир», 1977. – 584 с.
8. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по вычислительной математике : учеб. пособие для техникумов. – М.: Высш. школа, Київ 1990. – 208 с.
9. Чисельні методи: методичні вказівки до практичних занять / О. І. Баліна, І. С. Безклубенко, О. В. Горда, Н. І. Полтораченко. – Київ : КНУБА, 2011. – 44 с.
10. Чисельні методи. Чисельне диференціювання та інтегрування: методичні вказівки до практичних занять / О. В. Горда, Н. І. Полтораченко. – Київ : КНУБА, 2012. – 36 с.

Навчальне видання

ПОЛТОРАЧЕНКО Наталія Іванівна,
ТЕРЕНЧУК Світлана Анатоліївна,
УБАЙДУЛЛАЄВ Юсуфжон Нуруллайович

ПРАКТИКУМ
ІЗ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

Навчальний посібник

Редагування та коректура *Т. В. Івченко*
Комп'ютерне верстання *Л.В. Лабунець*

Підписано до друку 14.09.2023. Формат 60 х 84 $_{1/16}$
Ум. друк. арк. 9,3. Обл.-вид. акр. 10,0.
Тираж 25 прим. Вид. № 27/І-23. Зам. №19/1-23

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002