УДК 539.3:589.03:589.04:624.04

Станкевич А.М., канд. техн. наук
Шкельов Л.Т., канд. техн. наук

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОІВАНОГО СТАНУ ПРУЖНОГО ПРОСТОРОВОГО ТІЛА, ЯКЕ МАЕ ФОРМУ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Викладено методику визначення напружено-деформованого стану просторового пружного тіла, яка будується на застосуванні методу прямих. За невідомі прийнято компоненти вектора переміщень. За умови дискретизації у двох напрямах, тримірна задача зводиться до одномірної. Прийнята періодичність зміни невідомих у напрямах дискретизації дозволяє отримати матрицю диференціальних рівнянь, для якої знаходиться точне аналітичне рішення.

Застосування методу прямих для визначення напружено-деформованого стану (НДС) пластин, оболонок та пластинчастих систем викладено у роботах [1,4]. У даній роботі запропонований метод поширюється на визначення НДС пружного просторового тіла, яке має форму паралелепіпеда. В якості розв'язуючих функцій прийняті складові вектора переміщень, які паралельні координатним осям $U_x(x,y,z)$, $U_y(x,y,z)$, $U_z(x,y,z)$. Вони є невідомими функціями трьох змінних.

Для розв'язку задачі застосовується метод прямих, при використанні якого потрібно провести дискретизацію шуканих функцій. Дискретизацію проводимо за напрямками вздовж осі OY та OZ (рис. 1).

У напрямку вздовж осі OX зберігається безперервність невідомих функцій. Внаслідок виконання дискретизації здійснюється перехід від трьох функцій, кожна з яких залежить від трьох змінних, до системи функцій однієї змінної x. Загальна кількість рівнянь дорівнює $3\times n\times m$, де n та m - кількість точок дискретизації відповідно у напрямку осі OY та OZ. Система апроксимуючих функцій однієї змінної визначається вздовж прямих, які паралельні осі OX. Прямі проведено крізь вузлові точки сітки дискретизації при $n=5$ та $m=4$ (рис. 1). Об'єднаємо функції у три блочні вектори $\overline{U}_x$, $\overline{U}_y$, $\overline{U}_z$, кожний з яких складається з n блоків розміром m. У блок входять функції, які відповідають точкам сітки, розташованим на лініях, паралельних осі OZ:

© Станкевич А.М., Шкельов Л.Т.

$$\overline{U} = \begin{vmatrix} (\overline{U})_1 \\ \vdots \\ (\overline{U})_i \\ \vdots \\ (\overline{U})_n \end{vmatrix}; \qquad (\overline{U})_i = \begin{vmatrix} U_{i1'} \\ \vdots \\ U_{ik'} \\ \vdots \\ U_{im'} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

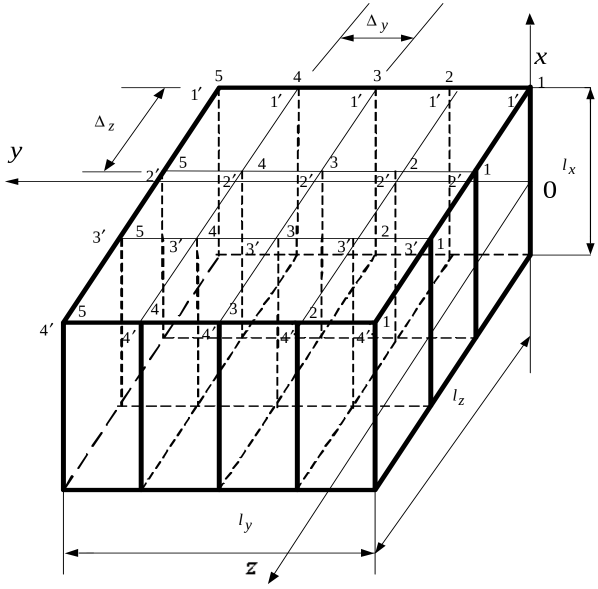

Рис. 1. Схема нанесення прямих

Система рівнянь рівноваги в переміщеннях для просторового тіла має вигляд:

$$\left(\mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot U_x + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y} + \left(\mu_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot U_y + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y \partial z} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y \partial z} + \left(\mu_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot U_z = 0.$$

Тут позначено:

$$\mu_1 = 2(1-\mu)\,,\; \mu_2 = (1-2\mu)\,,$$

де μ - коефіцієнт Пуассона.

Запишемо цю систему з врахуванням прийнятого характеру апроксимації. У цьому випадку потрібно, як відомо, безперервні похідні замінити кінцево-різницевими співвідношеннями. Вони містять значення функцій, які відповідають одному ряду позаконтурних точок дискретизації (рис. 2).

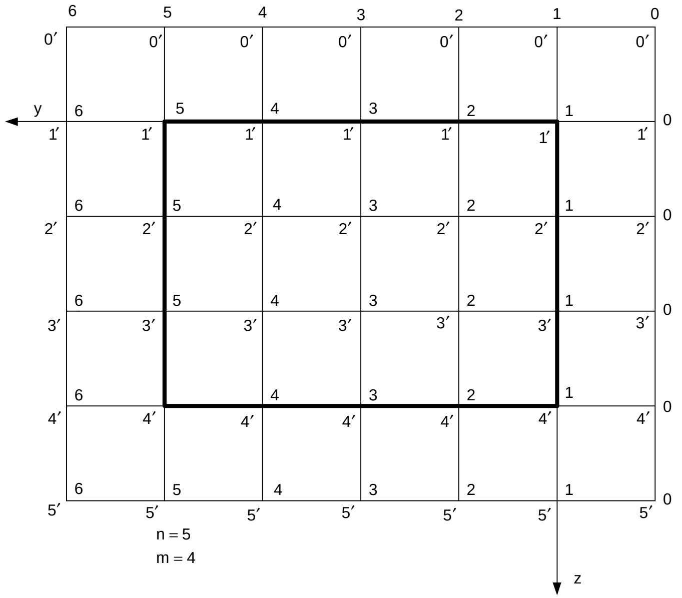

Рис. 2. Розташування контурних та позаконтурних точок

Якщо допустити, що функції у напрямку осей OY та OZ мають періодичний характер зміни, це дозволяє встановити залежності між позаконтурними функціями та функціями у точках на контурі тіла.

Виходячи з даного припущення, отримуємо можливість записати такі залежності:

- функції, які відповідають позаконтурній лінії “0“ (рис. 2), дорівнюють функціям, які відповідають лінії “ n ”;
- функції, які відповідають позаконтурній лінії “($n+1$)”, дорівнюють функціям, які відповідають лінії “1“.

Аналогічні співвідношення можна встановити для функцій вздовж ліній “$0'$” та “$(m+1)$”, паралельних осі OY. Вказані залежності враховуються при складанні кінцево-різницевих виразів. Тоді:

$$
\begin{gathered}
\left[\mu_1(E_n(E_m))\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right]\cdot\overline{U}_x+\\
\frac{1}{\Delta_y}(A_n(E_m))\frac{d\overline{U}_y}{dx}+\frac{1}{\Delta_z}(E_n(A_m))\frac{d\overline{U}_z}{dx}=0 \quad ,\\
\frac{1}{\Delta_y}(B_n(E_m))\frac{d\overline{U}_x}{dx}+\left[\mu_2(E_n(E_m))\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\mu_1}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\right.\\
\left.+\frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right]\times\overline{U}_y+\frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(B_n(A_m))\cdot\overline{U}_z=0 \quad ,\\
\frac{1}{\Delta_z}(E_n(B_m))\frac{d\overline{U}_x}{dx}+\frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(A_n(B_m))\cdot\overline{U}_y+\\
+\left[\mu_2(E_n(E_m))\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_1}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right]\cdot\overline{U}_z=0 \quad .
\end{gathered} \tag{3}
$$

Матриці, які входять до рівнянь цієї системи, мають блочну структуру та є матрицями кінцево-різницевого диференціювання. Докладно властивості цих матриць розглянуто у роботі [1].

Структуру блочних матриць розглянемо на прикладі матриці $(B_n(A_m))$, яка має вигляд:

$$
(B_n(A_m))=\underbrace{\begin{vmatrix}
(A_m) & & & & -(A_m)\\
-(A_m) & (A_m) & & & \\
 & \ddots & \ddots & & \\
 & & -(A_m) & (A_m) & \\
 & & & -(A_m) & (A_m)
\end{vmatrix}}_{n}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\}n \tag{4}
$$

Загальний вигляд блочної матриці відповідає матриці B_n, але елементами цієї матриці є блоки, які відповідають матриці A_m.

Множення на матрицю $(B_n(A_m))$ відповідає змішаній похідній. Інші блочні матриці мають такий самий принцип побудови.

Рівняння (3) це система звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Кількість рівнянь дорівнює $3 \cdot n \cdot m$. Для розв'язання системи використовуємо операторний метод. Похідні по змінній x визначаються як добуток функції на відповідну ступінь оператора диференціювання s з додаванням початкових значень функції та її похідних. Як приклад, розглянемо вигляд другої похідної:

$$\frac{d^2\overline{U}}{dx^2} = s^2 \cdot \overline{U} - s \cdot \overline{U}_0 - \overline{U}_0 . \tag{5}$$

Враховуючи це співвідношення у системі (3), отримаємо наступне:

$$\begin{gathered}
\left[\mu_1 s^2 (E_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right] \cdot \overline{U}_x + \\
+ \frac{s}{\Delta_y}(A_n(E_m)) \cdot \overline{U}_y + \frac{s}{\Delta_z}(E_n(A_m)) \cdot \overline{U}_z = \overline{P}_x, \\
\frac{s}{\Delta_y}(B_n(E_m)) \cdot \overline{U}_x + \left[\mu_2 s^2 (E_n(E_m)) + \frac{\mu_1}{\Delta_y^2}(C_n(E_m)) + \right. \\
\left. + \frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right] \cdot \overline{U}_y + \frac{1}{\Delta_y \Delta_z}(B_n(A_m)) \cdot \overline{U}_z = \overline{P}_y, \\
\frac{s}{\Delta_z}(E_n(B_m)) \cdot \overline{U}_x + \frac{1}{\Delta_y \Delta_z}(A_n(B_m)) \cdot \overline{U}_y + \\
+ \left[\mu_2 s^2 (E_n(E_m)) + \frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m)) + \frac{\mu_1}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right] \cdot \overline{U}_z = \overline{P}_z .
\end{gathered} \tag{6}$$

Праві частини отриманих рівнянь мають вигляд:

$$\begin{gathered}
\overline{P}_x = \mu_1 s (E_n(E_m)) \cdot \overline{U}_{x0} + \mu_1 (E_n(E_m)) \cdot \overline{U}'_{x0} + \\
+ \frac{1}{\Delta_y}(A_n(E_m)) \cdot \overline{U}_y + \frac{1}{\Delta_z}(E_n(A_m)) \cdot \overline{U}_{z0}, \\
\overline{P}_y = \frac{1}{\Delta_y}(B_n(E_m)) \cdot \overline{U}_{x0} + \mu_2 s (E_n(E_m)) \cdot \overline{U}_{y0} + \mu_2 (E_n(E_m)) \cdot \overline{U}'_{y0}, \\
\overline{P}_z = \frac{1}{\Delta_z}(E_n(B_m)) \cdot \overline{U}_{x0} + \mu_2 s (E_n(E_m)) \cdot \overline{U}_{z0} + \mu_2 (E_n(E_m)) \cdot \overline{U}'_{z0}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Введемо позначення:

$$(C_x)=\left[\mu_1 s^2(E_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right],$$

$$(C_y)=\left[\mu_2 s^2(E_n(E_m))+\frac{\mu_1}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right], \tag{8}$$

$$(C_z)=\left[\mu_2 s^2(E_n(E_m))+\frac{\mu_2}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))+\frac{\mu_1}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))\right].$$

Усі матриці (C_x), (C_y), (C_z) мають однакову блочну структуру та відрізняються лише розташуванням коефіцієнтів μ_1 та μ_2.

З врахуванням прийнятих позначень, система (4) набуває вигляду:

$$(C_x)\cdot\overline{U}_x+\frac{s}{\Delta_y}(A_n(E_m))\cdot\overline{U}_y+\frac{s}{\Delta_z}(E_n(A_m))\cdot\overline{U}_z=\overline{P}_x \ ,$$

$$\frac{s}{\Delta_y}(B_n(E_m))\cdot\overline{U}_x+(C_y)\cdot\overline{U}_y+\frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(B_n(A_m))\cdot\overline{U}_z=\overline{P}_y \ , \tag{9}$$

$$\frac{s}{\Delta_z}(E_n(B_m))\cdot\overline{U}_x+\frac{1}{\Delta_y\Delta_z}(A_n(B_m))\cdot\overline{U}_y+(C_z)\cdot\overline{U}_z=\overline{P}_z \ .$$

Матрицю C можна представити у вигляді добутку трьох матриць, елементи яких дорівнюють власним числам та власним векторам матриці C

$$C=V\cdot\{\lambda_i\}\cdot V \ . \tag{10}$$

Елементи квадратної матриці V дорівнюють компонентам власних векторів матриці C та визначаються за формулою:

$$V_{ij}=\frac{\sqrt{n}}{n}\left(\sin\frac{2ij\pi}{n}+\cos\frac{2ij\pi}{n}\right), \tag{11}$$

де n розмірність матриць C та V.

Елементи діагональної матриці $\{\lambda_i\}$ розмірністю $n\times n$ дорівнюють власним числам матриці C та визначаються за формулою:

$$\lambda_i=2\left(1-\cos\frac{2i\pi}{n}\right)=4\sin^2\frac{i\pi}{n} \ . \tag{12}$$

Неважко довести, що

$$\frac{1}{\Delta_y^2}(C_n(E_m)) = \frac{1}{\Delta_y^2}((V_{it})_{jk}\cdot V_{jk})\{\{\lambda\}_k\}((V_{it})_{jk}\cdot V_{jk}),$$
$$\frac{1}{\Delta_z^2}(E_n(C_m)) = \frac{1}{\Delta_z^2}((V_{it})_{jk}\cdot V_{jk})\{\{\lambda_i\}\}((V_{it})_{jk}\cdot V_{jk}). \quad (13)$$

Наведемо вигляд блочних матриць, які входять у вираз (13):

$$((V_{it})_{jk}\cdot V_{jk}) = \begin{vmatrix} (V_{it})_{11}\cdot V_{11} & (V_{it})_{12}\cdot V_{12} & \cdots & \cdots & (V_{it})_{1n}\cdot V_{1n} \\ (V_{it})_{21}\cdot V_{21} & (V_{it})_{22}\cdot V_{22} & \cdots & \cdots & (V_{it})_{2n}\cdot V_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (V_{it})_{n1}\cdot V_{n1} & (V_{it})_{n2}\cdot V_{n2} & \cdots & \cdots & (V_{it})_{nn}\cdot V_{nn} \end{vmatrix}.$$

Блоки $(V_{it})_{jk}$ не змінюються при зміні індексів jk. Елементи цих блоків дорівнюють компонентам власних векторів матриці C розмірами $m\times m$. Від значень індексів jk залежить множник V_{jk} на який множимо усі елементи блоку $(V_{it})_{jk}$. Значення множників V_{jk} дорівнюють елементам власних векторів матриці C розміром $n\times n$. Вище було наведено формулу (11) для визначення компонентів власних векторів матриці C. Враховуючи це, запишемо:

$$V_{it} = \frac{\sqrt{m}}{m}\left(\sin\frac{2it\pi}{m} + \cos\frac{2it\pi}{m}\right),$$
$$V_{jk} = \frac{\sqrt{n}}{n}\left(\sin\frac{2jk\pi}{n} + \cos\frac{2jk\pi}{n}\right). \quad (14)$$

Отже, елементи матриці $(V_{it})_{jk}\cdot V_{jk}$ можна визначити за формулою:

$$V_{itjk} = V_{it}\cdot V_{jk} = \frac{\sqrt{m}}{m}\cdot\frac{\sqrt{n}}{n}\left(\sin\frac{2it\pi}{m} + \cos\frac{2it\pi}{m}\right)\left(\sin\frac{2jk\pi}{n} + \cos\frac{2jk\pi}{n}\right). \quad (15)$$

При цьому необхідно зауважити, що індекси i та t змінюються у межах блоку $(V_{it})_{jk}$ та набувають значень від 1 до m. Індекси j та k змінюються при переході від блоку до блоку та набувають значень від 1 до n. Введемо скорочене позначення:

$$((V_{it})_{jk}\cdot V_{jk})=((V_{it})_{jk}). \tag{16}$$

Підкреслимо дуже важливу властивість цієї матриці.

$$((V_{it})_{jk})\cdot((V_{it})_{jk})=(E_n(E_m)). \tag{17}$$

Діагональні матриці $\{\{\lambda\}_k\}$ та $\{\{\lambda_i\}\}$ мають такий вигляд:

$$\{\{\lambda\}_k\}=\begin{vmatrix}\{\lambda\}_1 & & & \\ & \{\lambda\}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \{\lambda\}_n\end{vmatrix},\quad \{\lambda\}_k=\underbrace{\begin{vmatrix}\lambda_k & & & \\ & \lambda_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k\end{vmatrix}}_{m}\Bigg\}m$$

$$\{\{\lambda_i\}\}=\underbrace{\begin{vmatrix}\{\lambda_i\} & & & \\ & \{\lambda_i\} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \{\lambda_i\}\end{vmatrix}}_{n}\Bigg\}n\quad \{\lambda_i\}=\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m\end{vmatrix}.$$

Елементи цих матриць являють собою власні числа матриць C розмірністю $n\times n$ та $m\times m$ і визначаються за формулами:

$$\lambda_k=4\sin^2\frac{k\pi}{n},\quad \lambda_i=4\sin^2\frac{i\pi}{m}. \tag{18}$$

Для подальших перетворювань введемо такі позначення:

$$\frac{1}{\Delta_y^2}\lambda_k=-\alpha_k^2,\quad \frac{1}{\Delta_z^2}\lambda_i=-\beta_i^2,\quad \alpha_k^2+\beta_i^2=\gamma_{ik}^2. \tag{19}$$

Враховуючи введені позначення (12) та (16), отримуємо:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta_y^2}(C_n(E_m))=-((V_{it})_{jk})\{\{\lambda^2\}_k\}((V_{it})_{jk}),\\ &\frac{1}{\Delta_z^2}(E_n(C_m))=-((V_{it})_{jk})\{\{\beta_i^2\}\}((V_{it})_{jk}),\\ &(E_n(E_m))=((V_{it})_{jk})\cdot((V_{it})_{jk}).\end{aligned} \tag{20}$$

Після врахування цих виразів у рівняннях (6), знайдемо:

$$(C_x) = ((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{xi}^2\}_k\}((V_{it})_{jk}),$$
$$(C_y) = ((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{yi}^2\}_k\}((V_{it})_{jk}), \tag{21}$$
$$(C_z) = ((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{zi}^2\}_k\}((V_{it})_{jk}).$$

Компоненти діагональних матриць у цих формулах мають вигляд:

$$\lambda_{xik}^2 = \mu_1(s^2 - \gamma_{ik}^2) + \gamma_{ik}^2,$$
$$\lambda_{yik}^2 = \mu_2(s^2 - \gamma_{ik}^2) - \alpha_k^2, \tag{22}$$
$$\lambda_{zik}^2 = \mu_2(s^2 - \gamma_{ik}^2) - \beta_k^2.$$

Враховуючи усі перетворення, розв’язок системи рівнянь (9) запишемо у вигляді:

$$\overline{U}_x = D^{-1} \cdot \overline{R}_x, \ \ \overline{U}_y = D^{-1} \cdot \overline{R}_y, \ \ \overline{U}_z = D^{-1} \cdot \overline{R}_z. \tag{23}$$

Матриця D у цих виразах – це визначник системи рівнянь (9).

$$D = \begin{vmatrix} (C_x); & \frac{s}{\Delta_y}(A_n(E_m)); & \frac{s}{\Delta_z}(E_n(A_m)); \\ \frac{s}{\Delta_y}(B_n(E_m)); & (C_y); & \frac{1}{\Delta_y \Delta_z}(B_n(A_m)); \\ \frac{s}{\Delta_z}(E_n(B_m)); & \frac{1}{\Delta_y \Delta_z}(A_n(B_m)); & (C_z); \end{vmatrix}.$$

У розгорнутому вигляді маємо такий вираз:

$$D = (C_x)(C_y)(C_z) + \frac{s^2}{\Delta_y^2 \Delta_z^2}(A_n(E_m))(E_n(B_m))(B_n(A_m)) +$$
$$+ \frac{s^2}{\Delta_y^2 \Delta_z^2}(E_n(A_m))(B_n(E_m))(A_n(B_m)) - \frac{s^2}{\Delta_z^2}(C_y)(E_n(A_m))(E_n(B_m)) -$$
$$- \frac{1}{\Delta_y^2 \Delta_z^2}(C_x)(B_n(A_m))(A_n(B_m)) - \frac{s^2}{\Delta_y^2}(C_z)(B_n(E_m))(A_n(E_m)).$$

Після відповідних перетворень отримаємо:

$$D=((V_{it})_{jk})\{\{\lambda_{xi}^2\}_k\{\lambda_{yi}^2\}_k\{\lambda_{zi}^2\}_k+2s^2\{\beta_i^2\}\{\alpha^2\}_k+s^2\{\lambda_{yi}^2\}_k\{\beta_i^2\}+$$
$$+s^2\{\lambda_{zi}^2\}_k\{\alpha^2\}_k-\{\lambda_{xi}^2\}_k\{\alpha^2\}_k\{\beta_i^2\}\}((V_{it})_{jk}).$$

Враховуючи співвідношення (22), в кінцевому результаті маємо:

$$D=((V_{it})_{jk})\{(s^2-\gamma_{ik}^2)^3\}((V_{it})_{jk}).$$

Зворотну матрицю D^{-1} визначимо беручи до уваги рівність (17).

$$D^{-1}=((V_{it})_{jk})\left\{\frac{1}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^3}\right\}((V_{it})_{jk}). \tag{24}$$

Вектори $\overline{R}_x$, $\overline{R}_y$, $\overline{R}_z$, які входять у вираз (23), знаходимо, виконуючи заміну в матриці D. Відповідно перший, другий та третій стовпчики замінюємо векторами правих частин системи (9). При цьому враховуємо співвідношення (7).

Не зупиняючись на виконаних перетвореннях, запишемо остаточний операторний вираз шуканої функції $\overline{U}_x$, враховуючи, що матриця D^{-1} прийнята відповідно виразу (24).

$$\overline{U}_x=\frac{1}{\mu_1}((V_{it})_{jk})\left\{\frac{s[\mu_1(s^2-\gamma_{ik}^2)-\gamma_{ik}^2]}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}_{x0}+$$
$$+\frac{1}{\mu_2}((V_{it})_{jk})\left\{\frac{\mu_2(s^2-\gamma_{ik}^2)-\gamma_{ik}^2}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}'_{x0}-$$
$$-\frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{1}{\Delta_y}(A_n(E_m))((V_{it})_{jk})\left\{\frac{\gamma_{ik}^2}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}_{y0}-$$
$$-\frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{1}{\Delta_y}(A_n(E_m))((V_{it})_{jk})\left\{\frac{s}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}'_{y0}-$$
$$-\frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{1}{\Delta_z}(E_n(A_m))((V_{it})_{jk})\left\{\frac{\gamma_{ik}^2}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}_{z0}-$$
$$-\frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{1}{\Delta_z}(E_n(A_m))((V_{it})_{jk})\left\{\frac{s}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2}\right\}((V_{it})_{jk})\cdot\overline{U}'_{z0}.$$

Відомо, що кожному операторному виразу відповідає певний функціональний аналог [2]. Наведемо ці співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{s^2-\gamma_{ik}^2} \Rightarrow \frac{1}{\gamma_{ik}} sh\gamma_{ik}x, \\
&\frac{s}{s^2-\gamma_{ik}^2} \Rightarrow ch\gamma_{ik}x, \\
&\frac{1}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2} \Rightarrow \frac{1}{2\gamma_{ik}^3}(x\gamma_{ik}ch\gamma_{ik}x - sh\gamma_{ik}x), \\
&\frac{s}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2} \Rightarrow \frac{1}{2\gamma_{ik}^2}(x\gamma_{ik}sh\gamma_{ik}x), \\
&\frac{s^2}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2} \Rightarrow \frac{1}{2\gamma_{ik}}(x\gamma_{ik}ch\gamma_{ik}x + sh\gamma_{ik}x), \\
&\frac{s^3}{(s^2-\gamma_{ik}^2)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}(x\gamma_{ik}sh\gamma_{ik}x + 2ch\gamma_{ik}x).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Операторні вирази у рівняннях (24) позначимо, відповідно f_x, f_y, f_z. Матрицю $((V_{it})_{jk})$ для скорочення запису позначимо $\tilde{V}$. З урахуванням цих позначень, у рівняннях (24) $\overline{U}_x$ набуде вигляду:

$$
\begin{aligned}
\overline{U}_x = {} & \frac{1}{\mu_1}\cdot\tilde{V}\{f_{x1}\}\tilde{V}\cdot\overline{U}_{x0} + \frac{1}{\mu_2}\cdot\tilde{V}\{f_{x2}\}\tilde{V}\cdot\overline{U}'_{x0} - \frac{1}{\mu_2\Delta_y}(A_n(E_m))\tilde{V}\{f_{x3}\}\tilde{V}\cdot\overline{U}_{y0} - \\
& -\frac{1}{\mu_1\Delta_y}(A_n(E_m))\cdot\tilde{V}\cdot\{f_{x4}\}\cdot\tilde{V}\cdot\overline{U}'_{y0} - \frac{1}{\mu_2\Delta_z}(E_n(A_m))\cdot\tilde{V}\cdot\{f_{x5}\}\cdot\tilde{V}\cdot\overline{U}_{z0} - \\
& -\frac{1}{\mu_1\Delta_z}(E_n(A_m))\cdot\tilde{V}\cdot\{f_{x6}\}\cdot\tilde{V}\cdot\overline{U}'_{z0}.
\end{aligned}
$$

Невідомі константи $\overline{U}_{x0}$, $\overline{U}'_{x0}$, …, $\overline{U}'_{z0}$ визначаються з граничних умов на гранях, які перпендикулярні осі OX. Для того, щоб задовольнити граничні умови по інших гранях, необхідно побудувати аналогічне рішення, обираючи напрямок прямих паралельно цим осям.

Для тестування запропонованої методики було отримано рішення та чисельні значення переміщень та напружень у жорстко закріпленому по бокових поверхнях кубі з розмірами грані 1м на вертикальне навантаження. Похибка отриманих результатів у порівнянні з іншими методами в межах 5-7% в залежності від кількості прямих.

1. *Шкелёв Л.Т., Морсков Ю.А., Романова А.П., Станкевич А.Н.* Метод прямых и его использование при определении напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек. – К.: Национальная академия наук Украины, Институт механики им. С.П. Тимошенко, Технический центр, 2002. – 177 с.
2. *Микусинский Ян.* Операторное исчисление. – М.: Издательство иностранной литературы, 1959. – 366 с.
3. Новожилов В.В. Теория упругости. – Ленинград: Судпромгиз, 1958. – 369 с.
4. *ШкелёвЛ.Т., Станкевич А.Н., Пошивач Д.В., Корбаков А.Ф.* Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояний пространственных и пластинчатых конструктивных элементов. – К. КНУБА, 2004. – 135 с.

Надійшло до редакції 16.11.2006 р.