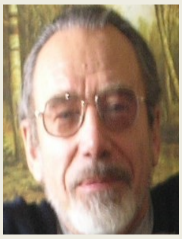
Універсальний призматичний скінчений елемент загального типу для фізично і геометрично нелінійних задач деформування призматичних тіл

Олександр Гуляр[1], Юрій Максим'юк[2], Андрій Козак [3], Олександр Максим'юк [4]

[1,2,3,4]Київський національний університет будівництва і архітектури
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037
[1]agulyar@ukr.net, http://orcid.org/0000-0003-1255-9437
[2]maksymiuk.iuv@knuba.edu.ua, http://orcid.org/0000-0002-5814-6227
[3]kozak.aa@knuba.edu.ua, http:// orcid.org/ 0000-0002-3192-1430
[4]sashamaksymiuk@gmail.com, http://orcid.org/0000-0002-2367-3086

DOI: 10.32347/2522-4182.6.2020.72-84



Олександр Гуляр
д.т.н., проф.

Юрій Максим'юк
д.т.н., проф.,
професор кафедри будівельної механіки
.

Андрій Козак
асистент кафедри будівельної механіки

Олександр Максим'юк
Студент КНУБА

Анотація. При розробці нових скінчених елементів (СЕ) в рамках напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ), визначальним фактором для досягнення високої ефективності їх застосування є вибір системи координатних функцій і методика виведення матриці жорсткості. Апроксимація переміщення уздовж координати розкладу здійснювалася змішаною системою координатних функцій, перші два члена якої належать поліномами Лагранжа, інші - Міхліна. На основі високо ефективної моментной схеми скінчених елементів (МССЕ) побудовані розв'язувальні співвідношення для універсального призматичного СЕ загального типу, який дозволяє визначати напружено-деформований стан (НДС) для фізично і геометрично нелійних задач призматичних тіл.

Об'єкти виділеного класу використовуються в якості природних конструкцій, вузлів і деталей в будівництві і різних галузях машинобудування. Наприклад, до них відносяться фундаменти промислових і цивільних будівель, елементи перекриттів і покриттів, арочні греблі, кронштейни, різці, зуби косозубих коліс та ін.

Деформування розглянутих конструкцій відбувається під дією силових і температурних факторів, причому, через наявність істотних перепадів температур можлива зміна фізико-механічних характеристик матеріалу. На сучасному рівні розвитку техніки і технології в окремих елементах конструкцій допускається виникнення пластичних деформацій. Для ряду деталей в процесі експлуатації і виготовлення розвиток пластичних деформацій супроводжується істотною зміною первісної форми. Це характерно для процесів обробки металів тиском, наприклад, при виготовленні штампових кубиків, протяжці смуг. Подальше вдосконалення конструктивних рішень при розробці відповідальних вузлів і технологічних процесів багато в чому залежить від повноти та достовірності інформації про особливості зміни картини напружено-деформованого стану в процесі навантаження. У зв'язку з цим розробка методів дослідження виділеного класу об'єктів є актуальною проблемою.

Ключові слова: напіваналітичний метод скінчених елементів; моментна схема скінчених елементів; універсальний призматичний скінчений елемент загального типу; геометрична нелінійність; фізична нелінійність; термов'язкопружнопластичне деформування; напружено-деформований стан.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Серед просторових конструкцій, які широко застосовуються в різних областях техніки, значне місце займають призматичні тіла, геометричні і фізико-механічні характеристики яких змінні за всіма трьома напрямками.

В рамках цієї роботи будуть отримані розв'язувальні співвідношення, які дозволять розглядати тривимірні об'єкти довільного, що не обов'язково однозв'язного, поперечного перерізу з деякими обмеженнями на характер зміни геометрії уздовж однієї з координат, а саме, об'єкт можна представити як результат руху точок поперечного перетину уздовж деяких просторових кусочно-гладких кривих. У розглянутих тілах можуть бути також передбачені вирізи і отвори, контури яких паралельні координатним поверхням.

Такі просторові тіла будемо надалі іменувати криволінійними призматичними, а при наявності неоднорідності фізико-механічних властивостей матеріалу - криволінійними неоднорідними призматичними тілами.

Необхідність вивчення напружено-деформованого стану криволінійних неоднорідних призматичних тіл призводить до вирішення складних просторових задач термопружності та термопластичності як при малих, так і при великих пластичних деформаціях. Метою даної роботи є отримання розрахункових співвідношень МССЕ універсального призматичного СЕ загального типу для фізично і геометрично нелінійних задач деформування криволінійних призматичних тіл.

УНІВЕРСАЛЬНИЙ ПРИЗМАТИЧНИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ЗАГАЛЬНОГО ТИПУ

Для дослідження призматичних тіл зі змінними геометричними і фізичними характеристиками розроблений скінчений елемент у вигляді криволінійної призми (рис. 1).

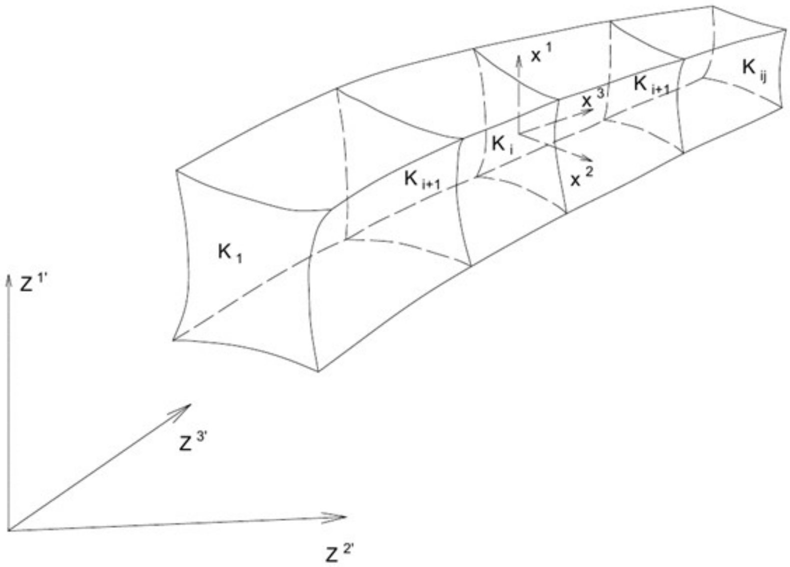


Рис.1. Універсальний призматичний скінчений елемент загального типу.
Fig.1. Universal prismatic finite element of general type

У місцевій системі координат елемент являє собою прямокутний паралелепіпед, поперечний переріз якого - квадрат з одиничними сторонами, а довжина дорівнює двом. Уздовж осі елемента x^3 розташована деяка кількість точок інтегрування K_i (i=1,2…L), положення яких визначено відповідно до вимог формули інтегрування Гауса. Значення координат вузлів задаються в базисній системі координат для перерізів, які при переході до місцевої системи відображаються на площині x^i=const, що проходять через K_i.

У площині поперечного перерізу елемента переміщення розподіляються згідно білінійну закону:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}S_1x^1 + \frac{1}{2}S_2x^2 + S_1S_2x^1x^2 + \frac{1}{4}\right) \quad (1)$$

де $u_{m'(S_1S_2)}$ - значення вузлових компонент вектора переміщень;

S_1 і S_2 - подвоєні координати вузлів в напрямках x^1 і x^2.

У відповідності з прийнятим законом (1), знаходимо переміщення і їх похідні в центрі елемента:

$$\dot{u}_{m'} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2)}, \quad \dot{u}_{m',\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2)}S_\alpha,$$

$$\dot{u}_{m',3} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2),3}, \quad \dot{u}_{m',12} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2)}S_1S_2, \quad (2)$$

$$\dot{u}_{m',3\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2),3}S_\alpha,$$

В напрямку x^3 вузлові переміщення апроксимуються розкладум виду:

$$u_{m'(s_1s_2)} = \sum_{l=0}^{L} u_{m'l(s_1s_2)}\varphi^l, \quad (3)$$

де через $u_{m'l(s_1s_2)}$ позначені коефіцієнти розкладу переміщень в ряд по координатним функціям φ^l. Для температур також прийнято білінійний закон розподілу в межах поперечного перерізу елемента:

$$T = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} T_{(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}S_1x^1 + \frac{1}{2}S_2x^2 + S_1S_2x^1x^2 + \frac{1}{4}\right) \quad (4)$$

Значення температури і їх похідні в центрі перерізу отримуємо аналогічно (2).

$$\dot{T} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} T_{(S_1S_2)}, \qquad \dot{T}_{,\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} T_{(S_1S_2)}S_\alpha, \quad (5)$$

Компоненти тензора пружних постійних і визначника матриці, складеного з компонентів матричного тензора, мало змінюються в межах поперечного перерізу елемента і прийняті рівними їх значенням в центрі перерізу:

$$c^{ijmn} \approx \dot{c}^{ijmn}, g \approx \dot{g} \;, \tag{6}$$

де $g = det[g], \dot{g} = det[\dot{g}]$.

Таке припущення дозволяє скоротити об'єм розрахунків, не зменшуючи точність рішення [8].

Виходячи з основних положень моментної схеми кінцевих елементів [9], представимо складові тензора повної деформації відрізками ряда Маклорена:

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \varepsilon_{12} = \dot{\varepsilon}_{12},$$
$$\varepsilon_{3\alpha} = \dot{\varepsilon}_{3\alpha} + \dot{\varepsilon}_{3\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \varepsilon_{33} = \dot{\varepsilon}_{33} + \dot{\varepsilon}_{33,(\alpha)} x^{(\alpha)}, \tag{7}$$

де

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\Big|_{x^{\alpha}=0}, \varepsilon_{ij.\alpha} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dx^{\alpha}}\Big| x^{\alpha} = 0 \qquad (\alpha \neq i, j).$$

Коефіцієнтом розкладу $\frac{d^2 \varepsilon_{33}}{dx^{'} dx^2}$, нехтуємо, як величиною вищого порядку малості.

Враховуючи введені раніше припущення про постійність компонент тензора пружних констант і визначника матриці, складеного із компонент матричного тензора, можна представити напруження через коефіцієнти розкладу їх в ряд Маклорена

$$\sigma^{\alpha(\alpha)} = \dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \qquad \sigma^{12} = \dot{\sigma}^{12},$$
$$\sigma^{3\alpha} = \dot{\sigma}^{3\alpha} + \dot{\sigma}^{3(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \sigma^{33} = \dot{\sigma}^{33} + \dot{\sigma}^{33}_{,(\alpha)} x^{(\alpha)}. \tag{8}$$

Членом $\dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,\alpha}$ нехтуємо, оскільки він не дає внесок в енергію деформації елемента.

Коефіцієнти розкладу компонент тензора повної деформації в ряд Маклорена виразимо через умовні значення вектора переміщень в центрі елемента:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \dot{z}^{m'}_{,\alpha} \dot{u}_{m',\alpha}, \qquad \dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \dot{z}^{m'}_{,12} \dot{u}_{m',\alpha} + \dot{z}^{m'}_{,\alpha} \dot{u}_{m',12}, \qquad \dot{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2}\left(\dot{z}^{m'}_{,1} \dot{u}_{m',2} + \dot{z}^{m'}_{,2} \dot{u}_{m',1}\right),$$
$$\dot{\varepsilon}_{3\alpha} = \frac{1}{2}\left(\dot{z}^{m'}_{,\alpha} \dot{u}_{m',3} + \dot{z}^{m'}_{,3} \dot{u}_{m',\alpha}\right),$$
$$\dot{\varepsilon}_{3\alpha,(3-\alpha)} = \frac{1}{2}\left(\dot{z}^{m'}_{,12} \dot{u}_{m',3} + \dot{z}^{m'}_{,\alpha} \dot{u}_{m',3(3-\alpha)} + \dot{z}^{m'}_{,3} \dot{u}_{m',\alpha(3-\alpha)} + \dot{z}^{m'}_{,3(3-\alpha)} \dot{u}_{m',\alpha}\right), \tag{9}$$
$$\dot{\varepsilon}_{33} = \dot{z}^{m'}_{,3} \dot{u}_{m',3}, \qquad \dot{\varepsilon}_{33,\alpha} = \dot{z}^{m'}_{,3\alpha} \dot{u}_{m',3} + \dot{z}^{m'}_{,3} \dot{u}_{m',3\alpha},$$

де $\dot{z}^{m'}_{,j} = z^{m'}_{,j}\Big|_{x^{\alpha}=0}, \dot{z}^{m'}_{,j} = \frac{d\dot{z}^{m'}_{,i}}{dx^{j}}\Big|_{x^{\alpha}=0} \quad (\alpha \neq i, j)$.

Взявши до уваги те, що переміщення і їх похідні в центрі поперечного перерізу елемента знаходяться відповідно (2), відношення (9) запишемо через вузлові значення вектора переміщень:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} S_{\alpha} \dot{z}^{m'}_{,\alpha},$$
$$\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha).(3-\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left(2 S_1 S_2 \dot{z}^{m'}_{,\alpha} + S_{\alpha} \dot{z}^{m'}_{,12}\right), \tag{10}$$

$$\dot{\varepsilon}_{12}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}u_{m'(S_1S_2)}\left(S_1\dot{z}^{m'}_{,2}+S_2\dot{z}^{m'}_{,1}\right),$$

$$\dot{\varepsilon}_{3\alpha}=\frac{1}{8}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}2u_{m'(S_1S_2)}S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,3}+u_{m'(S_1S_2)},_3\dot{z}^{m'}_{,3},$$

$$\dot{\varepsilon}_{3\alpha.(3-\alpha)}=\frac{1}{8}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}2u_{m'(S_1S_2)}\left(2\dot{z}^{m'}_{,3}S_1S_2+S_\alpha\dot{z}^{m'}_{3(3-\alpha)}\right)+u_{m'(S_1S_2),3}\left(2S_{(3-\alpha)}\dot{z}^{m'}_{.\alpha}+\dot{z}^{m'}_{.12}\right),$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}u_{m'(S_1S_2).3}\dot{z}^{m'}_{,3},\qquad \dot{\varepsilon}_{33.\alpha}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}u_{m'(S_1S_2).3}(\dot{z}^{m'}_{,3\alpha}+2S\dot{z}^{m'}_{,3}).$$

Використовуючи розклад вузлових переміщень в напрямках x^3 в ряд по координатним функціям (3), отримуємо наступні формули для коефіцієнтів розкладу повних деформацій в ряд Маклорена:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}u_{m'l(s_1s_2)}\varphi^l S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,\alpha},$$

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha).(3-\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}u_{m'l(s_1s_2)}\varphi^l\times\left(2S_1S_2\dot{z}^{m'}_{,\alpha}+S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,12}\right),$$

$$\dot{\varepsilon}_{12}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}2u_{m'l(s1s_2)}\varphi^l\left(S_1\dot{z}^{m'}_{,2}+S_2\dot{z}^{m'}_{,1}\right),$$

$$\dot{\varepsilon}_{3\alpha}=\frac{1}{8}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}2u_{m'l(s_1s_2)}\varphi^l\times S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,3}+u_{m'l(s_1s_2)}\varphi^l_{,3}\dot{z}^{m'}_{,\alpha},\tag{11}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha).(3-\alpha)}=\frac{1}{8}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}2u_{m'l(s_1s_2)}\varphi^l\times\left(2\dot{z}^{m'}_{,3}S_1S_2+S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,3(3-\alpha)}\right)+u_{m'l(s_1s_2)}\varphi^l_{,3}$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}u_{m'l(s_1s_2)}\varphi^l_{,3}\dot{z}^{m'}_{,3},\quad \dot{\varepsilon}_{33,\alpha}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{l=0}^{4}u_{m'l(s_1s_2)}\varphi^l_{,3}\times(\dot{z}^{m'}_{,3}+2S_\alpha\dot{z}^{m'}_{,3}),$$

де $\varphi^l_{,3}=\dfrac{d\varphi^2}{dx^3}.$

ВИВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ І МАТРИЦІ ЖОРСТКОСТІ СЕ

Процес деформування просторових тіл описується у відповідності з варіаційним принципом можливих переміщень. Об'єкт апроксимується системою із M кінцевих елементів, рівняння рівноваги якої має вигляд:

$$\sum_{m=1}^{M}\delta W_m-\delta A_m=0.\tag{12}$$

Запишемо вираз варіації енергії деформації одного скінченого елемента:

$$\delta W=\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij}\sqrt{g}dx^1dx^2dx^3.\tag{13}$$

Використовуючи представлення компонент тензорів напружень і деформацій виразами Маклорена (7), (8), отримаємо:

$$\delta W=\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left(\dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}+\dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)\times\delta\left(\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}+\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)+\left(\dot{\sigma}^{33}+\dot{\varepsilon}_{33,(\alpha)}x^{(\alpha)}\right)+$$
$$+2\left(\dot{\sigma}^{3\alpha}+\dot{\sigma}^{3\alpha}_{,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)\delta\left(\dot{\varepsilon}_{3\alpha}+\dot{\varepsilon}_{3\alpha,(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)+2\dot{\sigma}^{12}\delta\dot{\varepsilon}_{12}\sqrt{g}dx^1dx^2dx^3. \quad (14)$$

Проінтегруємо вираз (14) в області поперечного перерізу згідно з формулами:

$$\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}dx^1dx^2=1,\quad \int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}x^{\alpha}dx^1dx^2=0,$$
$$\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}x^{\alpha}x^{\beta}dx^1dx^2=\begin{cases}0,\alpha=\beta\\ \frac{1}{12},\alpha=\beta\end{cases} \quad (15)$$

Після інтегрування маємо:

$$\delta W=\int\limits_{-1}^{1}(\dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\dot{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}\delta\dot{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}+\dot{\sigma}^{33}_{,(\alpha)}\delta\dot{\varepsilon}_{33,(\alpha)}+2\dot{\sigma}^{3(\alpha)}_{,(3-\alpha)}\delta\dot{\varepsilon}_{3\alpha,(3-\alpha)})\right)\sqrt{g}dx^3 \quad (16)$$

Для зручності подальших записів перейдемо до матричної форми запису:

$$\delta W=\int\limits_{-1}^{1}((\delta\{\dot{\varepsilon}\}^T)\{\dot{\sigma}\}+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\delta\{\dot{\varepsilon}\}^T_{,\alpha}\right)\{\dot{\sigma}\}_{,\alpha}\sqrt{g}dx^3, \quad (17)$$

де

$$\{\dot{\varepsilon}\}^T=\{\dot{\varepsilon}_{11}\dot{\varepsilon}_{12}\dot{\varepsilon}_{22}\dot{\varepsilon}_{23}\dot{\varepsilon}_{31}\dot{\varepsilon}_{33}\}^T,\ \{\dot{\varepsilon}\}^T_{,1}=\{\dot{\varepsilon}_{22,1}\dot{\varepsilon}_{23,1}\dot{\varepsilon}_{33,1}\}^T,\ \{\dot{\varepsilon}\}^T_{,2}=\{\dot{\varepsilon}_{11,2}\dot{\varepsilon}_{31,2}\dot{\varepsilon}_{33,2}\}^T, \quad (18)$$

$$\{\dot{\sigma}\}^T=\{\dot{\sigma}^{11}\dot{\sigma}^{12}\dot{\sigma}^{22}\dot{\sigma}^{23}\dot{\sigma}^{31}\dot{\sigma}^{33}\}^T,\ \{\dot{\sigma}\}^T_{,1}=\{\sigma^{22}_{.1}\sigma^{23}_{.1}\sigma^{33}_{.1}\}^T,\ \{\dot{\sigma}\}^T_{,2}=\{\sigma^{22}_{.2}\sigma^{23}_{.2}\sigma^{33}_{.2}\}^T, \quad (19$$

Запишемо компоненти векторів $\{\dot{\varepsilon}\}$ і $\{\dot{\varepsilon}\}_{,\alpha}$ через компоненти вектора коефіцієнтів розкладу вузлових переміщень по координатним функціям $\{u_l\}$, згідно (11):

$$\{\dot{\varepsilon}\}=\sum_{l=0}^{4}\left([E]\varphi^{(l)}+[F]\varphi^{(l)}_{,3}\right)\{u_l\},\quad \{\dot{\varepsilon}\}^T_{,\alpha}=\sum_{l=0}^{4}\left([E]\varphi^{(l)}+[F]_{,\alpha}\varphi^{(l)}_{,3}\right)\{u_l\}, \quad (20)$$

де

$$\{u_l\}^T=\left\{\left\{u_{m'}(-1,-1)\right\}\left\{u_{m'}(-1,1)\right\}\times\left\{u_{m'}(1,-1)\right\}\left\{u_{m'}(1,1)\right\}\right\}^T \quad (21)$$

m = 1,2,3

Компоненти матриць $\left[E\right]$, $\left[F\right]$, $\left[E\right]_{,\alpha}$,$\left[F\right]_{,\alpha}$ знаходяться відповідно відношенням (11).

Варіацію енергії деформації скінченого елемента (17) зобразимо з врахуванням (20):

$$\delta W = \int\limits_{-1}^{1} \sum_{l=0}^{l} (\delta\left\{u_l\right\}^T (\left[E\right]^T \varphi^{(l)} + \left[F\right]^T \varphi^{(l)}_{,3} \left\{\dot{\delta}\right\} + \\ + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2} \delta\left\{u_l\right\}^T \varphi^{(l)} (\left[E\right]^{T}_{,\alpha} \varphi^{(l)} + \varphi^{(l)} (\left[E\right]^{T}_{,\alpha} \varphi^{(l)} + \left[F\right]^{T}_{,\alpha} \varphi^{(l)}_{,3}) \left\{\dot{\sigma}\right\}_{,\alpha}) \sqrt{g} dx^3 \qquad (22)$$

Інтегрування по x^3 виконаємо чисельно, використовуючи формулу Гауса, в результаті отримаємо:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[F\right]^{T}_{,\alpha} \sum_{l=0}^{4} \delta\left\{u_l\right\}^T \left\{r_l\right\}, \qquad (23)$$

де

$\left\{r_l\right\}$ - вектор амплітудних значень вузлових реакцій:

$$\left\{r_l\right\} = \sum_{k=1}^{N} (((\left[E\right]^T \left\{\dot{\sigma}\right\} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2} \left[E\right]^{T}_{\alpha}) \varphi^{(l)} + \left[F\right]^T \left\{\sigma\right\} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2} \left[F\right]^{T}_{,\alpha} \left\{\dot{\sigma}\right\}_{,\alpha}) \varphi^{(l)} \sqrt{g})_k H_k. \qquad (24)$$

Компоненти векторів $\left\{\dot{\sigma}\right\}$, $\left\{\dot{\sigma}\right\}_{,\alpha}$, що входять до виразу (24), є вільними функціями координати x^3; через H_k позначені залежні функції.

Для виводу лініарізованої матриці жорсткості універсального призматичного СЕ запишемо рівняння рівноваги в приростах:

$$\delta\left(\Delta W\right) - \delta\left(\Delta A\right) = 0. \qquad (25)$$

Варіація приросту енергії деформованого СЕ розраховується за формулою:

$$\delta\left(\Delta W\right) = \sum_{l=0}^{L} \sum_{k=1}^{N} \delta\left\{u_l\right\}^T (((\left[LE\right]^T \delta\left\{u_l\right\}^T + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2} \left[E\right]^{T}_{,\alpha} \left\{\Delta\dot{\sigma}\right\}_{,\alpha} \varphi^{(l)} + (\left[F\right]^T \left\{\Delta\dot{\sigma}\right\} + \sum_{\alpha=1}^{2} \left[F\right]^{T}_{,\alpha} \left\{\Delta\dot{\sigma}\right\}_{,\alpha} \varphi^{(l)}_{,3} \sqrt{g}_k H_k. \qquad (26)$$

Коефіцієнти розкладу приростів напружень пов’язані з коефіцієнтами розкладу приростів деформацій:

$$\left\{\Delta\dot{\sigma}\right\} = \left[D\right]\left\{\Delta\dot{\varepsilon}\right\}, \quad \left\{\Delta\dot{\sigma}\right\}_{,\alpha} = \left[D\right]_{,\alpha} \left\{\Delta\dot{\varepsilon}\right\}_{,\alpha} \qquad (27)$$

Компоненти матриць $\left[D\right]$ і $\left[D\right]_{,\alpha}$ обчислюються з врахуванням залежності фізико-механічних параметрів матеріалу від температури і рівня розвитку пластичних деформацій [2].

Запишемо коефіцієнти розкладу приросту деформацій в ряд Маклорена, які входять в (27) через приріст переміщень. Тоді вираз (26) можна записати в наступному вигляді:

$$\delta\left(\Delta W\right) = \sum_{l=0}^{L} \sum_{p=0}^{L} \delta\left\{u_l\right\}^T \left[K^{\Lambda}_{lp}\right]\left\{{}_{\Delta}u_p\right\} \qquad (28)$$

Через $\left[K^{\Lambda}_{lp}\right]$ позначена амплітудна лінеарізована матриця жорсткості:

$$\left[K^{\Lambda}_{lp}\right] = \sum_{k=1}^{N} \Big(\Big(\left[E\right]^T \left[B\right]\left[E\right] \varphi^{(l)}\varphi^{(p)} + \left[E\right]^T \left[D\right]\left[F\right] \varphi^{(l)}\varphi^{(p)}_{,3} + \left[F\right]^T \left[D\right]\left[E\right] \varphi^{(l)}_{,3}\varphi^{(p)} + \\ + \left[F\right]^T \left[D\right]\left[F\right] \varphi^{(l)}_{,3}\varphi^{(p)}_{,3} + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2} \left[E\right]^{T}_{,\alpha} \left[D\right]_{,\alpha} \left[E\right]_{,\alpha} \varphi^{(l)}\varphi^{(p)} + \\ + \left[E\right]^{T}_{,\alpha} \left[D\right]_{,\alpha} \left[F\right]_{,\alpha} \varphi^{(l)}\varphi^{(p)}_{,3} + \left[F\right]^{T}_{,\alpha} \left[D\right]_{,\alpha} \left[E\right]_{,\alpha} \varphi^{(l)}_{,3}\varphi^{(p)} + \left[E\right]^{T}_{,\alpha} \left[D\right]_{,\alpha} \left[F\right]_{,\alpha} \varphi^{(l)}_{,3}\varphi^{(p)}_{,3}\Big)\sqrt{g}\Big)_k H_k \qquad (29)$$

При побудові лінеаризованої матриці жорсткості компоненти матриці жорсткості компоненти матриць зв'язку приросту напружень з приростами деформацій є змінними і відображають зміну характеристик матеріалу в пластичній області напруження. Однак, в роботі [1] показано, що в задачах пластичності доцільно використовувати початкову матрицю жорсткості, отриману на першому пружному кроці.

Приймемо, що зв'язок між коефіцієнтами розкладу приростів деформацій і напружень здійснюється по лінійному закону. Тоді в виразі (27) замість матриць $[D]$, $[D]_{,\alpha}$ увійдуть матриці $[C]$, $[C]_{,\alpha}$, сформовані компонентами тензора пружніх постійних.

Враховуючи введені пропозиції отримаємо вираз для початкової матриці жорсткості скінченого елемента:

$$\begin{aligned}\left[K_{lp}\right]=\sum_{k=1}^{N}\Bigg(\Big(&[E]^{T}[C][E]\varphi^{(l)}\varphi^{(p)}+[E]^{T}[C][F]\varphi^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}+[F]^{T}[C][E]\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)}+\\&+[F]^{T}[C][F]\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}[E]_{,\alpha}^{T}[C]_{,\alpha}[E]_{,\alpha}\varphi^{(l)}\varphi^{(p)}+\\&+[E]_{,\alpha}^{T}[C]_{,\alpha}[F]_{,\alpha}\varphi^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}+[F]_{,\alpha}^{T}[C]_{,\alpha}[E]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)}+[E]_{,\alpha}^{T}[C]_{,\alpha}[F]_{,\alpha}\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}\Big)\sqrt{g}\Bigg)_{k}H_{k}\end{aligned}\qquad(30)$$

Важливим частковим випадком даної методики, яка дозволяє значно скоротити об'єм розрахунків, є розгляд тіл, геометричні характеристики яких постійні вздовж координати розкладу, а змінюються тільки фізичні параметри.

Для тіл, геометрія яких не змінилася вздовж $z^{3'}$ відрізняються від нуля тільки наступні компоненти тензора перетворень:

$$z_{.i}^{i'}\neq 0,\quad z_{.2}^{1'}=z_{.1}^{2'}\neq 0\qquad(31)$$

Тоді, використовуючи $g_{ij}=z_{,i}^{m'}z_{,j}^{n'}g_{mn}$, отримаємо, що компоненти g_{13} і g_{23} метричного тензора рівні нулю:

$$g_{13}=g_{23}=0\qquad(32)$$

В цьому випадку достатньо обчислити матриці, які встановлюють зв'язок між коефіцієнтами розкладу деформацій в ряд Маклорена з коефіцієнтами розкладу вузлових переміщень в ряд по координатним функціям в одному із перерізів. Оскільки ненульові елементи матриць для даного випадку є постійними вздовж координати розкладу, то вираз для вектора амплітудних значень вузлових реакцій (24) спроститься наступним чином:

$$\{r_l\}=\left(\left([E]^{T}\cdot I_1^{(l)}+[F]^{T}\cdot I_2^{(l)}\right)+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}[E]_{,\alpha}^{T}\cdot I_1^{(l)}+[F]^{T}\cdot I_2^{(l)}\right)\sqrt{g},\qquad(33)$$

де

$$\begin{aligned}I_1^{(l)}&=\sum_{k=1}^{N}\left(\{\dot{\sigma}\}\varphi^{(l)}\right)\sqrt{g}_{k}H_k,\quad J_1^{(l)}=\sum_{k=1}^{N}\left(\{\dot{\sigma}\},\alpha\varphi^{(l)}\right)_{k}H_k,\\I_2^{(l)}&=\sum_{k=1}^{N}\left(\{\dot{\sigma}\}\varphi_{,3}^{(l)}\right)_{k}H_k,\quad J_2^{(l)}=\sum_{k=1}^{N}\left(\{\dot{\sigma}\},\alpha\varphi_{,3}^{(l)}\right)_{k}H_k,\end{aligned}\qquad(34)$$

Компоненти матриць, встановлюючи зв’язок коефіцієнтів розкладу деформацій і напружень в ряд Маклорена $\left[C\right]$ і $\left[C\right]$ обчислюються згідно

$$C^{ijmn} = \lambda g^{mn} g^{ij} + \mu(g^{mi} g^{nj} + g^{mj} g^{ni})$$

через компоненти метричного тензора і величини $\lambda\left(z3'\right)$ і $\mu\left(z3'\right)$, які змінюються вздовж координати розкладу. Як наслідок, компоненти матриць $\left[C\right]$ і $\left[C\right],\alpha$ також є змінними величинами, але їх можна записати, виділяючи окремо постійні і змінні вздовж координати розкладу фрагменти:

$$\left[C\right],\alpha = \lambda\left(z3'\right)\left[C\right]\alpha\lambda + \mu\left(z3'\right)\left[C\right],\alpha\mu, \qquad (35)$$

Тоді матриці $\left[C\right]\alpha$, $\left[C\right]\mu,$ $\left[C\right],\alpha\lambda$, $\left[C\right],\alpha\mu$ достатньо визначити в одному з перерізів тіла, а чисельне інтегрування проводити, враховуючи тільки величини, залежні від $z^{3\prime}$.

Для компактності запису виразів для коефіцієнтів матриці жорсткості універсального призматичного СЕ загального типу з змінними фізико-механічними параметрами введемо наступні позначення:

$$\begin{gathered}
\left[C\right] = \lambda\left(z3'\right)\left[C\right],\alpha + \mu\left(z3'\right)\left[C\right]\mu, \\
J_1^{lp} = \sum_{k=1}^{N}\left(\alpha\varphi^{(l)}\varphi^{(p)}\right)_k H_k, \qquad J_2^{lp} = \sum_{k=1}^{N}\left(\alpha\varphi^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}\right)_k H_k, \\
J_3^{lp} = \sum_{k=1}^{N}\left(\alpha\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)}\right)_k H_k, \qquad J_4^{lp} = \sum_{k=1}^{N}\left(\alpha\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}\right)_k H_k, \\
I_1^{lp} = \sum_{k=1}^{N}\left(\mu\varphi^{(l)}\varphi^{(p)}\right)_k H_k, \qquad I_2^{lp} = \sum_{k=1}^{N}\left(\mu\varphi^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}\right)_k H_k, \\
I_3^{lp} = \sum_{k=1}^{N}\left(\mu\varphi_{,3}^{(l)}\varphi^{(p)}\right)_k H_k, \qquad I_4^{lp} = \sum_{k=1}^{N}\left(\mu\varphi_{,3}^{(l)}\varphi_{,3}^{(p)}\right)_k H_k.
\end{gathered} \qquad (36)$$

Тоді матриця жорсткості СЕ зі змінними фізичними параметрами визначається за формулою:

$$\begin{gathered}
\left[K\right]_{lp} = \left[E\right]^T\left[C_1\right]_{lp}\left[E\right] + \left[E\right]^T\left[C_2\right]_{lp}\left[F\right] + \left[F\right]^T\left[C_3\right]_{lp}\left[E\right] + \left[F\right]^T\left[C_4\right]_{lp}\left[F\right] + \frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[E\right]_{,\alpha}^{T}\left[C_1\right]_{,\alpha lp}\left[E\right]_{,\alpha} + \\
+\left[E\right]_{,\alpha}^{T}\left[C_2\right]_{,\alpha lp}\left[F\right]_{,\alpha} + \left[F\right]_{,\alpha}^{T}\left[C_3\right]_{,\alpha lp}\left[E\right]_{,\alpha} + \left[F\right]_{,\alpha}^{T}\left[C_4\right]_{,\alpha lp}\left[F\right]_{,\alpha}\sqrt{g},
\end{gathered} \qquad (37)$$

де

$$\left[C_n\right]_{lp} = J_n^{lp}\left[C_\lambda\right] + I_n^{lp}\left[C_\mu\right],$$
$$\left[C_n\right]_{,\alpha lp} = J_n^{lp}\left[C\ \right]_{,\alpha\lambda} + I_n^{lp}\left[C\ \right]_{,\alpha\mu}$$

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ

Представимо напруження в актуальній конфігурації як суму напружень, досягнутих при деформації тіла в змінній відліковій конфігурації $\tilde{\sigma}^{ij}$ і приросту напружень $\Delta\sigma^{ij}$, зумовленими пружними деформаціями при переході до актуальної конфігурації:

$$\sigma^{ij} = \tilde{\sigma}^{ij} + \Delta\sigma^{ij}, \qquad (38)$$

або, відносно всіх вхідних конфігурацій в (38) до величин актуальної конфігурації:

$$\sigma^{ij} = \bar{\sigma}^{ij} + \Delta\sigma^{ij}, \qquad (39)$$

Перейшовши до тензорної форми (38) і (39) запишемо у вигляді:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma} + \Delta\hat{\sigma} \qquad (40)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\bar{\sigma}} + \Delta\hat{\sigma} \qquad (41)$$

де

$$\begin{gathered}
\hat{\sigma} = \sigma^{ij}\vec{R}_i\vec{R}_j, \qquad \hat{\bar{\sigma}} = \tilde{\sigma}^{ij}\vec{r}_i\vec{r}_j, \\
\Delta\hat{\sigma} = \Delta\sigma^{ij}\vec{R}_i\vec{R}_j, \qquad \hat{\bar{\sigma}} = \tilde{\sigma}^{ij}\vec{R}_i\vec{R}_j
\end{gathered} \qquad (42)$$

Тут $\hat{\bar{\sigma}}$ - тензор, який характеризує частину напружень в актуальній конфігурації, обумовлених попередніми напруженнями, тобто переходом від початкової відлікової конфігурації до змінної відлікової.

Виходячи з (40), приріст напружень:

$$\Delta\hat{\sigma} = \hat{\sigma} - \hat{\bar{\sigma}}. \qquad (43)$$

В цьому випадку $\Delta\sigma$ являє собою добуток матеріальної похідної $\dot{\hat{\sigma}}$ на Δt:

$$\dot{\hat{\sigma}}\Delta t = \hat{\sigma} - \hat{\tilde{\sigma}} \qquad (44)$$

З іншої сторони, з (41)

$$\dot{\hat{\sigma}}\Delta t = \hat{\sigma} - \hat{\bar{\sigma}} \qquad (45)$$

Такий підхід еквівалентний використанню об'єктивної похідної Олдроіда від тензора напружень [5]:

$$\hat{\sigma}^{ol}\,\Delta t = \hat{\sigma} - \hat{\bar{\sigma}} \qquad (46)$$

Покажемо це.

$$\hat{\sigma}^{ol} = \dot{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\Delta t}(\hat{\bar{\sigma}} - \hat{\tilde{\sigma}}) = \dot{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\Delta t}(\tilde{\nabla}\hat{\vec{R}}^T\,\hat{\tilde{\sigma}}\,\tilde{\nabla}\hat{\vec{R}} - \hat{\tilde{\sigma}}). \qquad (47)$$

Взявши до уваги, що

$$\nabla\vec{R} = \hat{E} + \nabla\vec{U}, \qquad (48)$$

маємо

$$\hat{\sigma}^{ol} = \dot{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\Delta t}(\hat{\tilde{\sigma}} + \hat{\tilde{\sigma}}\,\tilde{\nabla}\vec{U} + \tilde{\nabla}\vec{U}^T\,\hat{\tilde{\sigma}} + \tilde{\nabla}\vec{U}^T\,\hat{\tilde{\sigma}}\,\tilde{\nabla}\vec{U} - \hat{\tilde{\sigma}}) = \dot{\hat{\sigma}} - \frac{1}{\Delta t}(\hat{\tilde{\sigma}}\,\tilde{\nabla}\vec{R}^T\,\nabla\vec{U} + \nabla\vec{U}^T\tilde{\nabla}\vec{R}^T\,\hat{\tilde{\sigma}}). \qquad (49)$$

Враховуючи, що при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{U} = \vec{v}\,dt,\ \tilde{\nabla}\vec{R} \to \vec{E},\ \tilde{\nabla}\vec{R}^T \to E,\ \hat{\tilde{\sigma}} \to \hat{\sigma},,$$

отримаємо вираз для об'єктивної похідної, яка відповідає похідній, взятої за Олдроідом:

$$\hat{\sigma}^{ol} = \dot{\hat{\sigma}} - \nabla\vec{v}^T\,\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\,\vec{v} \qquad (50)$$

ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ

В даній роботі використовуються визначальні відношення для ізотропного матеріалу при умові малості пружніх деформацій. В якості міри швидкості деформації застосовується похідна Олдроіда від тензора деформацій, в якості міри швидкості зміни напруженого стану – похідна Олдроіда від тензора Коші [7]. Для ізотропних матеріалів справедливе адитивний розклад швидкості деформації на пружну, пластичну і повзучу складові. Враховуючи, що

$$\Delta\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{ol}\,\Delta t, \qquad (51)$$

аналогічне розкладу можна записати і для приростів [6]:

$$\Delta\hat{\varepsilon} = \Delta\hat{\varepsilon}^{l} + \Delta\hat{\varepsilon}^{\theta} + \Delta\hat{\varepsilon}^{P} + \Delta\hat{\varepsilon}^{C} \qquad (52)$$

Фізичні відношення для пружніх складових запишемо в формі закону Гука для приростів:

$$\Delta\hat{\sigma} = C\Delta\hat{\varepsilon}^{l}, \qquad (53)$$

де $\Delta\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{ol}\,\Delta t$

Приріст температурних деформацій визначається за формулою:

$$\Delta\hat{\varepsilon}^{\theta} = \hat{L}\nabla\vec{T}. \qquad (54)$$

Для визначення пластичних деформацій і деформацій повзучості використовуються закони пластичної текучості [3] і зміцнення [4, 10]:

$$\Delta\hat{\varepsilon}^{P} = d\lambda_P\,\hat{S}, \qquad (55)$$

$$\Delta\hat{\varepsilon}^{C} = d\lambda_C\,\hat{S}, \qquad (56)$$

Визначальні відношення, записані в формі (53) – (56) об'єктивні, індиферентність вхідних в них величин була показана раніше.

Головні параметри, вхідні в рівняння стану, визначаються з дослідів на простий розтяг або стиск при різних температурах нагріву циліндричних зразків і різної швидкості деформування. Діаграми зміцнення, побудовані в координатах (інтенсивність напружень) – (параметр Одквіста, який для одномірного деформування співпадає з – інтенсивністю логарифмічної міри деформацій) і, як показано в роботі Тормахова [11], достатньо повно характеризує поведінку матеріалу за границею пружності в процесах, близьких до простих ,що супроводжуються великими нелінійними деформаціями.

Для побудови рівнянь МССЕ використовуємо вираз варіації енергії деформації універсального призматичного СЕ загального типу в актуальній конфігурації:

)

$$\delta W=\frac{1}{2}\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\sigma^{ij}\delta G_{ij}\sqrt{G}dx^1dx^2dx^3. \quad (57$$

де G_{ij} - компоненти метричного тензора, знаходять за формулою

$$G_{ij}=\tilde{Z}^{m'}_{,i}\tilde{Z}^{m'}_{,j}+\tilde{Z}^{m'}_{,i}u^{m'}_{,j}+u^{m'}_{,i}\tilde{Z}^{m'}_{,j}+u^{m'}_{,i}u^{m'}_{,j}=\tilde{g}_{ij}+\Delta G_{ij}.$$

Враховуючи, що при варіюванні в актуальній конфігурації $\tilde{g}_{ij}$ залишається незмінним, перетворимо вираз (57):

$$\delta W=\frac{1}{2}\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\sigma^{ij}\delta\left(\Delta G_{ij}\right)\sqrt{G}dx^1dx^2dx^3. \quad (58)$$

Перейшовши до деформацій в актуальній конфігурації згідно $\Delta\varepsilon_{kl}=\Delta\varepsilon^{ij}G_{ik}G_{jl}\approx\Delta\varepsilon^{ij}\tilde{g}_{jl}=\frac{1}{2}\Delta G_{kl}$, отримаємо:

$$\delta W=\frac{1}{2}\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}G^{ij}\delta\left(\Delta\varepsilon_{ij}\right)\times\sqrt{G}dx^1dx^2dx^3. \quad (59)$$

Представивши у відповідності з МССЕ компоненти тензорів деформацій і напружень відрізками ряду Маклорена і виконавши інтегрування в області поперечного перерізу, запишемо вираз енергії деформації СЕ в актуальній конфігурації в матричній формі:

$$\delta W=\int_{-1}^{1}((\sigma\{\Delta\dot{\varepsilon}\}^T)\{\Delta\dot{\sigma}\}+\frac{1}{12}\int_{\alpha=1}^{2}(\sigma\{\dot{\varepsilon}\}^T_{,\alpha})\{\Delta\dot{\sigma}\}_{,\alpha}) \quad (60)$$

де

$$\{\Delta\dot{\varepsilon}\}^T=\{\Delta\dot{\varepsilon}_{11}2\Delta\dot{\varepsilon}_{12}\Delta\dot{\varepsilon}_{22}2\Delta\dot{\varepsilon}_{23}2\Delta\dot{\varepsilon}_{31}\Delta\dot{\varepsilon}_{33}\}^T.$$

$$\{\Delta\dot{\varepsilon}\}^T_{,\alpha}=\left\{\Delta\dot{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}2\Delta\dot{\varepsilon}_{(3-\alpha)3,\alpha}\Delta\dot{\varepsilon}_{33,\alpha}\right\}^T.$$

Знаходимо варіацію приростів деформацій в актуальній конфігурації, використовуючи вираз $\Delta\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\tilde{Z}^{m'}_{,i}u^{m'}_{,j}+u^{m'}_{,i}\tilde{Z}^{m'}_{,j}+u^{m'}_{,i}u^{m'}_{,j})$:

$$\delta\left(\Delta\varepsilon_{ij}\right)=\frac{1}{2}\left(Z^{m'}_{,i}\delta U^{m'}_{,j}+Z^{m'}_{,j}\delta U^{m'}_{,i}+\delta\left(U^{m'}_{,i}U^{m'}_{,j}\right)\right)=\frac{1}{2} \quad (61)$$

Взявши до уваги формулу $Z^{m'}_{,i}=\tilde{Z}^{m'}_{,i}+u^{m'}_{,i}$, приведемо (61) до вигляду, аналогічному запису варіації приростів лінійної деформації:

$$\delta\left(\Delta\varepsilon_{ij}\right)=\frac{1}{2}\left(Z^{m'}_{,i}\delta U^{m'}_{,j}+Z^{m'}_{,j}\delta U^{m'}_{,i}\right) \quad (62)$$

Це дозволить показати варіації приростів деформацій і їх похідних в формі, співпадаючій з отриманими раніше формулами для малих пластичних деформацій:

$$\delta\{\Delta\dot{\varepsilon}\}=\sum_{l=0}^{L}\left(\left[E\right]\varphi^{(l)}+\left[F\right]\varphi^{(l)}_{,3}\right)\delta\{U_l\}$$

$$\left(\Delta\dot{\varepsilon}\right)_{,\alpha}=\sum_{l=0}^{L}\left(\left[E\right]_{,\alpha}\varphi^{(l)}+\left[F\right]_{,\alpha}\varphi_{.3}^{(l)}\right) \quad (63)$$

Елементи матриць $[E]$, $[F]$, $[E]_{,\alpha}$, $[F]_{,\alpha}$ визначаються по значенням компонент тензора перетворення, обчисленим в актуальній конфігурації.

Підставимо (63) в вираз варіації енергії деформації скінченого елемента (60) і після чисельного інтегрування по формулі Гауса, отримаємо:

$$\delta W=\sum_{l=0}^{L}\delta\left\{U_l\right\}\left\{r_l\right\} \quad (64)$$

де $\left\{r_l\right\}$ - вектор вузлових реакцій.

По вигляду вираз (65) співпадає з отриманим без врахування великих пластичних деформацій, однак записано в актуальній конфігурації.

$$\left\{r_l\right\}=\sum_{k=1}^{N}(((\left[E\right]^{T}\left\{\dot{\sigma}\right\}+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{Z}\left[E\right]_{,\alpha}^{T}\left\{\dot{\sigma}\right\}_{,\alpha}\varphi^{(l)}+(\left[F\right]^{T}\left\{\dot{\sigma}+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{Z}\left[E\right]_{,\alpha}^{T}\left\{\dot{\sigma}\right\}_{,\alpha}\right\}\varphi_{.3}^{(l)}\sqrt{G})_k H_k \quad (65)$$

При розрахунку елементів лінеарізованої (з врахуванням зміни геометрії матриці жорсткості) використовуються отримані раніше співвідношення (30), а всі вхідні величини обчислюються в змінній відліковій конфігурації на кожному кроці по параметру зсуву.

ВИСНОВКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Отримані розрахункові співвідношення МССЕ універсального призматичного СЕ загального типу – вирази матриці жорсткості і вектору вузлових реакцій – для розв'язання геометрично нелінійних задач термов'язкопружнопластичності призматичних тіл. Що дозволить в подальшому досліджувати напружено-деформований стан криволінійних неоднорідних призматичних тіл.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Гуляр А.И.** Иcледование эффективности различных алгоритмов решения задачи упруго-пластического равновесия / А.И. Гуляр, И.В. Половец *// Сопротивления материалов и теория сооружений. -1983. Вып.42. – С.81-87.*
2. **Гуляр А.И.** Численное моделированиена основе метода конечных элементов процессов пластического формоизменения тел вращения при наличии сил трения */ А.И. Гуляр, И.В. Половец, А.С. Сахаров –Рукопись деп. В УкрНИИНТИ, № 1788 Ук-84 деп.*
3. **Качанов Л.М.** Основы теории пластичности *. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.*
4. **Качанов Л.М.** Теория ползучести . *– М.: Физматгиз, 1969. – 420 с.*
5. **Лурье А.И.** Нелинейная теория упругости/ *А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512с.*
6. **Максим'юк Ю.** Розв'язувальні співвідношення моментної схеми скінчених елементів в задачах термов'язкопружнопластичного деформування */ Ю. Максим'юк, А. Козак, О. Максим'юк // Будівельні конструкції теорія і практика – 2019. – Вип. 4. – С. 10–20.*
7. **Максим'юк Ю.В.** Індиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень при умові енергетичної сполученості / Ю.В. Максим'юк *// Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.99, 2017. С. 151-159.*
8. Метод конечных элементов в механике твердых тел. / [***Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. и др.***]. *- Киев: Вища школа, 1982.- 479с.*
9. Метод скінченних елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні / *[**Баженов В.А., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.**] – Київ: Вид-во "Каравела", 2018. – 316с.*
10. **Работнов Ю.Н.** Ползучесть элементов конструкций. - *М.: 1966. – 752 с.*
11. **Тормахов М.Н.** О связи между напряжениями и конечными пластическими деформациями при простом нагружении в пространстве истинных напряжений *// Рук. деп. ВИНИТИ №7899-В. – 13 с.*

REFERENCES

1. **Gulyar A.I.** Investigation of the effectiveness of various algorithms for solving the problem of

elastic-plastic equilibrium / *A.I. Gulyar, I.V. Polovets // Resistance of materials and theory of structures. -1983. Vol. 42. - S. 81-87.*
2. **Gulyar A.I.** Numerical modeling based on the finite element method of processes of plastic forming of bodies of revolution in the presence of friction forces / *A.I. Gulyar, I.V. Polovets, A.S. Sakharov — The manuscript of the dep. In UkrNIINTI, No. 1788 UK-84 dep.*
3. **Kachanov L.M.** Fundamentals of the theory of plasticity. - M .: Fizmatgiz, 1960 .-- 456 p.
4. **Kachanov L.M.** Creep theory. - M *.: Fizmatgiz, 1969 .-- 420 p.*
5. **Lurie A.I.** Nonlinear Theory of Elasticity */ A. I. Lurie. - M.: Nauka, 1980 .-- 512s.*
6. **Maksymyuk Yu.** Solving relations of the moment scheme of finite elements in problems of thermoviscoelastic deformation. */ Yu. Maksymyuk, A. Kozak, A. Maksymyuk // Building constructions theory and practice - 2019. - Vip. 4. - P. 10–20.*
7. **Maksimyuk Yu.V.** Indifference of tensors of deformations, stresses and their increments under the condition of energy connection / Yu.V. Maksymyuk *// Resistance of materials and theory of structures: scientific and technical. collection / Resp. ed. VA Bazhenov. – K .: KNUBA, Vip.99, 2017. P. 151-159.*
8. Finite element method in solid mechanics. / [**Sakharov AS, Kislookiy VN, Kirichevsky VV etc**.]. - *Kiev: Higher School, 1982.- 479p.*
9. Finite element method in problems of deformation and destruction of bodies of rotation under thermopower loading / **[Bazhenov VA, Piskunov SO, Maksimyuk Yu.V**.] - *Kyiv: Karavela Publishing House, 2018. - 316c.*
10. **Rabotnov Yu.N**. Creep of structural elements. - *M .: 1966. - 752* c.
11. **Tormakhov M.N** On the relationship between stresses and finite plastic deformations under simple loading in the space of true stresses // *Ruk. dep. GUILT №7899-B. - 13 p.*

UNIVERSAL PRISMATIC FINITE ELEMENT OF GENERAL TYPE FOR PHYSICALLY AND GEOMETRICALLY NONLINEAR PROBLEMS OF DEFORMATION OF PRISMATIC BODIES

Oleksandr Guliar, Yurii Maksymiuk
Andrii Kozak, Oleksandr Maksymiuk

Summary. When developing new finite elements within the semi-analytical finite element method, the determining factor for achieving high efficiency of their application is the choice of coordinate functions and the method of deriving the stiffness matrix. The approximation of the displacement along the coordinate of the schedule was carried out by a mixed system of coordinate functions, the first two members of which belong to the Lagrange polynomials, the others to Michlin. On the basis of a highly efficient finite element torque scheme, the solution relations for the universal prismatic FE of the general type are constructed, which allows to determine the stress-strain state for physically and geometrically nonlinear problems of prismatic bodies.

Objects of the allocated class are used as natural designs, knots and details in construction and various branches of mechanical engineering. For example, they include the foundations of industrial and civil buildings, elements of floors and coverings, arched dams, brackets, cutters, teeth of helical gears, and others. Deformation of the considered designs occurs under the influence of force and temperature factors, and, because of existence of essential differences of temperatures change of physical and mechanical characteristics of material is possible. At the current level of development of technology and technology in some structural elements allowed the occurrence of plastic deformations. For a number of parts in the process of operation and manufacture, the development of plastic deformations is accompanied by a significant change in the original shape. This is typical for the processes of processing metals by pressure, for example, in the manufacture of stamped cubes, drawing strips. Further improvement of design solutions in the development of responsible components and technological processes largely depends on the completeness and reliability of information about the peculiarities of the change in the picture of the stress-strain state during loading. In this regard, the development of methods for studying a selected class of objects is an urgent problem

Keywords: semi-analytical method of finite elements; moment scheme of finite elements; universal prismatic finite element of general type geometric nonlinearity; physical nonlinearity; thermoviscoelastic deformation; stress-strain state.