

УДК 532.546:

В.Л.ПОЛЯКОВ, доктор технических наук
Институт гидромеханики НАН Украины

ОБ ОДНОМ СТРОГОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПЛОСКОРАДИАЛЬНОГО ФИЛЬТРОВАНИЯ СУСПЕНЗИИ

Одержано строгий розв'язок задачі плоскорадіального фільтрування за умови, що відрив осаду визначається тільки його концентрацією. На багаточисленних прикладах проаналізовано вплив фільтраційного процесу опосередковано через адгезійний на технологічні параметри. Показано, що відмінності у характері такого впливу можуть зумовити зміни у захистній здатності завантаження фільтра у три – чотири рази.

Ключові слова: плоскорадіальне фільтрування; суспензія; шар завантаження; технологічний час; точний розв'язок.

Получено строгое решение задачи плоскорадимального фильтрования при условии, что отрыв осадка определяется только его концентрацией. На множестве примеров проанализировано влияние фильтрационного процесса опосредовано через адгезионный на технологические параметры. Показано, что различия в характере такого влияния могут обусловить изменения в защитной способности загрузки фильтра в три-четыре раза.

Ключевые слова: плоскорадимальное фильтрование; суспензия; слой загрузки; технологическое время; точное решение.

An exact solution has been obtained to the axesymmetric suspension filtration task when deposition detachment was due to only its concentration. At numerous examples effect of suspension flow rate has been analyzed on technological parameters. It has been shown, that essential variety in the effect was able to cause changes in protective property of filter medium by three-four fold.

Key words: axial deep-bed filtration; suspension; filter medium; technological time; exact solution.

Плоскорадіальне фільтрування (рис.1) спроможно забезпечити ефективне розділення суспензії і поєтому має хороші перспективи. Однак, прежде всего ввиду сложности формального описания оно практически не изучалось теоретическими методами. Можно лишь отметить отдельные работы [1-3], в которых предпринимались попытки подвести теоретическую базу нетрадиционное фильтрование.

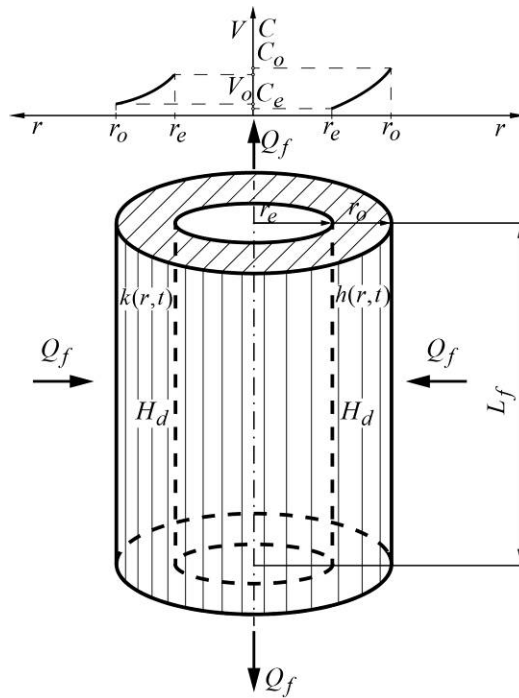


Рис.1. Схема плоскорadiaльного фильтрования суспензии (подача извне)

Но даже полученные при этом, по существу, частные результаты показывают, что благодаря целенаправленному изменению конфигурации фильтрационного потока значительный осветлительный ресурс современных фильтровальных установок удастся реализовать гораздо полнее. Углублено же изучить закономерности плоскорadiaльного фильтрования, а в дальнейшем разработать инженерную методику обоснования соответствующих технологических и конструктивных параметров дает возможность новое приближенное аналитическое решение, которое представлено в работе [4]. И в связи с этим большое значение приобретает оценка его точности, которую можно сделать путем сопоставления с точным решением. Именно такое решение при дополнительном ограничении приводится ниже. В его основе лежит одна из базовых в теории фильтрования математических моделей, которая отдельно описывает обе составляющие массообмена между твердой и жидкой фазами пористой (зернистой) среды. При ее выводе используется обычная система проверенных допущений и в итоге она принимает следующий вид

$$V(r) \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha_V V^l(r) C - \beta_V V^q(r) S, \quad (2)$$

$$V(r) = k(S) \frac{\partial h}{\partial r}, \quad (3)$$

$$k(S) = k_0 \left[1 - \left(\gamma \frac{S}{n_0} \right)^{m_1} \right]^{m_2}; \quad (4)$$

$$t = 0, \quad S = 0; \quad (5)$$

$$r = r_0, \quad C = C_0; \quad (6)$$

$$r = r_e, \quad h = H_d. \quad (7)$$

Здесь V – переменная в радиальном направлении скорость фильтрования; C, S – объемные концентрации взвешенных и осажденных частиц суспензии; h – пьезометрический напор; α_V, β_V – приведенные постоянные коэффициенты скоростей прилипания и отрыва указанных частиц, входящие в принятые степенные выражения для переменных коэффициентов скоростей прилипания (α) и отрыва (β) [5]

$$\alpha(r) = \alpha_V V^l(r), \quad \beta(r) = \beta_V V^q(r), \quad (8)$$

γ – соотношение между объемными концентрациями осадка и содержащихся в нем частиц суспензии; k, k_0 – коэффициенты фильтрации заиляемой и чистой загрузки; n_0 – пористость чистой загрузки; r_0, r_e – радиусы внешней и внутренней цилиндрических поверхностей загрузки; C_0 – исходная объемная концентрация взвеси; H_d – напор на выходе из загрузки; l, q, m_1, m_2 – эмпирические коэффициенты.

Окончательный, обобщенный вид модели (1) – (7) придается после введения безразмерных переменных и параметров, включающих в качестве масштабов длины и скорости величины r_0 и V_0 , где гидравлическая нагрузка $V_0 = Q_f / (2\pi r_0 L_f)$, Q_f – производительность фильтра, L_f – высота цилиндрической загрузки. В итоге получено

$$\bar{V}(\bar{r}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} = \bar{\alpha}_V \bar{V}^l(\bar{r}) \bar{C} - \bar{\beta}_V \bar{V}^q(\bar{r}) \bar{S}, \quad (10)$$

$$\bar{V}(\bar{r}) = -\bar{k}(\bar{S}) \ln \bar{r}_e \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{r}}, \quad (11)$$

$$\bar{k}(\bar{S}) = (1 - \bar{\gamma}^{m_1} \bar{S}^{m_1})^{m_2}; \quad (12)$$

$$\bar{t} = 0, \quad \bar{S} = 0; \quad (13)$$

$$\bar{r} = 1, \quad \bar{C} = 1; \quad (14)$$

$$\bar{r} = \bar{r}_e, \quad \tilde{h} = 0. \quad (15)$$

Здесь

$$\bar{V} = V/V_0, \quad \bar{C} = C/C_0, \quad \bar{S} = S/(n_0 C_0), \quad \bar{r} = r/r_0, \quad \bar{r}_e = r_e/r_0, \quad \bar{t} = V_0 t / (n_0 r_0);$$

$$\bar{\alpha}_V = r_0 V_0^{l-1} \alpha_V, \quad \bar{\beta}_V = n_0 r_0 V_0^{q-1} \beta_V, \quad \bar{k} = k/k_0, \quad \bar{\gamma} = \gamma C_0,$$

$$\tilde{h}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{h(r, t) - H_d}{h(r_0, 0) - H_d} = k_0 \frac{h(r, t) - H_d}{r_0 V_0}.$$

Так как осветлительный блок, включающий уравнения (9), (10), начальное (13), граничное (14) условия, благодаря известной величине $\bar{V}(\bar{r})$ и пренебрежению производной $\partial\bar{h}/\partial\bar{t}$ в уравнении массопереноса не зависит от фильтрационного блока, то решается он отдельно с применением интегрального преобразования Лапласа. Из (10) следует выражение для изображения \bar{S}_L

$$\bar{S}_L(\bar{r}, p) = \frac{\bar{\alpha}_V \bar{V}^l(\bar{r})}{p + \bar{\beta}_V \bar{V}^q(\bar{r})} \bar{C}_L(\bar{r}, p). \quad (16)$$

Тогда трансформированное уравнение (9) относительно функции-изображения $\bar{C}_L(\bar{r}, p)$ принимает вид

$$\bar{V}(\bar{r}) \frac{d\bar{C}_L}{d\bar{r}} - \frac{\bar{\alpha}_V \bar{V}^l(\bar{r}) p}{p + \bar{\beta}_V \bar{V}^q(\bar{r})} \bar{C}_L = 0 \quad (17)$$

и решается при условии

$$\bar{r} = 1, \quad \bar{C}_L = \frac{1}{p}. \quad (18)$$

В результате для искомой \bar{C}_L получено представление

$$\bar{C}_L(\bar{r}, p) = \frac{1}{p} \exp \left[-\bar{\alpha}_V p \int_{\bar{r}}^1 \frac{\bar{V}^{l-1}(\xi) d\xi}{p + \bar{\beta}_V \bar{V}^q(\xi)} \right]. \quad (19)$$

Вывести строгие зависимости, которые удобны для расчетов с помощью пакетов программ математического анализа типа Mathcad, Matlab, удается в частном случае $q = 0$. Тогда выражение (19) заметно упрощается, так что

$$\bar{C}_L(\bar{r}, p) = \frac{1}{p} \exp \left[\frac{\bar{\beta}_V U(\bar{r})}{p + \bar{\beta}_V} - U(\bar{r}) \right], \quad (20)$$

где $U(\bar{r}) = \bar{\alpha}_V \int_{\bar{r}}^1 \bar{V}^{l-1}(\xi) d\xi$. В случае плоскорадиального фильтрования

$$\bar{V} = \frac{1}{\bar{r}}. \quad (21)$$

Обращение (20) дает для оригинала $\bar{C}(\bar{r}, \bar{t})$ такое выражение

$$\bar{C}(\bar{r}, \bar{t}) = e^{-U(\bar{r})} \left[e^{-\bar{\beta}_V \bar{t}} I_0 \left(2\sqrt{\bar{\beta}_V U(\bar{r}) \bar{t}} \right) + \bar{\beta}_V \int_0^{\bar{t}} e^{-\bar{\beta}_V \lambda} I_0 \left(2\sqrt{\bar{\beta}_V U(\bar{r}) \lambda} \right) d\lambda \right], \quad (22)$$

где $I_0(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента первого рода нулевого порядка. Если скорость \bar{V} меняется согласно (22), то

$$\bar{U}(\bar{r}) = \bar{\alpha}_V \frac{1 - \bar{r}^{2-l}}{2-l}. \quad (23)$$

Таким образом, при $l = 0$ и 1 $\bar{U}(\bar{r})$ равно соответственно

$$U(\bar{r}) = \bar{\alpha}_V \frac{1 - \bar{r}^2}{2}, \quad U(\bar{r}) = \bar{\alpha}_V (1 - \bar{r}). \quad (24)$$

С учетом (19) изображение $\bar{S}_L(\bar{r}, p)$ будет

$$\bar{S}_L(\bar{r}, p) = \frac{\bar{\alpha}_V \bar{V}^l(\bar{r})}{p[p + \bar{\beta}_V \bar{V}^q(\bar{r})]} \exp \left[-\bar{\alpha}_V p \int_{\bar{r}}^1 \frac{\bar{V}^{l-1}(\xi) d\xi}{p + \bar{\beta}_V \bar{V}^q(\xi)} \right]. \quad (25)$$

Просто обратить выражение (25) возможно также при $q = 0$. Тогда оно преобразуется к виду

$$S_L(\bar{r}, p) = \frac{\bar{\alpha}_V \bar{V}^l(\bar{r})}{p(p + \bar{\beta}_V)} \exp \left[\frac{\bar{\beta}_V U(\bar{r})}{p + \bar{\beta}_V} - U(\bar{r}) \right]. \quad (26)$$

В результате обращения (26) найдено

$$\bar{S}(\bar{r}, p) = \bar{\alpha}_V \bar{V}^l(\bar{r}) e^{-U(\bar{r})} \int_0^{\bar{r}} e^{-\bar{\beta}_V \lambda} I_0(2\sqrt{\bar{\beta}_V U(\bar{r}) \lambda}) d\lambda. \quad (27)$$

Следовательно, например, при $l = 1$ и плоскорадиальном фильтровании из (27) вытекает

$$\bar{S}(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{\alpha}_V \bar{r}^{-l} e^{-\bar{\alpha}_V(1-\bar{r})} \int_0^{\bar{r}} e^{-\bar{\beta}_V \lambda} I_0(2\sqrt{\bar{\alpha}_V \bar{\beta}_V (1-\bar{r}) \lambda}) d\lambda. \quad (28)$$

Так как на входе в загрузку $\bar{V} = 1$ при любых значениях l и q , то точное выражение для относительной входной концентрации $\bar{S}_0(\bar{t}) = \bar{S}(1, \bar{t})$ формально будет таким же как при вертикальном фильтровании, а именно,

$$\bar{S}_0(\bar{t}) = \frac{\bar{\alpha}_V}{\bar{\beta}_V} (1 - e^{-\bar{\beta}_V \bar{t}}). \quad (29)$$

Значительные же различия проявятся здесь после перехода к размерным величинам, поскольку l и q присутствуют в комплексах $\bar{\alpha}_V, \bar{\beta}_V$.

Наконец, формула (22) позволяет аккуратно оценить первичную защитную способность загрузки. Сразу после прохождения через нее фронта загрязнения (первая стадия) остаточное количество взвеси, которое характеризуется величиной $\bar{C}(\bar{r}_e, 0)$, в соответствии с (22) будет

$$\bar{C}_e^0 = \bar{C}(\bar{r}_e, 0) = \exp \left(\bar{\alpha}_V \frac{\bar{r}_e^{2-l} - 1}{2-l} \right). \quad (30)$$

Если же величина C_e^0 наперед задана, то требуемый начальный уровень осветления суспензии обеспечивается при относительном радиусе внутренней поверхности загрузки

$$\bar{r}_e = \left(1 + \frac{2-l}{\bar{\alpha}_V} \ln \bar{C}_e^0 \right)^{l-2}. \quad (31)$$

Вообще же функция, характеризующая количество и расположение взвешенного вещества в загрузке к концу кратковременной первой стадии $\bar{C}^0(\bar{r})$, имеет вид

$$\bar{C}^0(\bar{r}) = \exp \left[-\bar{\alpha}_V \int_{\bar{r}}^1 \bar{V}^{l-1}(\xi) d\xi \right].$$

При известной динамике распределения осажденных частиц в загрузке фильтрационный блок также решается точно. Тогда профили приведенного напора $\tilde{h}(\bar{r}, \bar{t})$ описываются общим интегралом

$$\tilde{h}(\bar{r}, \bar{t}) = -\frac{1}{\ln \bar{r}_e} \int_{\bar{r}_e}^{\bar{r}} \frac{\bar{V}(\xi) d\xi}{[1 - \bar{\gamma}^{m_1} \bar{S}^{m_1}(\xi, \bar{t})]^{m_2}}, \quad (32)$$

а при плоскорадиальном фильтровании

$$\tilde{h}(\bar{r}, \bar{t}) = -\frac{1}{\ln \bar{r}_e} \int_{\bar{r}_e}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\xi [1 - \bar{\gamma}^{m_1} \bar{S}^{m_1}(\xi, \bar{t})]^{m_2}}, \quad (33)$$

Таким образом, согласно (33), полные приведенные потери напора в загрузке в начальный момент времени составляют 1, а к произвольному моменту времени достигают величины

$$\Delta \bar{h}(\bar{t}) = \frac{h(r_0, t) - H_d}{h(r_0, 0) - H_d} = \tilde{h}(1, \bar{t}).$$

В проведенном на базе строгих зависимостей (22) и (33) количественном анализе в центре внимания оказался показатель l , который как и коэффициент α_V контролирует интенсивность и характер процесса прилипания взвеси к элементам фильтрующего материала и уже образовавшемуся осадку. По известным автору литературным данным он варьируется в широких пределах – от -0.3 до 0.875 [6-9]. Именно такой диапазон был выбран для l при расчетах времени достижения выходной концентрацией взвеси \bar{C}_e и полными приведенными потерями напора $\Delta \bar{h}$ наперед заданных величин, причем как функций от указанного показателя. Тогда первая расчетная формула приняла следующий вид

$$\bar{C}_e(\bar{t}; l) = \bar{C}(\bar{r}_e, \bar{t}; l) = e^{-U(\bar{r}_e; l)} \left[e^{-\bar{\beta}_V \bar{t}} I_0 \left(2\sqrt{\bar{\beta}_V U(\bar{r}_e; l) \bar{t}} \right) + \bar{\beta}_V \int_0^{\bar{t}} e^{-\bar{\beta}_V \lambda} I_0 \left(2\sqrt{\bar{\beta}_V U(\bar{r}_e; l) \lambda} \right) d\lambda \right], \quad (34)$$

где $U(\bar{r}_e; l) = \bar{\alpha}_V \frac{1 - \bar{r}_e^{2-l}}{2-l}$. Во всех примерах обеспечивались на входе в загрузку идентичные для адгезионного процесса условия. Достигалось это путем специального подбора $\alpha_V(l)$, так что значение коэффициента $\alpha_0 = \alpha(r_0) = \alpha_V(l) \cdot V_0^l$, а следовательно и $\bar{\alpha}_V$ не зависели от l . Вместе с тем содержание взвеси в фильтрате существенно отличалось при крайних в примерах значениях l . Предметом вычислений стало прежде всего относительное время \bar{t}_p , в течение которого качество осветления воды удовлетворяло существующим санитарно-гигиеническим нормам. Полагалось, что, исходя из них и начальной концентрации примеси C_0 , необходимо удалить 90% количества последней. Совокупность значений \bar{t}_p находилась подбором из уравнения (34) при $\bar{\beta}_V = 0.005$, $\bar{r}_e = 0.25$ и ряде значений коэффициента $\bar{\alpha}_V(8, 10, 12)$. Соответствующие кривые зависимости

$\bar{t}_p(l)$ показаны на рис. 2. Судя по ним, предельное ослабление влияния фильтрационного процесса на адгезионный приводит к значительному сокращению времени \bar{t}_p (в 3-4 раза) и может стать причиной преждевременной промывки фильтра.

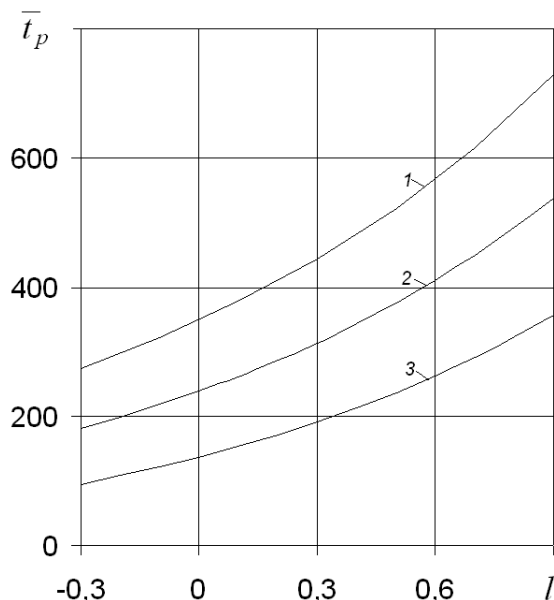


Рис. 2. Зависимость $\bar{t}_p(l)$: **1** – $\bar{\alpha}_v = 12$, **2** – $\bar{\alpha}_v = 10$, **3** – $\bar{\alpha}_v = 8$

Во второй серии примеров рассчитывалось относительное время \bar{t}_h , за которое начальные потери напора (в чистой загрузке) возрастали в 8 раз, так что $\Delta \bar{h} = \tilde{h}(\bar{r}_e, \bar{t}_h; l) = 8$. Дополнительно полагалось $\bar{\gamma} = 0.001$, $m_1 = 1$, $m_2 = 3$. Уравнение (33) с учетом постоянства \tilde{h} опять решалось подбором относительно \bar{t}_h , что позволило построить семейство кривых $\bar{t}_h(l)$ (рис.3). Отсюда видно, что связь между временем \bar{t}_h и показателем l выражена сравнительно слабо. Действительно, механическая энергия затрачивается на преодоление гидравлического сопротивления главным образом вблизи внешней поверхности загрузки. Именно здесь частицы суспензии осаждаются с наибольшей интенсивностью, которая благодаря постоянству коэффициента α_0 практически не зависит от l . С увеличением l от -0.3 до 0.9 в случае хорошо сорбирующей загрузки ($\bar{\alpha}_v = 12$) \bar{t}_h возрастает только на 20%, а умеренно сорбирующей ($\bar{\alpha}_v = 8$) – даже имеет место минимальное уменьшение \bar{t}_h (на 3.4 %).

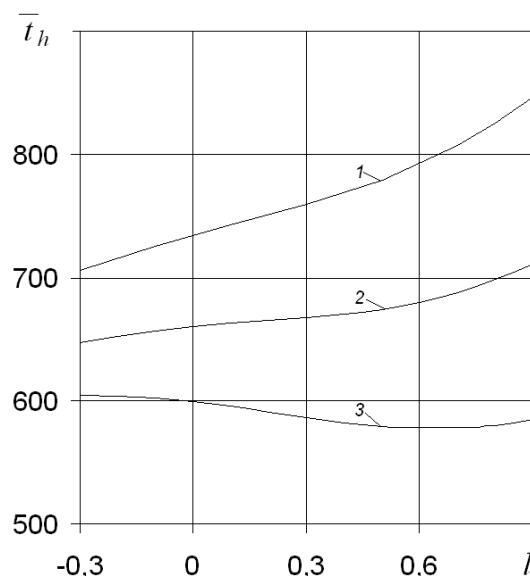


Рис. 3. Зависимость $\bar{t}_h(l)$: **1** – $\bar{\alpha}_V = 12$, **2** – $\bar{\alpha}_V = 10$, **3** – $\bar{\alpha}_V = 8$

Список литературы

1. *Войтов Е.Л.* Доочистка биологически очищенных городских сточных вод на радиальных фильтрах. Автореферат дис. на соиск. учен. степени канд.техн.наук (05.23.04) – Новосибирск, 1974. – 27 с.
2. *Дзюбо В.В.* Радиальные фильтры обезжелезивания подземных вод. Инженерные и технологические решения // Сантехника.– 2006.– С.16-19.
3. *Дзюбо В.В., Алферова Л.И.* Фильтрация природных вод в режиме неравномерных скоростей // Вестник ТГАСУ. – 2007. – № 2. – С.180-190.
4. *Поляков В.Л.* Теоретический анализ плоскорадиального фильтрования суспензии // Доп. НАН України. – 2013. – № 12. – С.52-59.
5. *Сенявин М.М., Веницианов Е.В., Аюкаев Р.И.* О математических моделях и инженерных методах расчета процесса очистки природных вод фильтрованием // Водные ресурсы. – 1977. – № 2. – С.157-170.
6. *Миц Д.М.* Теоретические основы технологии очистки воды. – М.: Стройиздат, 1964. – 155 с.
7. *Ison C.R., Ives K.J.* Removal mechanism in deep bed filtration // Chem. Engng. – 1969. – V.21. – P.337-350.
8. *Rajagopalan R., Tien C.* Trajectory analysis of deep-bed filtration with the sphere-in-cell porous media model // A.I.Ch.E. – 1976. – 22. – P.523-533.
9. *Tufenkji N., Elimelech M.* Correlation equation for predicting single-collector efficiency in physicochemical filtration in saturated porous media // Environ. Sci. Technol. – 2004. – 38. – P.529-536.