

УДК 539.3

к.т.н. Жупаненко І.В.,  
д.т.н., професор Чибіряков В.К.,  
Київський національний університет будівництва і архітектури

## ЧАСТОТИ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНОЇ ШАРНІРНО-ОБПЕРТОЇ ПЛАСТИНИ. ПОВІДОМЛЕННЯ 2: ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

*Розглядається задача визначення частот власних коливань прямокутної шарнірно-обпертої пластини сталої товщини. В рамках моделі лінійної просторової теорії пружності ізотропного тіла запропоновано розв'язок задачі на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень.*

**Мета і задачі дослідження.** Описана в повідомленні [1] методика визначення частот власних згинальних коливань прямокутного в перерізі та в плані однорідного ізотропного пружного тіла, торцеві поверхні якого закріплені по типу шарнірного обпирання, реалізована в пакеті прикладних програм. Це дозволяє визначати частоти коливань пластини в широкому діапазоні зміни її геометрії. Метою даного повідомлення є порівняльний аналіз отриманих за різними підходами частот власних коливань пластини.

Вибір авторами даної статті тестових задач ґрунтується на таких міркуваннях:

- 1) розв'язки, отримані по викладеній в повідомленні [1] методиці, порівнюються з наведеними в книгах, статтях та технічних публікаціях частотами, отриманими за альтернативними підходами;
- 2) тестові приклади охоплюють усі області умовного поділу пластин на тонкі, середньої товщини і товсті, що відображає границі області застосування різних підходів.

**Задача 1.** Розглядається пластини, що відноситься до класу тонких.

Така задача має відомий аналітичний розв'язок [2] з позиції класичної теорії пластин Кірхгофа. Частоти власних коливань пластини визначаються за формулою:

$$\omega_{nm} = \pi^2 \left( \frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad (1)$$

де  $\omega_{nm}$  – колова частота коливань;  $n$ ,  $m$  – кількість півхвиль деформації в напрямку  $l_x$  та  $l_y$  відповідно;  $\rho$  – щільність матеріалу пластини;  $h$  – товщина пластини;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$  – циліндрична жорсткість пластини;  $E$  – модуль пружності матеріалу;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Прийняті розміри пластини в плані  $l_x = 2$  м,  $l_y = 1$  м. Матеріал

пластини – сталь: щільність  $\rho = 7,8 \frac{\text{Т}}{\text{М}^3}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ , модуль пружності  $E = 2 \times 10^8$  МПа.

На рис. 1 представлені графіки залежності чотирьох нижчих частот коливань  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{12}$  і  $\omega_{22}$  від відносної товщини прямокутної пластини. По осі абсцис відкладено відносну товщину пластини  $\varepsilon = \frac{l}{h}$ , а по осі ординат – колові частоти  $\omega_{nm}$ . Суцільною лінією показані значення, отримані на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень по описаній в [1] методиці, маркованою лінією показані значення, отримані на основі класичної теорії пластин за формулою (1).

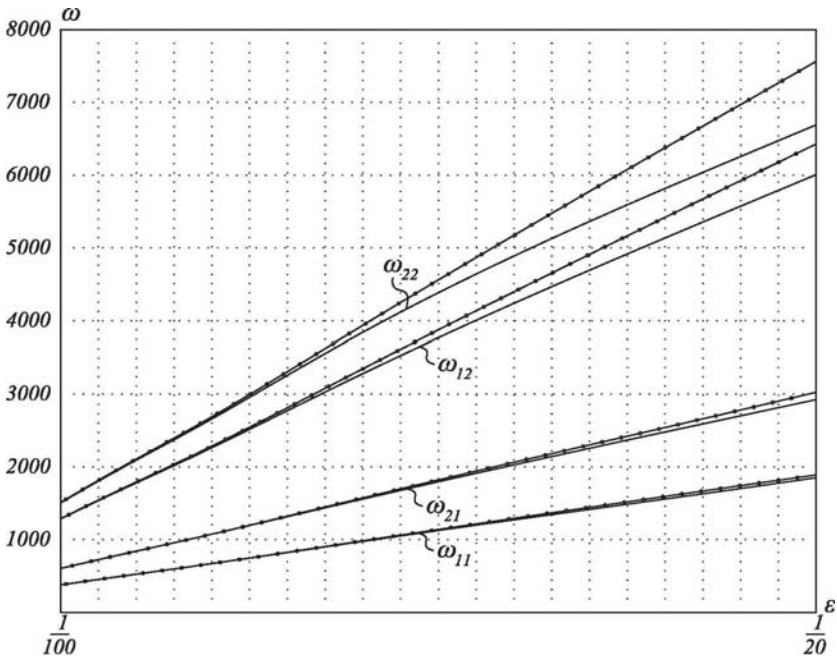


Рис. 1

Як видно з рисунка, характер кривих, отриманих на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень, повністю ідентичний отриманим по класичній теорії. Крім того, отриманий авторами розв'язок відображає відомі обмеження класичної теорії: збіжність результатів погіршується із збільшенням відносної товщини пластини та із зростанням номера частоти.

**Задача 2.** Для описаної в задачі 1 пластини розглянемо область середньої товщини. Пластини середньої товщини розраховуються з позиції уточненої теорії пластини типу Тимошенка. В роботі [3] на основі рівнянь теорії пластин типу Тимошенка отримано аналітичний розв'язок задачі про власні коливання прямокутної шарнірно обпертої по чотирьох сторонах пластини. Відносна частота власних коливань визначається за формулою:

$$\xi_{nm} = \sqrt{\frac{1}{A_0} \left[ (1 + A_1 \gamma) - \sqrt{(1 + A_1 \gamma)^2 - 4A_0 A_2 \gamma^2} \right]}, \quad (2)$$

де  $\xi_{nm}$  – відносна частота власних коливань, пов'язана з коловою частотою співвідношенням:

$$\xi_{nm} = \omega_{nm} h \sqrt{\frac{8\rho(1+\nu)}{E}};$$

$\gamma$  – параметр, що визначає відносну товщину пластини:

$$\gamma = \pi^2 h^2 \left( \frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2} \right);$$

$$A_0 = \frac{7-8\nu}{12(1-\nu)}, \quad A_1 = \frac{2(2-\nu)}{3(1-\nu)}, \quad A_2 = \frac{2}{3(1-\nu)}.$$

На рис. 2 представлені графіки залежності чотирьох нижчих частот коливань  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{12}$  і  $\omega_{22}$  пластини від її відносної товщини. Як і в попередній задачі по осі абсцис відкладено відносну товщину пластини  $\varepsilon = \frac{h}{l_x}$ , а по осі ординат – колові частоти  $\omega_{nm}$ .

Суцільною лінією показані значення, отримані на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень по описаній в [1] методиці, маркованою лінією показані значення, отримані на основі теорії типу Тимошенка за формулою (2).

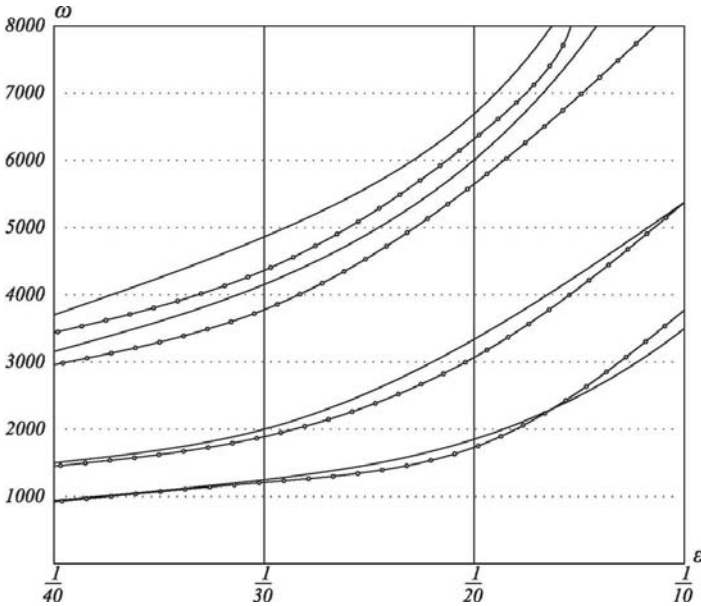


Рис.2

Аналіз отриманих кривих показує, що, як і в попередньому випадку, отримані авторами залежності для частот ідентичні отриманим по теорії типу Тимошенка. При цьому простежується хороша збіжність результатів для двох нижчих частот, а з ростом номера частоти збіжність дещо погіршується. Це пояснюється особливостями побудови різних теорій пластин. В класичній теорії і теорії типу Тимошенка шляхом введення гіпотез задача зводиться до двовимірної області серединної площини пластини. Відповідно і закріплення торцевих поверхонь приймається лише в серединній площині, в той час як в узагальненому методі скінченних інтегральних перетворень закріплення моделюється по всій торцевій поверхні пластини. Закріплення всієї торцевої поверхні пластини підвищує її жорсткість порівняно із закріпленням тільки на серединній площині. При цьому при збільшенні відносної товщини пластини і номера частоти вплив зазначених вище відмінностей зростає.

**Задача 3.** Розглядається товста квадратна в плані пластина, розміри якої показані на рис. 3. Матеріал пластини – сталь: щільність  $\rho = 8 \frac{\text{т}}{\text{м}^3}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ , модуль пружності  $E = 2 \times 10^8$  МПа.

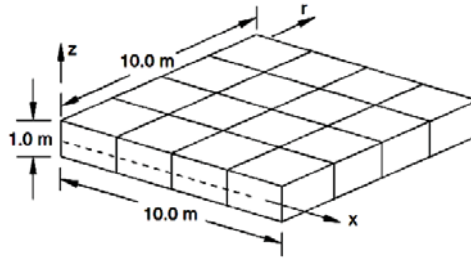


Рис. 3

В роботі [4] частоти власних коливань такої пластини визначені методом скінченних елементів. При цьому використовувались різні варіанти скінченно-елементної моделі.

В табл. 1 наведено значення колових частот коливань пластини, отримані авторами (другий рядок) та опубліковані в роботі [4] для трьох показаних на рис. 4 варіантів скінченно-елементної моделі пластини.

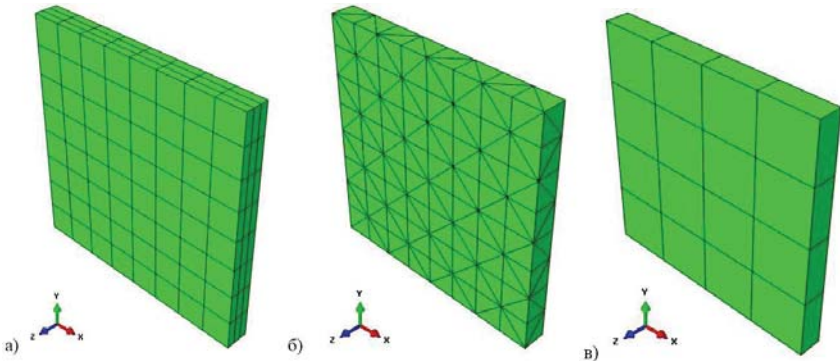


Рис. 4. Скінченно-елементна модель пластини:

- а) 8-вузловий шестигранний скінченний елемент суцільного середовища з лінійною функцією форми;
- б) 10-вузловий тетраедральний скінченний елемент суцільного середовища з квадратичною функцією форми;
- в) 20-вузловий шестигранний скінченний елемент суцільного середовища з квадратичною функцією форми

Відомо, що точність розв'язку задачі методом скінченних елементів залежить від коректності вибору типу скінченного елемента і густоти сітки. З табл. 1 видно, що значення частот, отриманих методом скінченних елементів різні для різних типів скінченних елементів, а загального критерію оцінки точності розв'язку немає. Оцінити точність розв'язку, а точніше коректність

скінченно-елементної моделі об'єкта розрахунку, можна лише при порівнянні отриманих результатів з альтернативними, отриманими за принципово іншим підходом.

Як видно з таблиці, спостерігається найкраща збіжність результатів, отриманих для варіанту «в» скінченно-елементної моделі (останній рядок таблиці), із отриманими авторами на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень. При цьому в роботі [4] приймається шарнірне обпирання лише по контуру нижньої грані пластини, що, як зазначалося раніше, призводить до деяких розбіжностей між розрахунковими значеннями частот.

Таблиця 1

Тип СЕ	Частоти, Гц		
Запропонована методика	45.97	109.86	168.82
National Agency for Finite Element Methods and Standards	44.092	106.66	156.23
а) 8-вузловий шестигранний СЕ суцільного середовища з лінійною функцією форми	44.092	106.66	156.23
б) 10-вузловий тетрадральний СЕ суцільного середовища з квадратичною функцією форми	44.348	107.73	163.58
в) 20-вузловий шестигранний СЕ суцільного середовища з квадратичною функцією форми	44.796	110.54	169.10

**Висновки.** Основоположною будь-якої теорії пластин є проблема приведення, яка полягає в тому, щоб отримати максимально прості двовимірні рівняння, розв'язок яких дозволить адекватно відтворити тривимірний напружено-деформований стан пластини. При цьому вихідні положення різних теорій пластин накладають обмеження на область зміни геометрії об'єкта, для якої дана теорія забезпечує надійні розв'язки. Але встановити чіткі границі цієї області неможливо, оскільки достовірність розв'язку визначається декількома факторами в сукупності (наприклад, відносна товщина пластини і номер частоти власних коливань). Наведені в даному повідомленні задачі наглядно ілюструють, що для розглянутих класів пластин застосовуються різні теорії, в той час як запропонована авторами методика дозволяє розглядати всі ці класи з єдиних позицій. З огляду на це можна зробити висновок, що узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень як варіант побудови теорії пластин вільний від обмеження відносною товщини об'єкта, і, відповідно, одного з критеріїв оцінки точності розв'язку.

Оскільки точний розв'язок задачі про коливання пластини з позиції тривимірної теорії пружності відсутній, оцінка адекватності будь-якого

варіанту приведення і точності та ефективності методу розв'язання двовимірної задачі базується на порівнянні одного наближеного розв'язку з іншим. В цьому відношенні корисним є розвиток узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень як такого, що дозволяє отримати альтернативний розв'язок для порівняння з усіма відомими варіантами теорій і методами розв'язання задач про коливання пластин.

Проте для максимальної об'єктивності такого аналізу необхідно в запропонованій авторами методиці розширити можливості моделювання граничних умов. Зокрема, в застосованій в даному повідомленні методиці приймається закріплення усієї торцевої поверхні пластини, в той час як розв'язані тестові задачі показали необхідність моделювання обпирання пластини по контуру.

### Література

1. Жупаненко І. В. Частоти власних коливань прямокутної шарнірно-опертої пластини. Повідомлення 1: постановка та методика розв'язання задачі / І. В. Жупаненко, В. К. Чибіряков // Містобудування та територіальне планування. – Вип. 49. – К. : КНУБА, 2013. – С. 201 – 206.
2. Собственные колебания пластинок и оболочек: справочник / В. С. Гонткевич; под ред. А. П. Филиппова. – К. : Наукова думка, 1964. – 288 с.
3. Егорычев О. А., Егорычев О. О. Краевые задачи колебания пластин: монография / ГОУ ВПО Моск. гос. строит. ун-т. – М.: МГСУ, 2010. – 167 с.
4. Разработка верификационного отчета по использованию программного комплекса Abaqus для решения задач строительного профиля: научно-технический отчет. Том 2. Верификационные примеры. – М.: ГОУ ВПО Моск. гос. строит. ун-т. , 2013. – 186 с.

### Аннотация

Исследуется задача определения частот собственных колебаний прямоугольной шарнирно-опертой пластины постоянной толщины. В рамках модели линейной пространственной теории упругости изотропного тела предложено решение задачи на основании обобщенного метода конечных интегральных преобразований.

### Summary

A problem is considered about the determination of natural frequencies of the rectangular invariable thickness plate with hinged support on the butt ends. The solution of the problem is limited by the framework of the three-dimensional elasticity theory and is based on the method of finite integral transforms.