

ФОКАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КОНГРУЭНЦИИ ОТРАЖЕННЫХ ЛУЧЕЙ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

*Национальная академия природоохранного и курортного строительства,
Украина*

Abstract. The way of caustic surfaces (focal surface of congruence) description for solar ray reflection is considered. The reflecting surfaces are the surfaces of revolution and they are given by parametric equation.

Анотація. У статті розглянуто спосіб знаходження поверхонь каустик при відбитті сонячних променів від поверхонь обертання, які задані параметричними рівняннями.

Постановка проблеми. При исследовании отраженного потока возникает интерес описания поверхности, которой касаются все отраженные лучи, т.е. каустической или фокальной поверхности.

Анализ исследований и публикаций. Ранее были получены аналитические описания каустик на плоскости при отражении от различных кривых [2]. Все гораздо сложнее и интереснее в трехмерном пространстве. Там на каждом отраженном луче есть две точки концентрации энергии, т.е. каустическая поверхность в пространстве состоит из двух листов. Известно, что каустики в трехмерном пространстве имеют стандартные особенности: «ласточкин хвост», «пирамида», «кошелек» [1] (рис.1).

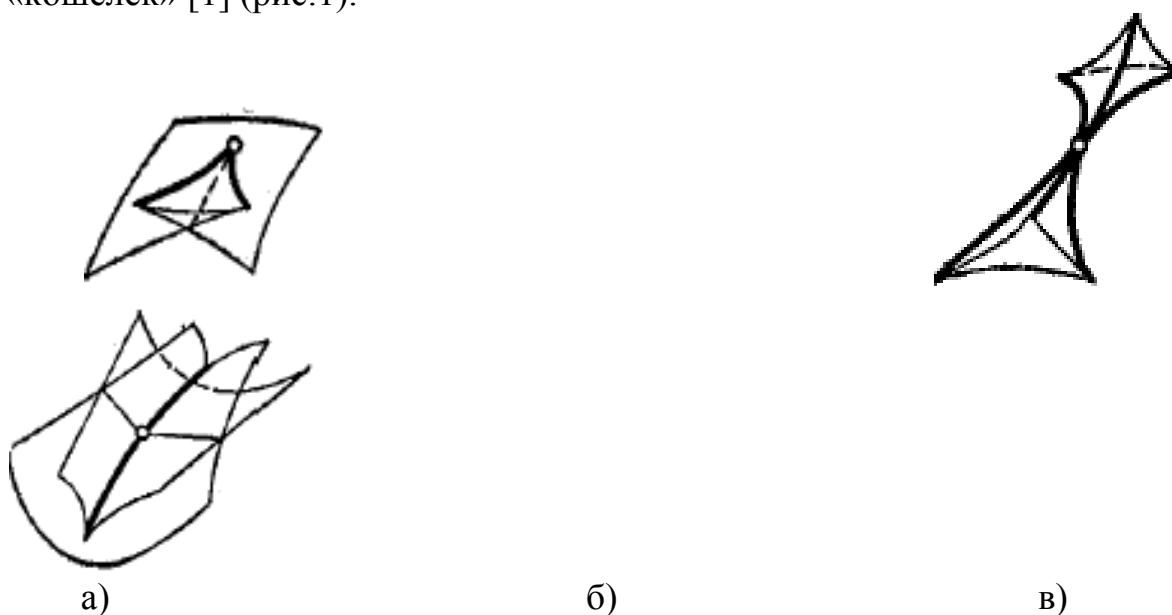


Рис.1

Формулировка целей и задач статьи. Получить формулу для нахождения каустических поверхностей конгруэнции отраженных лучей в

трехмерном пространстве. Осуществить компьютерную визуализацию данных поверхностей при отражении лучей от поверхности параболоида вращения и конической поверхности.

Основная часть. Пусть световые лучи задаются своими начальными точками, которые лежат на поверхности $p = p(u, v)$. Пусть точка $p = p(u, v)$ с изменением параметров u и v пробегает отражающую поверхность. Если отражение луча произошло в точке $p(u, v)$ и направляющий вектор луча стал $\vec{l} = \vec{l}(u, v)$, то уравнение луча будет иметь вид

$$x_{u,v}(t) = p(u, v) + \vec{l}(u, v)t.$$

Каустическая поверхность состоит из точек, в которых концентрируются – пересекаются близкие световые лучи. Близкие лучи – это те лучи, которые соответствуют близким значениям параметров u, v . Для светового луча, выходящего из $p(u + \Delta u, v + \Delta v)$, подберем значение параметра $t = t(u + \Delta u, v + \Delta v)$ так, чтобы точка

$$p(u + \Delta u, v + \Delta v) + \vec{l}(u + \Delta u, v + \Delta v)t(u + \Delta u, v + \Delta v)$$

лежала и на луче, выходящем из $p(u, v)$, т.е. как раз была точкой пересечения этих лучей (рис.2).

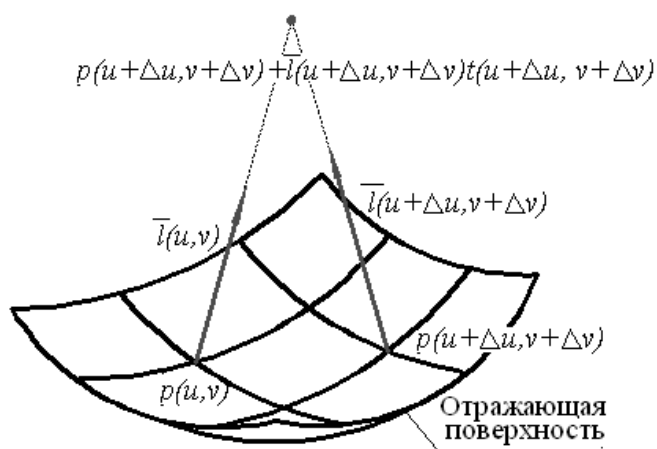


Рис.2

Но тогда вектор от $p(u, v)$ до этой точки

$$p(u + \Delta u, v + \Delta v) + \vec{l}(u + \Delta u, v + \Delta v)t(u + \Delta u, v + \Delta v) - p(u, v)$$

должен быть параллелен $\vec{l}(u, v)$, т.е.

$$\left(p(u + \Delta u, v + \Delta v) + \vec{l}(u + \Delta u, v + \Delta v)t(u + \Delta u, v + \Delta v) - p(u, v) \right) \times \vec{l}(u, v) = 0.$$

Поменяем местами слагаемые в скобке и еще вычтем оттуда $\vec{l}(u, v)t(u + \Delta u, v + \Delta v)$:

$(p(u + \Delta u, v + \Delta v) - p(u, v) + \vec{l}(u + \Delta u, v + \Delta v)t(u + \Delta u, v + \Delta v) - \vec{l}(u, v)t(u + \Delta u, v + \Delta v)) \times \vec{l}(u, v) = 0$
 Т.к. $\vec{l} \times \vec{l} = 0$, произведение как было равным нулю, так и останется. После деления на $\Delta u \cdot \Delta v$, получим

$$\left(\frac{p(u + \Delta u, v + \Delta v) - p(u, v)}{\Delta u \cdot \Delta v} + \frac{\vec{l}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \vec{l}(u, v)}{\Delta u \cdot \Delta v} t(u + \Delta u, v + \Delta v) \right) \times \vec{l}(u, v) = 0$$

А после перехода к пределу $\Delta u \cdot \Delta v \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (p'(u, v) + \vec{l}'(u, v)t(u, v)) \times \vec{l}(u, v) &= 0, \text{ т.е.} \\ (p'_u + \vec{l}'_u \cdot t) \times (p'_v + \vec{l}'_v \cdot t) \times \vec{l}(u, v) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда получаем уравнение каустической поверхности

$$X(u, v) = p(u, v) + \vec{l}(u, v)t, \quad (2)$$

где t – корень квадратного уравнения (1).

Найдем уравнение каустической поверхности для конгруэнции лучей, отраженных от параболоида вращения

$$x(u, v) = u,$$

$$y(u, v) = v,$$

$$z(u, v) = (u^2 + v^2)/2.$$

> ugol:=Pi/3: #угол наклона солнечных лучей к плоскости хоу
 > xs:=0: zs:=5000: ys:=zs*tan(ugol); # координаты
 источника излучения

По закону отражения

$$\boxed{\vec{V}_2 = \vec{V}_1 - 2(\vec{V}_1 \cdot \vec{n})\vec{n}}$$

где \vec{V}_1 – направляющий вектор падающего светового луча,

\vec{V}_2 – направляющий вектор отраженного светового луча,

\vec{n} – единичный нормальный вектор к отражающей поверхности.

> p:=vector(3, [u, v, (u^2+v^2)/2]);

dpu:=vector(3, [diff(p[1], u), diff(p[2], u), diff(p[3], u)]);

$$p := \left[t, l, \frac{t^2}{2} + \frac{l^2}{2} \right]$$

$$dpt := [1, 0, t]$$

> dpv:=vector(3, [diff(p[1], v), diff(p[2], v), diff(p[3], v)]);

> n:= vector(3, [-u/sqrt(1+u^2+v^2), -1/sqrt(1+u^2+v^2), 1/sqrt(1+u^2+v^2)]);

> v1:=simplify(vector(3, [(p[1]-xs)/(sqrt((p[1]-xs)^2+(p[2]-ys)^2+(p[3]-zs)^2)), (p[2]-

```

ys) / (sqrt((p[1]-xs)^2+(p[2]-ys)^2+(p[3]-
zs)^2)), (p[3]-zs) / (sqrt((p[1]-xs)^2+(p[2]-
ys)^2+(p[3]-zs)^2))))):
> vv:=simplify(v1[1]*n[1]): vvv:=simplify(v1[2]*n[2]):
vvvv:=simplify(v1[3]*n[3]):
v1n:=simplify(vv+vvv+vvvv):
> v1nn:=vector(3, [2*v1n*n[1], 2*v1n*n[2], 2*v1n*n[3]]):
> v2:=simplify(evalm(v1-v1nn)):
dv2u:=simplify(vector(3, [diff(v2[1],u), diff(v2[2],u),
diff(v2[3],u)])):
> dv2v:=simplify(vector(3, [diff(v2[1],v), diff(v2[2],v),
diff(v2[3],v)])):
> M:=simplify(matrix(3,3, [[1+dv2u[1]*t, 0+dv2u[2]*t, t+dv
2u[3]*t], [0+dv2v[1]*t, 1+dv2v[2]*t, 1+dv2v[3]*t], [v2[1]
, v2[2], v2[3]]]]):
> S:=solve(det(M)=0,t): S1:=S[1]:S2:=S[2]:
> xk:=p[1]+S[1]*v2[1]: yk:=p[2]+S[1]*v2[2]:
zk:=p[3]+S[1]*v2[3]:
> caust:=plot3d([xk,yk,zk], u=-2*Pi..2*Pi, v=-
2*Pi..2*Pi, color=green):

```

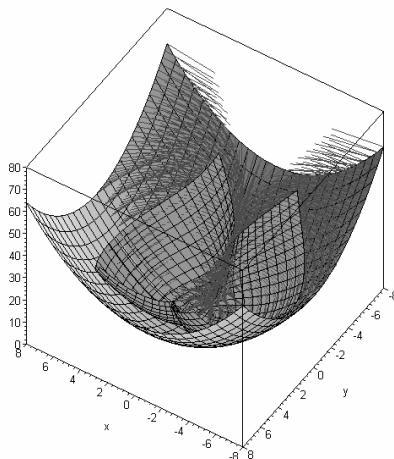


Рис.3. Каустическая поверхность для параболоида

На рис. 3 видно, что каустическая поверхность состоит из двух листов. Для конической поверхности

$$\begin{aligned}
 x(u, v) &= u, \\
 y(u, v) &= v, \\
 z(u, v) &= \sqrt{(u^2 + v^2)}/4.
 \end{aligned}$$

для угла падения солнечных лучей 45° аналогичным образом получаем вид каустической поверхности, представленный на рис. 4.

Выводы. Таким образом, получен способ аналитического описания поверхности каустики для конгруэнции отраженных лучей для поверхностей вращения, позволяющий исследовать свойства конгруэнции

отраженных лучей. По предложенному алгоритму получена визуализация поверхности каустики в пространстве.

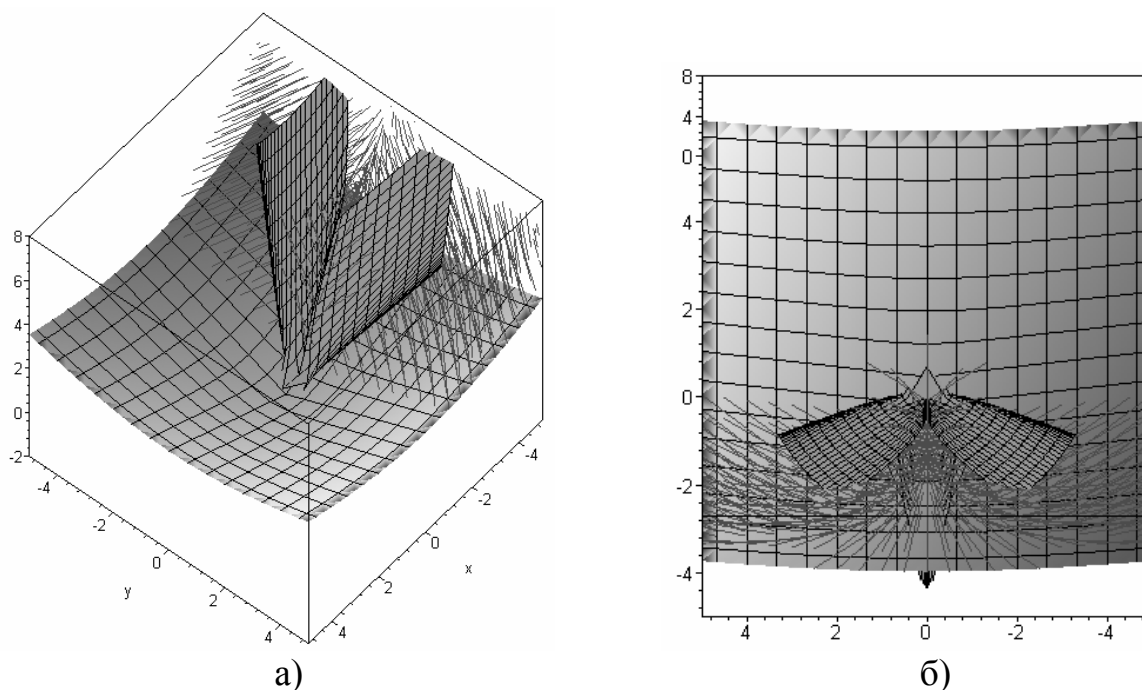


Рис.4. Каустическая поверхность для конуса: а) аксонометрия, б) вид сверху

Аннотация. В статье рассматривается способ нахождения каустических поверхностей (фокальных фигур конгруэнции) при отражении солнечных лучей от поверхностей вращения, заданных параметрическими уравнениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Арнольд Теория катастроф, М.: Наука, 1990
2. Дворецкий А.Т. Компьютерное моделирование потока отраженных лучей / Дворецкий А.Т., Денисова Т.В. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Вип. 80. – КНУБА. - Київ, 2008. – С. 19-24.
3. Подгорный А.Л. Метод построения каустики для поверхности при параллельных падающих лучах / Подгорный А.Л., Куценко Л.Н. //Прикладная геометрия и инженерная графика. - Киев: Будівельник. - Вып.71. - 2002. – С. 14-19.
4. Підгорний О.Л. Можливості використання торсових поверхонь в якості відбивачів сонячних променів //Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Вип.80. - 2008. – С. 11-15.