УДК 534

Ю.В. Човнюк, к.т.н., професор МКА;
М.Г. Діктерук, к.т.н., доцент (КНУБА, Київ)

АВТОМАТИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ (ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ) ВИБРАЦИОННЫХ СИСТЕМ: I. МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА

*АНОТАЦІЯ. Застосован наближений метод дослідження нестаціонарних коливань (перехідних процесів) вібраційних систем (ВС) з розподіленими параметрами. Пропонується загальний спосіб побудови дискретних механічних моделей досліджуваних ВС. Метод дозволяє перші **n** форми коливань ВС враховувати повністю, а інші - приблизно на основі квазістатичного підходу.*
Ключові слова: метод, нестаціонарні коливання, вібраційна система, дискретна механічна модель, квазістатичний підхід.

*АННОТАЦИЯ. Применён приближённый метод исследования нестационарных колебаний (переходных процессов) вибрационных систем (ВС) с распределёнными параметрами. Предлагается общий способ построения дискретных механических моделей исследуемых ВС. Метод позволяет первые **n** форм колебаний ВС учесть полностью, а остальные – приближённо на основе квазистатического подхода.*
Ключевые слова: метод, нестационарные колебания, вибрационная система, дискретная механическая модель, квазистатический подход.

SUMMARY. The close method of research of non-stationary vibrations (transients) of the oscillation systems (OS) is applied with the up-diffused parameters. The general method of construction of discrete mechanical models of investigated is offered OS. A method allows the first forms of vibrations of OS to take into account fully, and other - approximatel on the basis of quasistatic approach.
Key words: method, non-stationary vibrations, oscillation system, discrete mechanical model, quasistatic approach.

Введение

При исследовании нестационарных колебаний (переходных процессов) вибрационных систем (ВС) с распределёнными параметрами (и тем более для автоматизации управления ими!) возникает необходимость интегрирования сложных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Усилия многих исследователей направлены на создание инженерных методов расчета колебаний упругих систем (и, в частности, ВС), к которым относятся широко используемые классические методы определения собственных частот колебаний тел, предложенные Рэлеем, Ритцем, Б.Г. Галёркиным и др. [1, 2]. Однако на практике очень часто ставится не задача определения собственных частот колебания ВС, а задача определения закона движения отдельных точек этой системы. В этом случае искомое смещение точки представляется в виде ряда по собственным формам колебаний ВС. Поэтому решение данных задач связано с определением не только собственных частот, но и собственных форм колебаний. При решении таких задач часто используется метод дискретизации ВС с распределёнными параметрами, согласно которому исследования колебаний данных систем сводятся к исследованию колебаний некоторой механической системы (механической модели) с конечным числом степеней свободы.

Изложение основного материала

При исследовании колебаний твёрдого тела (поверхности рабочего органа ВС), скреплённого с упругой системой (обрабатываемой вибрационным воздействием средой, например, строительной-бетонной смесью в опалубке – с целью её уплотнения), самым распространённым способом построения механических моделей таких ВС является способ, основанный на квазистатическом подходе. Согласно этому подходу, действие упругой системы на твёрдое тело (сила ответной реакции на виброформование среды) приближённо заменяется действием на него такой же системы, но с массой, равной нулю. Зависимость между смещением тела и силой, действующей на него со стороны упругой системы, при движении тела является такой же, как и при его равновесии. Такие механические модели предложены в [3] для исследования колебаний вращающегося вала с диском и в [4] для исследования колебаний руки манипулятора. Механические модели такого типа широко используются не только для анализа ВС, но и при расчёте поперечных колебаний вибробалок с сосредоточенными массами (для поверхностного виброуплотнения строительных-бетонных смесей) при расчёте крутильных колебаний валов приводов ВС с закреплёнными на них дисками [1, 2].

Использование квазистатических механических моделей ВС значительно упрощает исследование колебаний упругих элементов, входящих в их состав. Погрешность, возникающая при этом, сильно зависит от массы ВС. Она незначительна только при выполнении условия: $\frac{m}{M} >> 1$, где M – масса упругой системы, m – масса твёрдого тела, движение которого рассматривается. Если это условие не выполняется, то рассматриваемой погрешностью пренебречь нельзя.

В литературе встречается немного работ, в которых используется метод дискретизации механических систем (в т.ч. ВС) с построением механических моделей, приближённо учитывающих массу упругой системы (т.н. проблема учёта и количественной оценки присоединённой массы виброформуемой среды в ВС). Отметим работы [5,6], в которых приводятся обзоры механических моделей такого типа, используемых в задачах робототехники и при исследовании колебаний некоторых других механических систем с распределёнными параметрами. Основной недостаток этих механических моделей состоит в том, что не предложено достаточно обоснованного способа определения параметров моделей. За критерий качества предложенных моделей принимается близость их собственных частот колебаний к первым собственным частотам колебаний исследуемой механической системы (ВС) с распределёнными параметрами. Однако решение задачи колебания упругой системы существенно зависит не только от её собственных частот, но и от эквивалентных масс этой системы. То, что при построении механических моделей ВС пренебрегается данным обстоятельством, значительно увеличивает погрешность, возникающую при использовании этих моделей. В методе, предлагаемом в настоящей работе, устранён этот недостаток. Механические модели ВС, построенные по этому методу, позволяют учесть первые $\boldsymbol{n}$ форм колебаний упругой системы полностью, а остальные – приближённо на основе квазистатического подхода.

В связи с широким использованием метода конечных элементов (МКЭ) в современных исследованиях необходимо отметить следующее. При решении задач, связанных с расчётами сложных ВС и имеющих чисто вычислительный характер, МКЭ является одним из наиболее эффективных. Однако эффективность использования компьютерных программ, в основу которых положен этот метод, значительно снижается, если необходим качественный анализ поведения ВС при действии на них различных нагрузок, если требуется выявить значимые параметры упругой системы (составляющей ВС) и решить задачу оптимизации. В большинстве случаев при решении подобных задач необходимо исследовать поведение упругой системы при изменении нескольких основных (значимых) безразмерных параметров, каждый из которых представляет собой комбинацию параметров, связанных с размерами, формой и материалом (средой), который подвержен вибровоздействию. Предлагаемый метод построения механических моделей ВС позволяет получить достаточно простую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих колебания рассматриваемой ВС с распределёнными параметрами, записать эти уравнения в безразмерном виде, выделить безразмерные параметры, от которых зависит решение, и выполнить другие необходимые операции.

Эффективность использования данного метода обеспечивается тем, что получаемые механические модели ВС состоят всего из нескольких элементов и являются значительно проще моделей, используемых по МКЭ. Предлагаемые модели ВС из-за специфики их построения более точно описывают колебательные (переходные) процессы в ВС по сравнению с широко используемыми в настоящее время моделями, построенными на основе метода прямой дискретизации ВС с распределёнными параметрами.

Пусть требуется определить закон движений $\xi_A(t)$ некоторой точки А упругого тела (или упругой конструкции, входящей в состав ВС) в направлении единичного вектора i_A под действием сосредоточенной силы $P(t),$ приложенной в этой или другой точке В тела в направлении единичного вектора $i_B.$ Воспользуемся понятием динамической податливости тела, которая является одной из основных частотных характеристик (нестационарных) колебаний ВС. Динамическая податливость – это функция частоты возбуждения ω и определяется выражением $R(\omega)=\tilde{\xi}_A(t)/\tilde{P}(t),$ где $\tilde{\xi}_A(t)-$закон движения точки А при установившихся вынужденных колебаниях тела под действием гармонической возмущающей силы $P(t)=\tilde{P}(t)=P_0 e^{j\omega t},\quad j^2=-1,$ $P_0=const.$ Если действие диссипативных сил незначительно, то динамическую податливость можно представить в виде ряда [5]

$$R(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[M_k(\omega_k{}^2-\omega^2)\right]^{-1}, \qquad (1)$$

где ω_k-собственные частоты колебаний; $M_k=M_k(A,i_A,B,i_B)-$эквивалентные массы тела, соответствующие точке наблюдения А, направлению наблюдения i_A, точке возбуждения В и направлению возбуждения i_B. эквивалентные массы ВС в общем случае можно выразить через собственные формы $\xi_k(x,y,z)$ колебаний тела (ВС с распределенными параметрами) [7], и которые можно выразить в виде формулы

$$M_k=\frac{\rho\int\limits_{(V)}\xi_k{}^2 dV}{\{\xi_k(x_A,y_A,z_A)i_A\}\cdot\{\xi_k(x_B,y_B,z_B)i_B\}}, \qquad (2)$$
$$k=1,2,3...,$$

где $\rho-$ плотность; $V-$объём тела; $A(x_A,y_A,z_A),\ B(x_B,y_B,z_B)-$ координаты точек А и В.

В случае стержневых конструкций (часто используемых в качестве рабочих моделей упругих подсистем ВС) формула (2) несколько упрощается. Однако её использование в расчётах не всегда оправдано. Во многих случаях целесообразно сначала найти аналитическое выражение для динамической податливости ВС (в целом, или её упругой составляющей) $R(\omega),$ а затем определить эквивалентные массы предельным переходом

$$M_k=\lim_{\omega\to\omega_k}\left\{R(\omega)\cdot\left(\omega_k{}^2-\omega^2\right)\right\}^{-1},$$
$$k=1,2,3,...\ .$$

При нулевых начальных условиях смещение точки А в направлении i_A под действием силы $P(t)$ можно представить в виде

$$\xi_A=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{M_k\cdot\omega_k}\int_0^t P(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)d\tau. \qquad (3)$$

При построении механических моделей упругих подсистем ВС квазистатическим методом смещение $\xi_A(t)$ приближённо представляется в виде

$$\xi_A(t)=\frac{P(t)}{c_0},\ c_0=\frac{1}{R(0)}=$$
$$=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{M_k\omega_k{}^2}\right\}^{-1}\frac{P_0}{\xi_{A0}}, \qquad (4)$$

где $R(0)-$ статическая податливость ВС; $\xi_{A0}-$смещение точки А под действием постоянной силы $P=P_0.$

Для вычисления смещения $\xi_A(t)$ по формуле (3) необходимо определить собственные частоты ω_k и эквивалентные массы M_k упругой подсистемы ВС $(k=1,2,3,...).$ Во многих случаях ряд (3) быстро сходится и для его вычисления достаточно рассмотреть несколько первых членов. Предлагаемый метод построения механических моделей ВС основан на приближённом представлении смещения (3) в виде

$$\xi_A{}^{(n)}(t) = \frac{P(t)}{c_0{}^{(n)}} + \\ + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{M_k \omega_k} \int_0^t P(\tau) \sin \omega_k (t-\tau) d\tau;$$

$$c_0{}^{(n)} = \left\{ R(0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{M_k \omega_k{}^2} \right\}^{-1} = \\ = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{M_k \omega_k{}^2} \right\}^{-1}. \qquad (5)$$

В выражении (5) учитываются полностью первые n слагаемых ряда (3). Введение жесткости $c_0{}^{(n)}$ позволяет приближенно учесть остальные члены этого ряда. Величина $c_0{}^{(n)}$ вводится аналогично жесткости c_0 в выражении (4). Выражение (5) соответствует представлению динамической податливости (1) упругой подсистемы ВС в виде

$$R(\omega) \approx R^{(n)}(\omega) = \left[c_0{}^{(n)}\right]^{-1} + \sum_{k=1}^{n} \left[M_k(\omega_k{}^2 - \omega^2)\right]^{-1}.$$

В качестве механической модели данной упругой подсистемы ВС, приближённо описывающей колебания её точки А под действием силы $P(t)$, рассмотрим механическую систему с n степенями свободы. Параметры модели (жёсткости и массы) будем выбирать таким образом, чтобы смещение некоторой точки A' под действием силы $P(t)$, приложенной в этой же или другой точке B' модели, при нулевых начальных условиях было тождественно равно смещению $\xi_A{}^{(n)}$, вычисленному по формуле (5). Для выполнения этого условия достаточно удовлетворить равенствам

$$\tilde{R}(0) = R(0), \ \tilde{\omega}_k = \omega_k, \ \tilde{M}_k = M_k, \\ k = 1,2,\ldots,n. \qquad (6)$$

где $\tilde{R}(0)$ – статическая податливость; $\tilde{\omega}_k$ – собственные частоты; $\tilde{M}_k$ – эквивалентные массы механической модели ВС.

Поскольку в выражениях (6) $R(0), \omega_k, M_k$ – известные параметры упругой подсистемы ВС, а величины $\tilde{R}(0), \tilde{\omega}_k, \tilde{M}_k$ являются функциями искомых параметров модели ВС, то эти выражения можно рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных масс и жёсткостей механической модели ВС.

Чтобы подчеркнуть связь модальных параметров построенной механической модели ВС и модальных параметров исследуемой упругой конструкции (подсистемы ВС), метод назван методом дискретизации ВС с распределёнными параметрами на основе модального анализа. Метод был успешно использован в различных задачах нестационарных колебаний ВС, других машиностроительных конструкций. Следует заметить, что задачи построения механических моделей ВС в общем случае движения твердого тела, скреплённого с упругой подсистемой ВС, становится достаточно трудоёмкой. Результаты некоторых исследований таких движений, полученные на основе выражений типа (5), приведены в [7].

Рассмотрим пример определения оператора (матрицы) динамической податливости для ВС с n-степенями свободы движения. При этом используем подходы, предложенные в [8-10].

Уравнение движения запишем следующим образом:

$$\|M\| \cdot \ddot{X} + \|B\| \cdot \dot{X} + \|C\| \cdot X = f(t), \qquad (7)$$

где $\|M\|, \|B\|, \|C\|$ – матрицы симметричных положительно определенных квадратичных форм, которые выражают кинетическую – $\text{К} = \frac{1}{2} \cdot \left(M\dot{X}, \ \dot{X}\right)$, потенциальную энергию $\Pi = \frac{1}{2} \cdot \left(C\dot{X}, \ \dot{X}\right)$ системы, а также ее диссипативную функцию Релея $E = \frac{1}{2} \cdot \left(B\dot{X}, \ \dot{X}\right)$.

При этом:

$$\|M\| = \|m_{km}\|, \|B\| = \|b_{km}\|, \|C\| = \|c_{km}\|, \qquad (8)$$

где $x - n -$ мерный вектор обобщенных координат системы, а $f(t)$ – вектор-столбец возмущающих сил, зависящих от времени t (также n – мерный).

При переходе к нормальным координатам $(x \to q)$, получим вместо (7):

$$\ddot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} \cdot \dot{q}_j + \omega_{0k}^2 \cdot q_k = F_k(t), \quad k = 1,2,\dots,n, \tag{9}$$

где нормальные координаты q_m связаны с обобщенными координатами X_j соотношением: $X_j = \sum_{m=1}^{n} \theta_{jm} \cdot q_m$, а матрица $\|\theta_{jm}\|$ осуществляет одновременное преобразование кинетической и потенциальной энергий системы к диссипативному виду, т.е.:

$$К = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \dot{q}_m^2 \;, \; П = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \omega_{0m}^2 \cdot \dot{q}_m^2 \;. \tag{10}$$

Силы $F_j(t)$ связаны с силами $f_m(t)$ посредством транспонированной матрицы $\|\theta_{mj}\| = \|\theta_{jm}\|^{\mathrm{T}}$ выражением:

$$F_j(t) = \sum_{m=1}^{n} \theta_{mj} \cdot f_m(t). \tag{11}$$

Величины θ_{jm} являются нормированными коэффициентами j – й формы колебаний [8-10], которой соответствует собственная частота $\omega_{0j} > 0$; для величин β_{kj} имеем:

$$\beta_{kj} = \sum_{m=1}^{n} b_{km} \cdot \theta_{mj} \,. \tag{12}$$

При условии, что все величины b_{km} малы, и их произведениями, квадратами, по сравнению с другими величинами, можно пренебречь, характеристическая матрица системы в нормальных координатах факторизуется [8, 9], т.е. можно приближенно характеристическое уравнение представить следующим образом:

$$D_{2n}(p) \approx \prod_{m=1}^{n} (p^2 + 2 \cdot \Gamma_m \omega_{0m} p + \omega_{0m}^2) = 0 \,, \tag{13}$$

где $\Gamma_m = \frac{1}{2} \cdot b_{mm} \cdot \omega_{0m}^{-1}$, p – характеристическое число.

Корни уравнения (13) будут в общем случае комплексными и попарно сопряженными: $p_m = -\Gamma_m \cdot \omega_{0m} \pm i\,\omega_{0m}$. Тогда выражение для оператора динамической податливости в нормальных координатах принимает вид:

$$L_{jk}(p) \equiv L_{jj}(\tilde{p}) = \left(\tilde{p}^2 + 2 \cdot \Gamma_j \omega_{0j} \tilde{p} + \omega_{0j}^2\right)^{-1}, \tag{14}$$

где $\tilde{p}$ – частота колебаний системы.

Переходя к исходным обобщенным координатам $X_k(t)$ выполним обратное преобразование (14), в результате которого имеем

$$X_k(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{\theta_{kj} \cdot \theta_{mj} \cdot f_m(t)}{\left(\tilde{p}^2 + 2 \cdot \Gamma_j \omega_{0j} \tilde{p} + \omega_{0j}^2\right)} \;. \tag{15}$$

В том случае, когда сила приложена только в точке X_m, тогда при вычислении перемещения в точке X_k суммирование по индексу m не производим, а для оператора динамической податливости, действующего из X_m в X_k, можно записать:

$$L_{km}(\tilde{p}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\theta_{kj} \cdot \theta_{mj}}{\tilde{p}^2 + 2 \cdot \Gamma_j \omega_{0j} \tilde{p} + \omega_{0j}^2} \;. \tag{16}$$

Формула (16), точная при отсутствии затухания $(\Gamma_j = 0)$, определяет разложение оператора динамической податливости по собственным формам колебаний исходной системы. Пусть $\tilde{p} = i \cdot \omega$, где $i^2 = -1$, приходим к выражениям для динамических податливостей, являющихся уже частотными характеристиками исследуемой системы. При этом:

$$\lim_{\omega \to 0} \left| L_{km}(i\omega) = 0 \right| . \tag{17}$$

(Подобные механические системы принято называть фильтрующими).

Следует отметить, что полученные результаты можно также распространить и на системы с распределенными параметрами. Так, для прямых упругих стержней, которые могут совершать продольные, поперечные либо крутильные колебания, можно записать

$$L_{km}(x, y, \tilde{p}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_j(X) \cdot \theta_j(Y)}{\tilde{p}^2 + 2 \cdot \Gamma_j \omega_{0j} \tilde{p} + \omega_{0j}^2} \;, \tag{18}$$

где $\theta_j(X)$, $\theta_j(Y)$ – координаты форм колебаний в точках приложения тестового силового фактора и измерения ответной реакции.

Выражения вида (16) можно также использовать при определении «веса» j – й формы колебаний системы (даже в условиях резонанса по j – й форме):

$$U_j = \frac{\theta_{kj} \cdot \theta_{mj}}{\left|L_{km}(i\omega)\right| \cdot \left[\begin{array}{l}\left(\omega_{0j}^2 - \omega^2\right)^2 + \\ + 4 \cdot \Gamma_j^2 \omega_{0j}^2 \cdot \omega_{0j}^2 \cdot \omega^2\end{array}\right]}. \quad (19)$$

Выводы

1. Получен новый приближённый метод исследования (нестационарных) колебаний ВС с распределёнными параметрами.

2. Предложен общий способ построения дискретных механических моделей исследуемых упругих подсистем ВС, который позволяет с помощью динамических податливостей учитывать первые n форм их колебаний полностью, а остальные – приближённо на основе квазистатического подхода.

3. Выражение (5), на котором основан данный метод, получено для задач с нулевыми начальными условиями. Близость динамических податливостей упругой подсистемы ВС и её модели оправдывает использование этой модели и в задачах с ненулевыми начальными условиями, где использование механических моделей ВС наиболее эффективно. В этом случае решение задачи методом Фурье связано с трудоёмкой процедурой вычисления интегралов $\int\limits_{(V)} \xi_0 \xi_k dV$, $\int\limits_{(V)} v_0 \xi_k dV$, где величины $\xi_0(x, y, z)$ и $v_0(x, y, z)$ определяют начальную форму упругого тела (упругой подсистемы ВС) и начальное распределение скоростей точек тела. Если исследования проводить на основе модели упругого тела, то необходимые начальные смещения и скорости содержащихся в модели ВС масс можно приближённо получить из различных условий, учитывающих физические особенности упругой подсистемы ВС и ее модели. К наиболее общим условиям можно отнести условия равенства кинетической и потенциальной энергии, вычисленной для упругой подсистемы ВС и ее модели в начальный момент времени.

4. Высокая эффективность использования метода показана при решении ряда задач автоматизации управления ВС в переходных режимах их функционирования, что позволяет рекомендовать его для дальнейшего совершенствования и уточнения существующих инженерных методов расчёта подобных технических систем в режимах их реальной эксплуатации.

Литература

1. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444с.
2. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. – М.: Изд-во технико-теорет. лит., 1958. – 628с.
3. *Диментберг Ф.М.* Изгибные колебания вращающихся валов. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 248с.
4. *Воробьёв Е.И.* Влияние изгибной упругости руки робота на его движение при релейном управлении//Динамика машин. – 1976. – Вып. 51. – С. 84-90.
5. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408с.
6. *Камышный Н.И., Павленко И.И.* Исследование динамики конструкции промышленного робота//Автоматизация и комплексная механизация в машиностроении. – Л.: ЛПИ, 1978. – С. 9-12.
7. *Вернигор В.Н.* Об исследовании колебаний упругих механических систем на основе их динамической податливости//Вестник ЛГУ. – 1991. – Сер. 1. – Вып. 1. – С. 70-76.
8. *Бабицкий В.И., Крупенин В.М.* Колебания в сильно нелинейных системах . –М.: Наука, 1985. – 320 с.
9. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
10. *Холодниок М.* и др. Методы анализа нелинейных динамических моделей. –М.: Мир, 1991. – 368 с.

Рецензент: В.С. Ловейкін, д-р т.н., проф. (КНУБА, Київ)

Отримано: 21.03.2011 р.