

УДК 514.18

к.т.н., доцент Скочко В.І.

Київський національний університет будівництва і архітектури

ДИСКРЕТНА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ, ЗАДАНИХ ФУНКЦІЯМИ У НЕЯВНІЙ ФОРМІ

Розкриваються базові принципи побудови дискретних образів плоских кривих ліній, рівняння яких записані у неявній формі. В контексті вирішення даної проблеми виконується порівняльний аналіз спеціального алгоритму застосування методу скінченних різниць у поєднанні з базовими співвідношеннями диференціальної геометрії, а також алгоритму побудови дискретної математичної моделі деякої сітчастої структури на площині з подальшим системним корегуванням форми цієї моделі шляхом перерозподілу величин параметрів жорсткості її ланок. Корегування здійснюється таким чином, щоб у результаті координати кожного із наперед визначеної множини вузлів дискретної моделі задовільнили відомому рівнянню плоскої кривої. Також проаналізовані переваги запропонованого підходу перед чисельним методом скінченних різниць.

Ключові слова: дискретні образи, неявні функції, чисельне моделювання.

Постановка проблеми. Розглянемо актуальність побудови дискретних образів кривих ліній, заданих у неявній формі на площині, а також основні складної, що виникають при їх побудові. Необхідність у створенні та удосконаленні методів побудови зазначених образів продиктована в першу чергу тим, що дискретне представлення є найбільш розповсюдженим і простим способом візуалізації не лише кривих, а й усіх інших геометричних фігур. Останні, в свою чергу, часто являються відображенням реальних фізичних, економічних, соціальних або абстрактних процесів чи об'єктів. Відтак можливість детального відображення кривих фактично дозволяє точно проаналізувати особливості перебігу того чи іншого процесу або, наприклад, скласти чітке уявлення про характерні ознаки деякого фізичного тіла. Слід додати, що вагому роль у сучасних методах аналізу відіграють комп'ютерні програми й обладнання, робота та спосіб збереження даних яких має виключно дискретних характер.

В узагальненій формі явна функція на площині має вид:

$$y = f(x), \quad (1)$$

де: x та y – координати абсцис та ординат, що приймають величини з множин значень та визначення функції відповідно.

На відміну від кривих, заданих рівняннями у явній формі, криві неявних

функцій не можуть бути зображені множиною точок, одержаних шляхом підстановки координат з області визначення й прямим розрахунком ординат. Узагальнена форма неявної функції на площині має наступний вид:

$$\zeta(x, y) = 0. \quad (2)$$

Процес знаходження точок кривої, заданої у формі (2), потребує приведення її функції до явної форми (1), або застосування одного з методів чисельних моделювання (МЧМ), що дозволяють визначати вузлові параметри дискретних об'єктів. Однак усі ці методи вимагають точного задання початкових та крайових умов при описанні особливостей та топології області моделювання й самого образу. Відтак значний інтерес представляє не тільки удосконалення існуючих підходів чисельного моделювання, а й розробка простого і наочного методу моделювання дискретних образів кривих, що був би у достатній мірі варіативним по відношенню до крайових умов задачі.

Формулювання цілей та завдання публікації. Зважаючи на вище сказане, встановимо базові принципи побудови дискретно представлених кривих, вузли яких належать їх неперервним аналогам, заданим у неявній формі. При цьому відштовхуватимемось від недоліків та складнощів застосування МЧМ.

Огляд основних досліджень. Одним із найзручніших МЧМ, що підходять для вирішення подібних задач є метод скінченних різниць (МСР), який базується на застосуванні дискретної апроксимації рівнянь у часткових похідних із заміною диференційних операторів їх дискретними аналогами з деякою визначеною похибкою [10 – 14]. Так, наприклад, за умови сталого кроку h_x точок дискретного образу кривої, часткові похідні від ординати по абсцисі 1-го порядку можна записати так:

$$(\partial y / \partial x)_i \approx \Delta y_i / \Delta x_i = \Delta y_i / h_x = (y_{i+1} - y_i) / h_x, \quad (i = \overline{0, n-1}), \quad \text{або} \quad (3)$$

$$(\partial y / \partial x)_i \approx \nabla y_i / \Delta x_i = \nabla y_i / h_x = (y_i - y_{i-1}) / h_x, \quad (i = \overline{1, n}), \quad \text{або} \quad (4)$$

$$(\partial y / \partial x)_i \approx \delta y_i / \Delta x_i = \delta y_i / h_x = (y_{i+1} - y_{i-1}) / h_x, \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad (5)$$

де (3), (4) та (5) – відповідають правій (на випередження), лівій (із запізненням) та центральній різниці відповідно відносно i -ї точки точкового ряду образу; n – загальна кількість крайових та шуканих точок (вузлів) моделі. Центральна і найбільш уживана в практиці чисельного моделювання часткова похідна 2-го порядку за тих же умов має форму:

$$\begin{aligned} (\partial^2 y / \partial x^2)_i &\approx \Delta^2 y_i / \Delta x_i^2 = \Delta \nabla y_i / h_x^2 = (\nabla y_{i+1} - \Delta y_{i-1}) / h_x^2 = \\ &= (y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1}) / h_x^2, \quad (i = \overline{1, n-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Узагальнюючи формули (3) – (6), прийдемо до виразу скінченних різниць для довільного k -го порядку:

$$\begin{aligned} (\partial^k y / \partial x^k)_i &\approx \Delta^k y_i / \Delta x_i^k = (\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i) / h_x^k = \\ &= (-1)^k \cdot \sum_{j=0}^k [(-1)^j \cdot C_k^j \cdot y_{i+j}] / h_x^k, \quad (n \geq 1, \Delta^0 y_i = y_i). \end{aligned} \quad (7)$$

Окрім того, вирази (5) і (6), наприклад, можна адаптувати, до довільного кроку апроксимації. Вони відповідно приймуть таку форму:

$$(\partial y / \partial x)_i \approx 2 \cdot (y_{i+1} - y_{i-1}) / (\Delta x_{i-1,i} + \Delta x_{i,i+1}), \quad (i = \overline{1, n-1}); \quad (8)$$

$$(\partial^2 y / \partial x^2)_i \approx b \cdot y_{i-1} + a \cdot y_i + c \cdot y_{i+1}, \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad (9)$$

$$b = 2 / [\Delta x_{i-1,i} \cdot (\Delta x_{i-1,i} + \Delta x_{i,i+1})], \quad (10)$$

$$a = -2 / (\Delta x_{i-1,i} \cdot \Delta x_{i,i+1}), \quad (11)$$

$$c = 2 / [\Delta x_{i,i+1} \cdot (\Delta x_{i-1,i} + \Delta x_{i,i+1})]. \quad (12)$$

При умові, що досліджувану криву задано диференціальним рівнянням у часткових похідних, та відомі усі необхідні крайові й початкові умови моделювання (координати крайніх вузлів, кути дотичних у цих вузлах та початкові наближення координат), дану криву можна побудувати, склавши апроксимаційні рівняння положення (на основі виразів (3) – (12)) для кожного з шуканих вузлів та розв'язавши одержану систему відносно їх координат. Однак вихідне рівняння кривої має бути саме диференціальним.

У роботах [1, 2] було висвітлено принцип застосування спеціального методу моделювання сітчастих структур, оснований на симбіотичному поєднанні узагальненого статико-геометричного підходу до відтворення дискретних об'єктів та методики управління формою моделі, яка базується на використанні параметричних рівнянь стану її в'язей [3, 4] з метою системного перерозподілу жорсткісних характеристик ланок цієї моделі. Приклади практичної реалізації даного методу представлено у працях [5] та [6]. Зокрема в роботі [6] було продемонстровано принципи формоутворення та корегування стрижневих рамних конструкцій на площині. Метод базується на принципі вирізання шарнірних вузлів та стрижнів теоретичної та будівельної механіки. Опускаючи проекції векторів сил $\bar{\mathfrak{S}}_i$, що діють на вузол ззовні, та векторів внутрішніх зусиль відсічених стрижнів \bar{R}_{ij} на координатні осі, отримаємо наступну систему рівнянь рівноваги довільного i -го вузла:

$$\sum_{j=1}^n (s_j - s_i) \cdot \aleph_{i,j} + \mathfrak{S}_{s_i} = 0. \quad (13)$$

Тут: s – узагальнююче позначення координат; n – кількість незафіксованих вузлів конструкції; \aleph_{ij} – параметри жорсткості стрижнів, що виражаються відношеннями абсолютних величин поздовжніх зусиль у цих стрижнях R_{ij} до їх довжин δ_{ij} :

$$\aleph_{i,j} = R_{i,j} / \delta_{i,j}, \quad (14)$$

$$\delta_{i,j} = \left((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Параметричні рівняння стану в'язей (виведені на основі тотожностей рівноваги і диференційних закономірностей між фізичними й геометричними характеристиками ланок моделі та зовнішніх полів, що на них діють) мають у найпростішій та найзручнішій формі наступний вид:

1) для в'язей, що з'єднують два вільні вузли конструкції (S_a і S_b):

$$\sum_{i=1}^{m-1} \delta_{a,i}^2 \cdot \aleph_{a,i} + \chi \cdot \delta_{a,b}^2 \cdot \aleph_{a,b} + \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{b,j}^2 \cdot \aleph_{b,j} - (\varphi_a + \varphi_b) + B_{a,b} = 0; \quad (16)$$

2) для в'язей, що з'єднують один вільний і один базовий вузли конструкції (S_a і S_{fix}):

$$\sum_{i=1}^{m-1} \delta_{a,i}^2 \cdot \aleph_{a,i} + \chi \cdot \delta_{a,fix}^2 \cdot \aleph_{a,fix} - \varphi_a + (R_{x_{fix}} \cdot x_{fix} + R_{y_{fix}} \cdot y_{fix}) + B_{a,fix} = 0. \quad (17)$$

де m і n – кількість вузлів суміжних із a -м та b -м (або fix -м) вузлами; χ – деяка невід'ємна константа, величина якої обумовлюється топологічними особливостями моделі; φ_a і φ_b – вузлові значення скалярного потенціалу (поля цільової функції); R_{fix} – величини зусиль у стрижнях, що з'єднуються з шарнірними опорами; $B_{a,b}$ і $B_{a,fix}$ – загальні операційні константи інтегрування.

Рівняння типу (13) складаються для усіх вільних вузлів (вершин) моделі й розв'язуються відносно координат, за умови, що на кожному p -му етапі ітераційного числення (необхідного, так як польові функції сил $\bar{\mathfrak{S}}_i$ можуть мати високу нелінійність) параметри жорсткості $\aleph_{i,j}$ приймаються сталими. Досягнення ж бажаної форми моделі здійснюється шляхом складання системи рівнянь типу (16) і (17) з наступним її розв'язанням відносно параметрів жорсткості $\aleph_{i,j}$ із поетапною заміною поточних величин скалярних потенціалів φ_i (заданих цільовою функцією) на обумовлені постановкою задачі очікувані величини φ' .

Основна частина. Тепер, враховуючи потенціальні можливості МСР та запропонованого вище методу корегування (оптимізації, при необхідності) дискретних моделей, сформулюємо та порівняємо порядок візуалізації графіків неявних функцій обома зазначеними шляхами.

1. При застосуванні МСР, алгоритм дій може бути наступним.

1.1. Обираємо деяку область площини Ω , у якій здійснюватиметься пошук точок досліджуваної функції.

1.2. Перетворимо рівняння кривої на диференційне, шляхом взяття часткових похідних даної функції. Має сенс визначення похідних порядку 2 і вище, оскільки такі похідні у подальшому мають симетричні апроксимаційно-різницеві співвідношення. Складнощі диференціювання полягають у тому, що

якщо для явної функції похідні визначаються безпосередньо з правої частини тотожності (1):

$$\partial y / \partial x = \partial f(x) / \partial x, \quad (18)$$

$$\partial^2 y / \partial x^2 = \partial^2 f(x) / \partial x^2, \text{ і т.д.}, \quad (19)$$

то для неявної функції (2), слід застосовувати правила диференціювання диференціальної геометрії [7]:

$$\partial y / \partial x = \zeta'_x(x, y) / \zeta'_y(x, y); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 y / \partial x^2 = & \left(2 \cdot \zeta'_x(x, y) \cdot \zeta'_y(x, y) \cdot \zeta''_{xy}(x, y) - (\zeta'_y(x, y))^2 \cdot \zeta''_{xx}(x, y) - \right. \\ & \left. - (\zeta'_x(x, y))^2 \cdot \zeta''_{yy}(x, y) \right) / (\zeta'_y(x, y))^3, \end{aligned} \quad (21)$$

де:

$$\zeta'_x(x, y) = \partial \zeta(x, y) / \partial x, \quad (22)$$

$$\zeta''_{xx}(x, y) = \partial^2 \zeta(x, y) / \partial x^2, \quad (23)$$

$$\zeta'_y(x, y) = \partial \zeta(x, y) / \partial y, \quad (24)$$

$$\zeta''_{yy}(x, y) = \partial^2 \zeta(x, y) / \partial y^2, \quad (25)$$

$$\zeta''_{xy}(x, y) = \partial^2 \zeta(x, y) / \partial x \partial y. \quad (26)$$

1.3. Замінімо ліві частини рівнянь типу (21) (часткові похідні від ординат точок кривої), наприклад, скінченно-різницевиими виразами типу (6) або (9), в залежності від характеру кроку майбутньої дискретизації. В результаті отримаємо одне з наступних рівнянь:

$$\begin{aligned} y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1} = & h^2 \cdot \left(2 \cdot \zeta'_x(x, y) \cdot \zeta'_y(x, y) \cdot \zeta''_{xy}(x, y) - \right. \\ & \left. - (\zeta'_y(x, y))^2 \cdot \zeta''_{xx}(x, y) - (\zeta'_x(x, y))^2 \cdot \zeta''_{yy}(x, y) \right) / (\zeta'_y(x, y))^3, \text{ або:} \end{aligned} \quad (27)$$

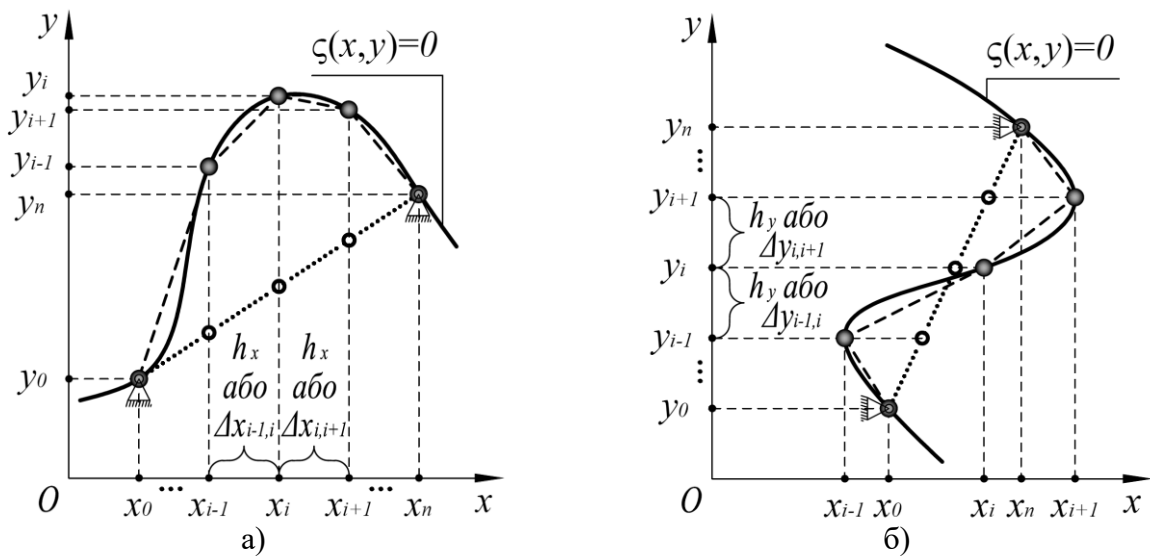
$$\begin{aligned} b \cdot y_{i-1} + a \cdot y_i + c \cdot y_{i+1} = & \left(2 \cdot \zeta'_x(x, y) \cdot \zeta'_y(x, y) \cdot \zeta''_{xy}(x, y) - \right. \\ & \left. - (\zeta'_y(x, y))^2 \cdot \zeta''_{xx}(x, y) - (\zeta'_x(x, y))^2 \cdot \zeta''_{yy}(x, y) \right) / (\zeta'_y(x, y))^3. \end{aligned} \quad (28)$$

1.4. Задаємось загальними топологічними характеристиками (кількістю вільних вузлів та ланок моделі) та визначаємось з величиною кроку розбиття шуканого дискретного образу по осі абсцис (рис 1.а.).

1.5. Задаємо крайові умови задачі (що при використанні рівнянь типу (27) або (28) являтимуть собою координати першого і останнього вузла у топологічній схемі дискретно представленої кривої). Задаємо початкові умови моделювання (які для задач на площині представляють собою перші наближення величин координат шуканого дискретного образу).

1.6. Складаємо рівняння типу (27) або (28) для усіх вільних вузлів дискретної моделі (згідно топологічної схеми). При цьому значення координат x_i кожного внутрішнього – «рухомого» – вузла моделі слід задавати сталими

відповідно до апроксимаційного розбиття по осі Ox .




Умовні позначення (тут і надалі): ——— — неперервний графік неявної функції; - - - - - — шуканий дискретний образ графіка неявної функції; — дискретний образ, одержаний у першому наближенні (для МСР з розв’язанням систем рівнянь типу (29) і (30) або (39) і (40)); ● і ○ — вільні вузли дискретного образу в початковій та результуючій формах відповідно;  — базові вузли дискретного образу.

Рис. 1. Побудова дискретного образу кривої неявної функції за допомогою МСР: а) апроксимація по осі Ox ; б) апроксимація по осі Oy

1.7. Розв’язуємо складену систему нелінійних в загальному випадку рівнянь відносно невідомих ординат кожного з вільних вузлів методом простих ітерацій або методом збурення параметрів [8], який може дати найбільш достовірні результати числення при високій нелінійності правої частини тотожностей (27) або (28). В останньому випадку, в якості допоміжної системи рівнянь доцільно обирати системи, складені з рівнянь типу (27) або (28), при умові, що їх права частина дорівнює нулю, тобто:

$$y_{i-1} - 2 \cdot y_i + y_{i+1} = 0, \text{ або:} \tag{29}$$

$$b \cdot y_{i-1} + a \cdot y_i + c \cdot y_{i+1} = 0. \tag{30}$$

Результуючі координати дадуть змогу відтворити дискретний каркас шуканої кривої з деякою передбачуваною похибкою (рис 1.а.).

Слід також додати, що можливі й такі варіанти розміщення кривої досліджуваної функції на площині, при яких її моделювання із заданим кроком по осі абсцис недоцільне, або навіть неможливе (див. рис 1.б.). В такому випадку необхідно або локалізувати область моделювання із розбиттям по осі абсцис, або замінити орієнтацію апроксимаційного розбиття з відповідним кроком по осі ординат. Тоді, при умові, що процес візуалізації на основі МСР здійснюється з застосуванням похідних 2-го порядку, перепишемо вираз для

визначення останніх замінивши координати x на y . Різницеве апроксимаційне співвідношення 2-го порядку матиме такий вигляд для регулярного (зі сталим кроком h_y по осі Oy) й довільного розбиття відповідно:

$$(\partial^2 x / \partial y^2)_i \approx \Delta^2 x_i / \Delta y_i^2 = (x_{i-1} - 2 \cdot x_i + x_{i+1}) / h_y^2, \quad (i = \overline{1, n-1}); \quad (31)$$

$$(\partial^2 x / \partial y^2)_i \approx e \cdot x_{i-1} + d \cdot x_i + g \cdot x_{i+1}, \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad (32)$$

$$e = 2 / [\Delta y_{i-1,i} \cdot (\Delta y_{i-1,i} + \Delta y_{i,i+1})], \quad (33)$$

$$d = -2 / (\Delta y_{i-1,i} \cdot \Delta y_{i,i+1}), \quad (34)$$

$$g = 2 / [\Delta y_{i,i+1} \cdot (\Delta y_{i-1,i} + \Delta y_{i,i+1})]. \quad (35)$$

Похідна другого порядку від абсцис по ординаті з використанням неявної функції кривої матиме таку форму:

$$\begin{aligned} \partial^2 x / \partial y^2 = & \left(2 \cdot \zeta'_y(x, y) \cdot \zeta'_x(x, y) \cdot \zeta''_{xy}(x, y) - (\zeta'_x(x, y))^2 \cdot \zeta''_{yy}(x, y) - \right. \\ & \left. - (\zeta'_y(x, y))^2 \cdot \zeta''_{xx}(x, y) \right) / (\zeta'_x(x, y))^3, \end{aligned} \quad (36)$$

де всі компоненти правої половини рівності (36) визначаються аналогічно формулами (22) – (26).

І нарешті, рівняння, які описують положення кожної вершини дискретного образу матимуть такий вигляд, із урахуванням (31) – (36):

$$\begin{aligned} x_{i-1} - 2 \cdot x_i + x_{i+1} = & h_y^2 \cdot \left(2 \cdot \zeta'_y(x, y) \cdot \zeta'_x(x, y) \cdot \zeta''_{xy}(x, y) - \right. \\ & \left. - (\zeta'_x(x, y))^2 \cdot \zeta''_{yy}(x, y) - (\zeta'_y(x, y))^2 \cdot \zeta''_{xx}(x, y) \right) / (\zeta'_x(x, y))^3, \text{ або:} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} e \cdot x_{i-1} + d \cdot x_i + g \cdot x_{i+1} = & \left(2 \cdot \zeta'_y(x, y) \cdot \zeta'_x(x, y) \cdot \zeta''_{xy}(x, y) - \right. \\ & \left. - (\zeta'_x(x, y))^2 \cdot \zeta''_{yy}(x, y) - (\zeta'_y(x, y))^2 \cdot \zeta''_{xx}(x, y) \right) / (\zeta'_x(x, y))^3. \end{aligned} \quad (38)$$

Допоміжна система для визначення координат вершин моделі за допомогою тотожностей (37) або (38) методом збурення параметрів складатиметься відповідно з рівнянь наступної форми:

$$x_{i-1} - 2 \cdot x_i + x_{i+1} = 0, \text{ або:} \quad (39)$$

$$e \cdot x_{i-1} + d \cdot x_i + g \cdot x_{i+1} = 0. \quad (40)$$

Необхідно звернути увагу на те, що при умові існування більше ніж 2-х точок у якості крайових умов, слід використовувати рівняння положення вузлів моделі, побудовані з застосуванням похідних вищих порядків. При цьому слід пам'ятати, що порядок диференціювання потрібно обирати таким чином, щоб відповідне апроксимаційне співвідношення не вимагало введення до крайових умов додаткових точок шуканої кривої, оскільки це може бути апріорно неможливим. Також треба розуміти, що підвищення порядку диференціювання може призвести до значного зростання нелінійності результуючих рівнянь, а це,

в свою чергу може значно знизити швидкість збіжності ітераційного числення чи взагалі унеможливити успішне розв'язання.

2. Якщо для вирішення поставленої задачі застосовувати інтерпретаційне дискретне геометричне моделювання із застосуванням параметричних рівнянь [4], то необхідно дещо переглянути стандартне уявлення про дискретне представлення кривої, при якому степінь кожної її вільної вершини (з точки зору теорії графів) дорівнює 2. Алгоритм дій має бути наступним.

2.1. Обираємо деяку область площини Ω , у якій здійснюватиметься пошук точок досліджуваної функції.

2.2. Задаємо всі топологічні ознаки спеціальної сітчастої структури, вершини якої, якщо представляти її як граф на площині, можуть мати будь який степінь (див. рис.2.). Визначаємося з тим, які саме вільні вузли цієї структури в результаті наступного корегування її форми стануть наближено (із заданою точністю) інцидентними кривій досліджуваної неявної функції.

2.3. Задаємо координати базових (нерухомих) вузлів даної моделі, а також, при необхідності, функції польових навантажень, що діятимуть на вільні вузли, з метою подальшого надання моделі деякої початкової форми. Координати базових вузлів відіграють роль гнучких крайових умов, оскільки їх величини не мають задовільняти досліджуваній функції.

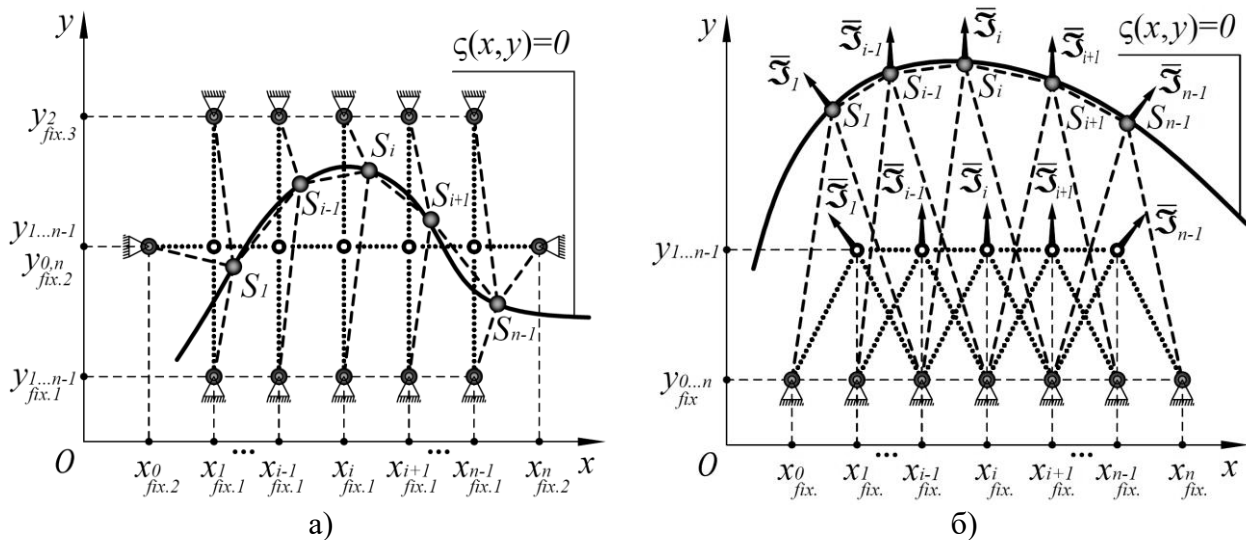


Рис. 2. Виділення дискретного образу кривої неявної функції на основі корекції форми сітчастої структури з використанням параметричних рівнянь:

- а) корегування форми ненавантаженої сітчастої структури, вільні вершини якої (як симетричного планарного графу) мають степінь 4; б) корегування форми сітчастої структури, зрівноваженої під дією зовнішніх сил, вільні вершини якої (як несиметричного планарного графу) мають степені 3 та 4

2.4. Виконуємо кінематичний аналіз одержаної інтерпретаційної моделі сітчастої структури за базовими принципами теоретичної механіки [9], щоб запобігти випадкам, коли модель може бути геометрично змінюваною (не слід

плутати це поняття з миттєво змінюваною системою).

2.5. Якщо функція польового зовнішнього навантаження $\bar{\mathfrak{S}}$ має градієнтний зв'язок зі скалярним потенціалом φ , необхідно встановити її математичну форму шляхом диференціювання:

$$\bar{\mathfrak{S}} = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \cdot \bar{e}_x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \cdot \bar{e}_y, \quad (41)$$

де ∇ – оператор Гамільтона для двовимірного простору.

Навіть якщо градієнтний зв'язок не обов'язковий, в якості скалярного потенціалу для кожного i -го вільного вузла необхідно встановити цільову функцію, що відповідає досліджуваній неявній:

$$\varphi_i = \varphi(x_i, y_i) = \zeta(x_i, y_i). \quad (42)$$

У будь-якому випадку, очікувані величин потенціалів усіх вільних вузлів дискретної моделі мають становити «0» на всіх етапах числення:

$$\varphi_i' = 0. \quad (43)$$

2.6. Задаємо початкові умови в формі орієнтовних величин параметрів жорсткості в'язей моделі та при потребі формоутворюючі вузлові навантаження (як на рис.2.б.). На основі цих величин буде здійснюватися перше наближення ітераційного числення.

2.7. Складаємо рівняння рівноваги типу (13) для всіх вільних вузлів дискретної моделі.

2.8. Будуємо параметричні рівняння типу (16) і (17) для всіх ланок дискретної моделі.

2.9. Розв'язуємо систему рівнянь типу (13) на основі поточних параметрів жорсткості в'язей дискретного образу.

2.10. Використовуючи одержані координати вільних вузлів, розв'язуємо систему рівнянь типу (16) і (17) відносно параметрів жорсткості в'язей, враховуючи величини операційних констант $B_{a,b}$ і $B_{a,fix}$ розрахованих на поточному етапі числення, але замінюючи величини поточних вузлових потенціалів φ_i на очікувані величини φ_i' .

2.11. Повторюємо пункти 2.9. та 2.10. доти, доки координати вузлів дискретного образу кривої не відповідатимуть із заданою абсолютною чи відносною похибкою координатам її неперервного аналогу, тобто не задовільнятимуть функції $\zeta(x,y)$.

Додамо, що особливістю цього підходу в запропонованій інтерпретації є відсутність можливості точного передбачення кроку вузлів результуючого дискретного образу по координатним осям. Це пояснюється складністю поведінки вузлів при корегуванні їх положення під дією зовнішніх полів, які в свою чергу можуть мати високу нелінійність. Окрім того важко передбачити й проміжні форми моделі у процесі перерозподілу параметрів жорсткості в'язей. При цьому, метод передбачає можливість чіткого задання остаточного

положення обраної множини вузлів.

Приклад покрової реалізації приведеного вище алгоритму по відношенню до стрижневих будівельних конструкцій з невеликою кількістю стрижнів, із адаптацією до застосуванням логічних операторів та керованого процесу наближень, було продемонстровано в роботі [6].

Висновки. Обидва продемонстрованих вище підходи представляються великий інтерес для подальших досліджень в області візуалізації дискретних образів неявних функцій. Слід звернути увагу на те, що у даній роботі моделювання на основі МСР здійснювалося, виходячи з умови попередньої визначеності кроку апроксимації по одній з координатних осей. Однак цікавими можуть виявитися дослідження сумісного розв'язання систем рівнянь типу (28) і (38) без прив'язки до певного кроку по координатних осях.

Проте безперечним недоліком МСР перед методом формування інтерпретаційних сітчастих структур є необхідність задання чітких крайових умов моделювання. Хоча останній метод, й вимагає задання крайових умов у формі координат базових вузлів моделі, однак, на відміну від МСР, ці вузли не обов'язково мають належати графіку досліджуваної неявної функції, що докорінно знижує складність вирішення задачі.

Окрім того, можливо адаптувати останній з показаних методів до побудови регулярних точкових каркасів неявних та інших функцій.

Список використаних джерел:

1. *Kulikov P.* The Principles of Discrete Modeling of Rod Constructions of Architectural Objects / *P. Kulikov, O. Ploskiy, V. Skochko* // Lublin-Rzeszow, 2014. Motrol: Commission of Motorization and Energetics in Agriculture, Polish Academy of Sciences, vol. 16 (8), 3-10.
2. *Плоский В. О.* Алгоритм управління параметрами в'язей сітчастих структур, на основі корегування величин скалярного потенціалу зовнішніх впливів / *В. О. Плоский, В. І. Скочко* // Енергозбереження в будівництві та архітектурі. – К. : КНУБА, 2014. – Вип. 5. – с 224-230.
3. *Скочко В. І.* Рівняння параметрів стану та положення в'язей сітчастих структур / *В. І. Скочко, Л. О. Скочко* // Основи і фундаменти. – К. : КНУБА, 2013. – Вип. 34. – с 47-57.
4. *Скочко В. І.* Рівняння параметрів стану та положення в'язі, що сполучає вільний та закріплений вузли сітчастої структури / *В. І. Скочко* // Містобудування та територіальне планування. – К. : КНУБА, 2014. – с 521-527.
5. *Скочко В. І.* Рівняння параметрів стану та положення в'язі, що сполучає вільний та закріплений вузли сітчастої структури / *В. І. Скочко* // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво: наук. журн.: матеріали

Всеукр. наук. конф. молодих вчених, асп. та студ. «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Луцьк : ЛНТУ, 2014. – с 94-103.

6. *Skochko V.* Morphogenesis and Correction of Planar Rod Constructions With a Small Amount of Free Nodes / *V. Skochko* // Lublin-Rzeszow, 2015. Motrol: Commission of Motorization and Energetics in Agriculture, Polish Academy of Sciences, vol. 17 (8). In print.

7. *Бронштейн И. Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Изд. перераб. / *И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев*; под ред. *Г. Гроше, и В. Циглера*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 976 с.

8. *Шуп Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. Пер. с англ. / *Т. Шуп*. – М.: Мир, 1982. – 238 с., ил.

9. *Рабинович И. М.* Курс строительной механики стержневых систем. Часть 2. Статически неопределимые системы. Издание 2-е. перераб. / *И. М. Рабинович*. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 548 с., ил.

10. *Самарский А. А.* Численные методы / *А. А. Самарский, А. В. Гулин*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с.

11. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем / *А. А. Самарский*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. – 553 с.

12. *Самарский А. А.* Теория разностных схем / *А. А. Самарский*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 616 с.

13. *Самарский А. А.* Методы решения сеточных уравнений / *А. А. Самарский, Е. С. Николаев*. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.

14. *Годунов С. К.* Разностные схемы (введение в теорию) / *С. К. Годунов, В. С. Рябенский*. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

15. *Ковалёв С. Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций / *С. Н. Ковалёв* // Дис. ... доктора техн. наук. 05.01.01. – М.: МАИ, 1986. – 348 с.

Аннотация

В работе раскрыты базовые принципы построения дискретных образов плоских кривых линий, уравнения которых записаны в явной форме. В контексте решения данной проблемы выполнено сравнительный анализ специального алгоритма применения метода конечных разностей совместно с базовыми соотношениями дифференциальной геометрии, а также алгоритма построения дискретной математической модели некоторой сетчатой структуры на плоскости с последующим системным корректированием формы этой модели путём перераспределения величин параметров жесткости её стержней. Корректирование осуществляется таким образом, чтобы в результате

координаты каждого из наперёд заданного множества узлов дискретной модели удовлетворяли известному уравнению плоской кривой. Также проанализированы преимущества предложенного подхода перед численным методом конечных разностей.

Ключевые слова: дискретные образы, неявные функции, численное моделирование.

Annotation

This article describes the basic principles of discrete images of planar curves' building, which equations are written in implicit form. In the context of solving this problem, is performed a comparative analysis of the special algorithm of the method of finite differences, combined with base relationships of differential geometry and discrete algorithm for constructing a mathematical model of some mesh structure on the plane based on systemic correcting of the model's form by the redistribution of values of the parameters of its units' hardness. The adjustment is made so that the resulting coordinates of each of the set of predefined discrete nodes could satisfy equation of the curve. Also analyzed the benefits of the proposed approach to the numerical method of finite differences.

Key words: transport model, transport demand, transport supply, transport area, cell phones, base station, database.