УДК 711: 656.222.3.001.57: 621.372.8: 629.4.014.4

к.т.н., профессор Човнюк Ю.В.,
ychovnyuk@ukr.net, orcid/ 0000-0002-0608-0203,
доцент Чередниченко П.П., petro_che@ukr.net, orcid / 0000-0001-7161-661x,
к.т.н., доцент Диктерук М.Г., dicteruk@ukr.net, orcid/ 0000-0003-1889-0876,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОРОДСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ И ВОЛН: КОНТИНУАЛЬНЫЙ ПОДХОД, УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Предложена и обоснована математическая модель городских транспортных потоков и волн. Применение континуального подхода позволяет определить основные параметры указанных потоков и возникающих транспортных волн (плотность, амплитуду, скорость и др.), а также соответствующие уравнения состояния (городского транспортного потока), которое характеризует установившиеся движения потока машин. Определены скорости и плотности потоков машин, при которых массовая скорость (провозная способность) максимальна. Описано неустановившееся движение потока машин, появляющиеся при возникновении и ликвидации отказов в потоке машин. Установленное уравнение состояния потока машин на городской автомагистрали, в соответствии с уравнениями неразрывности и движения, позволяют исследовать явление отказов технических устройств автомагистрали города на их пропускную способность и устанавливать необходимые резервы для компенсации потерь (т.н. «пробок» или «джемов»), вызванных отказами.

Ключевые слова: математическое моделирование, городские транспортные потоки, транспортные волны, континуальность, уравнение состояния.

Актуальность. На пропускную способность автомобильных дорог городов существенное влияние оказывает интенсивность отказов и продолжительность восстановлений технических устройств (светофоров, постов ГАИ и пр.).

С позиций теории надежности автомобильная дорога города представляет собой специфическую техническую систему, в которой распространение отказов и восстановлений состояний потока машин, которые совместно с уравнениями сплошности и движения дают возможность моделировать распространение отказов и восстановлений в потоке автомобилей и учитывать их влияние на пропускную способность городской автомагистрали.

Анализ публикаций по теме исследования. Потоки машин (автомобилей) – последовательность машин, движущихся в одном направлении. Для математического описания движения потока машин возможны два подхода.

Первый подход состоит в представлении потока машин в виде дискретной среды – материальных точек. Аналитическое описание городского транспортного потока машин при этом возможно с помощью переменных Лагранжа. Обозначим через x и t пространственную и временную координаты середины каждого автомобиля в городском транспортном потоке машин (ГТПМ). Для того, чтобы различать автомобили в потоке, введем лагранжеву координату $x = \xi$, определяющую пространственное положение автомобиля в некоторый начальный фиксированный момент времени $t = t_0$. Закон движения здесь будет описываться функцией

Число автомобилей в потоке может достигать нескольких десятков, а то и сотен. В этом случае оперирование с системой уравнений связано с существенными проблемами формального характера: 1) сложностью учета многочисленных ограничений на скрещения, обгонки и стоянки машин и на межавтомобильные (межмашинные) интервалы; 2) трудностями, возникающими при решении системы уравнений; 3) плохой обозримостью результатов. Все указанные выше проблемы при моделировании ГТПМ снимаются при использовании второго подхода.

Второй подход заключается в представлении ГТПМ сплошной средой. В основе этого подхода лежит предположение о «сплошности» ГТПМ. Смысл такого предположения состоит в том, что, оставив в стороне судьбы отдельных автомобилей (машин), можно изучать некоторые средние глобальные характеристики ГТПМ: скорость, плотность и с их помощью, в конечном счете, пропускную способность – главный показатель эффективности функционирования системы «автомагистраль города». Естественно, континуальная модель ГТПМ, как и всякая другая модель, является некоторым приближением реального объекта, но, как представляется авторам настоящей статьи, приближением достаточно достоверным, отражающим основные черты и особенности процесса функционирования городской автомагистрали. Наиболее важным обстоятельством с позиций проектирования является то, что эта модель позволяет установить соотношение между техническими параметрами городской автомагистрали и показателями эффективности ее функционирования.

Для оценки приемлемости замены дискретной среды непрерывной используют неравенство:

$$\frac{l}{L} << 1, \tag{1}$$

где l – длина свободного пробега (автомобиля); L – характерный размер задачи.

Применительно к рассматриваемой модели можно полагать, что l – среднее расстояние (безопасного движения) между автомобилями (автомашинами), L – длина участка городской автомагистрали. Например, если на участке городской автомагистрали (с двусторонним движением) $L = 200$ м, $l = 10$ м, то отношение $\frac{l}{L} = 0.05$, что позволяет считать выполнение критериального неравенства (1) для таких условий вполне удовлетворительным.

Предположение о «сплошности» непрерывности ГТПМ (и поездов, в частности) дает возможность применить для описания его движения математический аппарат механики сплошной среды [2]. Начало использования методов механики сплошной среды для решения транспортных задач положил профессор МИИТа (Московского института инженеров транспорта) Николай Андреевич Панькин [1]. Методы механики сплошной среды эффективно используются при изучении движения потоков автомобилей [3], потоков поездов [4].

Цель исследования. Обычно предметом изучения при исследовании движения ГТПМ являются его параметры – плотность и скорость, которые зависят от временной и пространственной координат. Для определения этих двух независимых функций в механике сплошной среды применяются дифференциальные уравнения, основанные на законах сохранения массы и количества движения – уравнения неразрывности и движения.

Уравнения неразрывности и движения характеризуют абстрактную среду. Специфические свойства реального ГТПМ описываются его уравнением состояния, устанавливающим зависимости между его параметрами, например, скоростью и плотностью [4]. Если параметры (скорость и плотность) на участке автомагистрали, где изучается движение ГТПМ, постоянны во времени, то движение называют установившимся, если же они (параметры) изменяются с течением времени, то – неустановившимся. Наибольший практический интерес, безусловно, представляет неустановившееся движение, присущее ГТПМ, которое возникает в потоке автомобилей (автомашин) в моменты отказов и окончания восстановлений.

Изложение основного содержания исследования. В дальнейшем, как и в [4], будем рассматривать идеализированный ГТПМ, согласующийся со следующими допущениями:

1) все автомобили в невозмущенном потоке движутся по параллельному графику;

2) межмашинные интервалы одинаковы;

3) массы автомобилей одинаковы.

Для описания ГТПМ будем рассматривать четыре исходных независимых параметра: длину линии L между источником и стоком; время хода автомобиля по линии T с учетом его возможных стоянок; интенсивность потока машин N; среднюю массу автомобиля (автомашины) M.

Кроме того, введем другие параметры, выражающиеся через исходные: **для дискретного и непрерывного ГТПМ**

участковую скорость машин –

$$u = \frac{L}{T}; \tag{2}$$

для дискретного ГТПМ

временной интервал между машинами –

$$I = \frac{1}{N}, \tag{3}$$

пространственный интервал между серединами соседних машин –

$$l = \frac{L}{TN} = u \cdot I, \tag{4}$$

среднее число машин на линии (дороге)

$$m = \frac{L}{l} = \frac{T}{I} = T \cdot N; \tag{5}$$

для непрерывного ГТПМ

плотность потока машин –

$$\rho = \frac{M}{l} = \frac{MTN}{L} = \frac{MT}{u}; \tag{6}$$

Массовая скорость ГТПМ (поток массы) –

$$q = u \cdot \rho = \frac{M}{I}. \tag{7}$$

Как следует из (2) – (7), параметры дискретной и непрерывной моделей ГТПМ связаны между собой, что дает возможность изучать на непрерывной модели процессы, происходящие в дискретной модели

ГТПМ с $I = \text{const}$ будем называть регулярным. Все реальные ГТПМ нерегулярны. Приведение конкретного ГТПМ к регулярному осуществляется с помощью линейной свертки:

$$N = \sum_{i=1}^{S} N_i \cdot \varepsilon_i, \tag{8}$$

где N_i – интенсивность машин i –й категории (например, автобусов); ε_i – коэффициент приведения автомобилей i – й категории (машин i – й категории) к грузовым транзитным; S – число категорий автомашин. В дальнейшем рассматриваются приведенные регулярные ГТПМ.

Еще одним важным параметром потока машин является скорость возмущений C, называемая также в механике сплошной среды местной скоростью звука. Под малыми возмущениями ГТПМ понимаются местные бесконечно малые изменения параметров u, I, l, ρ, q. Величина скорости малых возмущений в механике сплошной среды определяется как произведение плотности на производную скорости по плотности:

$$C = \rho \cdot \frac{du}{d\rho} = \frac{du}{d\rho / \rho} = \frac{du}{d\left(\ln \rho\right)}. \tag{9}$$

Величина C дает возможность интерпретировать смысл решений уравнений, описывающих неустановившиеся движения в ГТПМ

Из определения скорости малых возмущений следует, что для знания ее необходимо располагать зависимостью $u = u\left(\rho\right)$.

Поскольку скорость малых возмущений рассматривается в арифметическом смысле, а производная $\frac{du}{d\rho}$ для ГТПМ, как можно показать, всюду отрицательна, то для определения скорости малых возмущений будем использовать соотношение:

$$C = -\rho \cdot \frac{du}{d\rho}. \tag{10}$$

Уравнениями состояния ГТПМ будем называть соотношения, связывающие два любых параметра из (2) – (7) и (9).

Используя результаты работы [4] для потока поездов можно показать, что уравнение состояния ГТПМ имеет вид:

$$u = A - B \cdot \rho^K \tag{11}$$

где *A, B, K* – константы, характеризующие конкретный поток машин, причем *A>0, B>0, K>0*:

$$\begin{cases} A = \nu,\ B = \dfrac{\left(\nu - \bar{u}\right)}{\bar{p}^K}, K = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\nu - \bar{u}}{\bar{p}^K}\right)}{\ln\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)}, \\ 0 < \rho < \rho_{\max},\ \lim\limits_{\rho \to 0} u = 0,\ \lim\limits_{\rho \to \bar{\rho}} u = \bar{u}, \\ u = u_0 \quad при\ \rho = \rho_0, \dfrac{du}{d\rho} < 0, \end{cases} \tag{12}$$

причем $\rho_{\max}$ – максимальная плотность ГТПМ, при которой движение машин прекращается; $\bar{\rho}$ – максимально допустимая плотность ГТПМ, например, плотность при пространственном интервале l, равном сумме длин трех блок–участков плюс длина машины (автомобиля) (езда на зеленый свет); поток с плотностью $\bar{\rho}$ будем называть насыщенным; ν – практически участковая скорость машины, когда она единственная на автомагистрали и движется без скрещений и обгонов.

Учитывая (11) и (12) можно уравнение состояния $u = u(\rho)$ представить окончательно в виде:

$$u = \nu - (\nu - \bar{u}) \cdot \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^{\frac{\ln\left(\frac{\nu - u_0}{\nu - \bar{u}}\right)}{\ln\left(\frac{\rho_0}{\bar{\rho}}\right)}} \qquad (13)$$

Основные свойства функции (13) сводятся к следующему:

1) поскольку $\frac{du}{d\rho} < 0$, скорость ГТПМ с увеличением плотности убывает;

2) при $K < 1$, $\frac{d^2u}{d\rho^2} > 0$ (т.е. функция (13) вогнута);

3) при $K > 1$, $\frac{d^2u}{d\rho^2} < 0$ (т.е. функция (13) выпукла);

4) при $K = 1$, $\frac{d^2u}{d\rho^2} = 0$ (т.е. функция (13) линейна).

График уравнения состояния $u = u(\rho)$ представлен на рис. 1

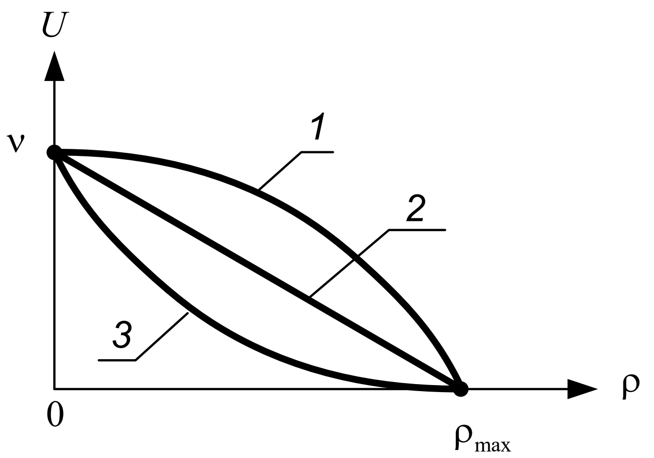

Рис. 1. График уравнения состояния ГТПМ $u = u(\rho)$ *1* – при *K*>1; *2* – при *K*=1; *3* – при *K*<1.

Перейдем к уравнению состояния ГТПМ вида $q = q(\rho)$. Уравнение (13)

$$u = \nu - (\nu - \bar{u}) \cdot \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^{K}, \qquad (14)$$

а потом домножить его обе части на ρ, что дает:

$$q = \nu \cdot \rho - \frac{\nu - \bar{u}}{\bar{\rho}^{K}} \cdot \rho^{K+1}, \qquad (15)$$

Функция $q(\rho)$ обладает следующими свойствами:

1) $$q = 0 \; при \; \rho = 0 \; при \; \rho = \rho_{\max} = \bar{\rho} \cdot \left(\frac{\nu}{\bar{u}} \right)^{\frac{1}{K}} \tag{16}$$

2) $$\frac{dq}{d\rho} = 0 \; при \; \rho^* = \bar{\rho} \cdot \left[\frac{\nu}{(K+1)\cdot(\nu - \bar{u})} \right]^{\frac{1}{K}} \tag{17}$$

3) $\dfrac{d^2 q}{d\rho^2} < 0$ всегда, поэтому $q(\rho)\big|_{\rho=\rho^*}$ – максимум функции $q(\rho)$.

Следовательно, существует такая плотность ГТПМ ρ^*, при которой массовая скорость q максимальна.

Скорость, соответствующая ρ^*, определяется подстановкой (17) в (14):

$$u^* = \nu \cdot \frac{K}{K+1} \tag{18}$$

Экстремальное значение массовой скорости ГТПМ:

$$q^* = u^* \cdot \rho^* = \nu \cdot \bar{\rho} \cdot \left(\frac{\nu}{\nu - \bar{u}} \right)^{\frac{1}{K}} \cdot \frac{K}{(K+1)^{\frac{K+1}{K}}} \tag{19}$$

или

$$q^* = u^* \cdot \rho_{\max} \cdot \frac{K}{(K+1)^{\frac{K+1}{K}}} \tag{20}$$

График уравнения $q = q(\rho)$ показан на рис. 2.

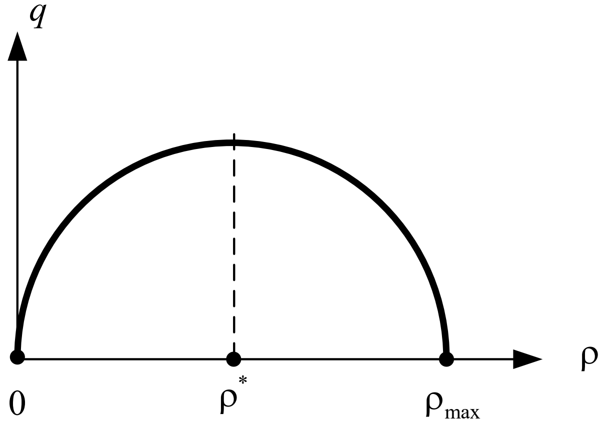

Рис. 2. График уравнения состояния ГТПМ $q = q(\rho)$

Найдем те значения *K*, при которых ρ^* лежит в интервале (0, ρ). Для этого необходимо выполнение условия $\frac{\rho^*}{\rho} < 1$. Учитывая (17), получаем:

$$\left[\frac{\nu}{(K+1)\cdot(\nu - \bar{u})} \right]^{\frac{1}{K}} < 1, \tag{21}$$

откуда:

$$K > \frac{\bar{u}}{\nu - \bar{u}}, \tag{22}$$

Таким образом:

$$\begin{cases} при\ K > \dfrac{\bar{u}}{\nu - \bar{u}},\ \rho^* < \bar{\rho}; \\ при\ K = \dfrac{\bar{u}}{\nu - \bar{u}},\ \rho^* = \bar{\rho}; \\ при\ K < \dfrac{\bar{u}}{\nu - \bar{u}},\ \rho^* > \bar{\rho}. \end{cases} \tag{23}$$

Рассмотрим уравнение состояния ГТПМ вида $u = u(c)$. В соответствии с (10), используя $\dfrac{du}{d\rho} = -\dfrac{K(\nu - \bar{u})}{\bar{\rho}^K} \cdot \rho^{K-1}$, получим формулу скорости малых возмущений ГТПМ:

$$c = K(\nu - \bar{u}) \cdot \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^K. \tag{24}$$

С учетом (24) уравнение состояния (14) приобретает достаточно лаконичный вид:

$$u = \nu - \frac{c}{K}. \tag{25}$$

В заключении, для упрощения дальнейших исследований уравнений состояния ГТПМ сократим число их переменных и параметров. Для этого представим уравнения состояния ГТПМ $u = u(\rho)$, $q = q(\rho)$ в безразмерных координатах с безразмерными параметрами.

Введем три безразмерные переменные ГТПМ. Коэффициент скорости потока машин:

$$\beta = \frac{u}{\nu}, \tag{26}$$

Коэффициент скорости β может меняться от единицы при $u = \nu$ до нуля при $u = 0$, т.е.:

$$1 \ge \beta \ge 0. \tag{27}$$

Коэффициент плотности потока машин:

$$\gamma = \frac{\rho}{\bar{\rho}}. \tag{28}$$

Коэффициент плотности γ может меняться от нуля при $\rho = 0$ до $\gamma_{\max}$ при $\rho = \rho_{\max}$, при $\rho = \bar{\rho}$ (поток насыщенный) $\gamma = 1$.

Коэффициент массовой скорости потока машин:

$$\delta = \frac{q}{\bar{q}}. \tag{29}$$

Величина $\bar{q}$ представляет собой теоретически наибольший поток массы:

$$\delta = \nu \cdot \bar{\rho}. \tag{30}$$

Из (26) – (29) следует:

$$\delta = \beta \cdot \gamma. \tag{31}$$

Введем также два безразмерных параметра: величину $\bar{\beta}$ при $u = \bar{u}$:

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{u}}{\rho}, \;\; \bar{\beta} < 1. \tag{32}$$

и величину $\gamma_{\max}$ при $\rho = \rho_{\max}$:

$$\gamma_{\max} = \frac{\rho_{\max}}{\bar{\rho}}, \;\; \gamma_{\max} > 1. \tag{33}$$

С учетом (26), (28), (32), (33) можно получить уравнение состояния ГТПМ в безразмерных координатах вида $\beta = \beta(\gamma)$:

$$\beta = 1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{\max}}\right)^{\frac{-\ln(1-\bar{\beta})}{\ln \gamma_{\max}}} \tag{34}$$

или

$$\beta = 1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_{\max}}\right)^{K} \tag{35}$$

где: $K = \dfrac{-\ln(1-\bar{\beta})}{\ln \gamma_{\max}}$.

Формула (35) представляет собой зависимость между коэффициентами скорости и плотности потока машин. Причем $\beta = 1$ при $\gamma = 0$, $\beta = 0$, при $\gamma = \gamma_{\max}$.

График уравнения (35) – монотонно убывающая кривая, знак кривизны которой определяется показателем: при K>1 функция выпукла; при K<1 функция вогнута; при K=1 функция линейна.

Следует также отметить, что, как уже указывалось выше, неустановившееся движение ГТПМ описывается уравнениями законов сохранения массы и количества движения с переменными, зависящими от пространственной координаты X и времени t. Например, если в качестве переменных принять скорость и u плотность ρ, то эти уравнения в форме Эйлера имеют вид [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \cdot \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{c^2}{\rho} \cdot \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Эта система, помимо неизвестных функций $u(x,t)$ и $\rho(x,t)$, содержит неизвестную функцию $c(x,t)$. Поэтому систему надо дополнить уравнением состояния (25). В результате для определения трех неизвестных функций мы имеем три уравнения, образующих систему, решение которой описывает неустановившееся движение потока машин. В такой постановке проблема анализа ГТПМ будет рассмотрена в отдельной статье.

ВЫВОДЫ.

1. Рассмотрена континуальная модель ГТПМ, в основу которой положено предположение о его «сплошности».
2. Континуальную модель потока машин на городской автомагистрали описывают параметры (плотность, скорость, массовая скорость, местная скорость звука) и связывающие любую пару параметров уравнения состояния потока машин. Уравнения состояния характеризуют установившееся движение потока машин.
3. Из уравнения состояния $q = q(\rho)$ следует, что существуют такие скорость и плотность потока машин, при которых массовая скорость (провозная способность) максимальна.
4. Уравнение состояния $u = u(c)$, в совокупности с уравнениями неразрывности и движения, образует замкнутую систему, описывающую неустановившееся движение потока машин, появляющееся при возникновении и ликвидации отказов в потоке машин.
5. Уравнение состояния потока машин на городской автомагистрали, в совокупности с уравнениями неразрывности и движения, дает возможность исследовать влияние отказов технических устройств автомагистрали города на ее пропускную способность и устанавливать необходимые резервы для компенсации потерь (т.н. «пробок» или «джемов»), вызываемых отказами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панькин Н.А. Распространение сильных возмущений в поезде. /Н.А. Панькин. // Труды кафедры высшей математики и теоретической механики ВЗИИТ МПС– 1961 – Вып. 7.– С. 105–165.
2. Станюкович К.П. Неустановившееся движение сплошной среды. / К.П. Станюкович. – М.: Наука, 1971.– 854 с.

3. Сильянов В.В. Теория транспортных потоков в проектировании дорог и организации движения. / В.В. Сильянов. – М.: Транспорт, 1977. – 303с.

4. Гавриленков А.В. Уравнения состояния потока поездов. /А. В. Гавриленков. //Вестник ВНИИЖТ. – 1994. – №8. – С. 13–18.

к.т.н., професор Човнюк Ю.В.,
доцент Чередніченко П.П.,
к.т.н., доцент Діктерук М.Г.
Київський національний університет будівництва і архітектури

МАТИМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІСЬКИХ ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ І ХВИЛЬ: КОНЦЕПТУАЛЬНИЙ ПІДХІД, РІВНЯННЯ СТАНУ

Запропонована й обґрунтована математична модель міських транспортних потоків та хвиль. Застосування континуального підходу дозволяє визначити основні параметри зазначених потоків й виникаючих транспортних хвиль (густина, амплітуда, швидкість та ін.), а також відповідне рівняння стану (міського транспортного потоку машин), яке характеризує усталені руху потоку машин. Визначені швидкості й густини потоків машин, за яких масова швидкість (провізна здатність) максимальна. Описаний неусталений рух потоку машин, який з'являється при виникненні та ліквідації відмов у потоці машин. Встановлене рівняння стану потоку машин на міський автомагістралі, відповідно до рівнянь нерозривності і руху, дозволяє досліджувати явище відмов технічних пристроїв автомагістралі міста на їх пропускну здатність й встановлювати необхідні резерви задля компенсації втрат (т.з. «пробок» чи «джемів»), викликаних відмовами.

Ключові слова: математичне моделювання, міські транспортні потоки, транспортні хвилі, континуальність, рівняння стану.

Ph.D., Professor Chovnyuk Yu. V.,
Associate Professor Cherednichenko P.P.,
Ph.D., associate Professor Dikteruk M.G.,
Kyiv National University of Construction and Architecture

MATHEMATICAL MODELING OF URBAN TRAFFIC FLOWS AND WAVES: A CONTINUOUS APPROACH, EQUATIONS OF STATE

A mathematical model of urban transport flows and waves is proposed and justified. The application of the continual approach makes it possible to determine the main parameters of these flows and the emerging transport waves (density, amplitude, velocity, etc.), as well as the corresponding equations of state (urban traffic flow) that characterize the steady flow of machines. The speeds and densities of the machines are determined, at which the mass velocity (carrying capacity) is maximal. Unsteady motion of the flow of machines, appearing when faults are generated and eliminated in the flow of machines, is described. The established equation of the state of the flow of machines on a city highway, in accordance with the equations of continuity and motion, allows one to investigate the phenomenon of failures of technical devices of the city's highway on their throughput and establish the necessary reserves to compensate for losses (so-called "jams" caused by failures).

Key words: mathematical modeling, urban transport flows, transport waves, continuity, equation of state.