УДК 539.3

к.т.н. Левківський Д.В.,
dmitriylev@gmail.com, ORCID 0000-0003-2964-1605,
Янсонс М.О.,
ya_mari@bigmir.net, ORCID 0000-0002-6174-0403
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЛІНІЙ ДЛЯ ЗНИЖЕННЯ ВИМІРНОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

При зниженні вимірності диференціальних рівнянь теорії пружності перевага надається чисельним методам. Головну позицію при цьому займає метод скінченних елементів, який поглинув у себе велику частину існуючих математичних методів та підходів до розрахунку просторових конструкцій. У даній роботі запропоновано новий підхід до розв'язання диференціальних рівнянь, побудований на методі прямих. Даний метод автори називають модифікованим методом ліній, оскільки класична різницева схема замінена проекційним методом Бубнова-Петрова. Метод застосований для об'єктів, які мають циліндричну форму. Показані варіанти розбиття об'єкта лініями.

Ключові слова: теорія пружності, метод прямих, проекційний метод, базисні функції, метод дискретної ортогоналізації, метод ліній.

У роботі розглядаються об'єкти вісесимметричної форми зображені на рис. 1. По боковим поверхням даний об'єкт може взаємодіяти з оточуючим середовищем (жорсткий контакт, шарнір або певне піддатливе з'єднання). Також об'єкт може бути навантажений зовнішніми факторами в будь-якій площині.

Розглянемо основні будівельні конструкції, які раціонально узгоджуються з циліндричною системою координат:

1) Трубопровід, тунель метро (рис.2). Циліндричне тіло з тонкою стінкою на яке діють зовнішній тиск від ґрунту (пружна основа) та внутрішній тиск усередині (від рідин, тощо). У такому випадку навантаження і геометрія конструкції стала по координаті z. З теорії пружності відомо, що тривимірну задачу можна звести до плоскої задачі теорії пружності. Відносні деформації в напрямку осі z - $\varepsilon_z = 0$, тоді тривимірна модель, зображена на рис.1, перетворюється в плоску деформацію (рис.2).

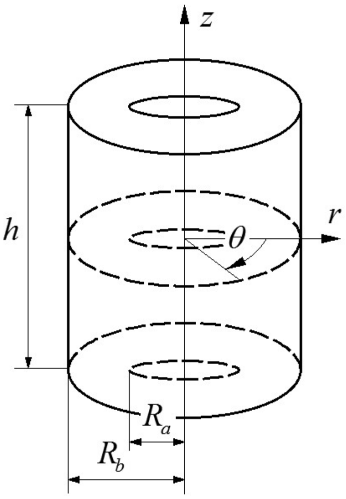

Рис. 1. Циліндричне тіло

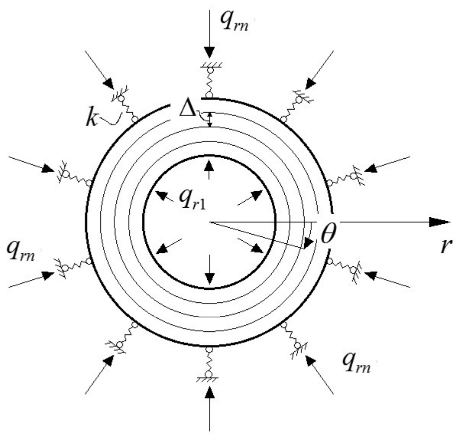

Рис. 2. Зведення тривимірної задачі до плоскої деформації

На наступному етапі задача зводиться до одновимірної за допомогою методу ліній. По радіальній координаті (рис.2) кільцерозбивається коловими лініями з кроком Δ. Для зниження вимірності на лініях обираються локальні базисні функції (лінійні або кубічні сплайни (рис.4)). У такому випадку вихідна система диференційних рівнянь зводиться до форми Коші. По коловій координаті розв'язок визначається методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. Також можливий другий варіант, оскільки задача вісесиметрична, то по коловій координаті функції можна записати за допомогою рядів Фур'є. При такому варіанті система диференціальних рівнянь зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

2) Циліндричний тунель, арочні кам'яні конструкції (рис.3.). По коловій координаті тіло не має замкнутої геометричної форми.Як і в попередньому випадку задача розглядається вплоскій постановці, оскільки навантаження стале по координаті z. У такому випадку зниження вимірності вихідних рівнянь виконується по координаті r. По коловій координаті використовується метод дискретної ортогоналізації С. К. Годунова. Попередньо проводиться перехід до нової криволінійної системи координат $y = r - R_0$, $s = r \cdot \theta$ (рис.4).

Розглянуті вище конструкції відносяться до плоских моделей, але існують конструкції при моделюванні яких потрібно враховувати просторовий напружено-деформований стан.

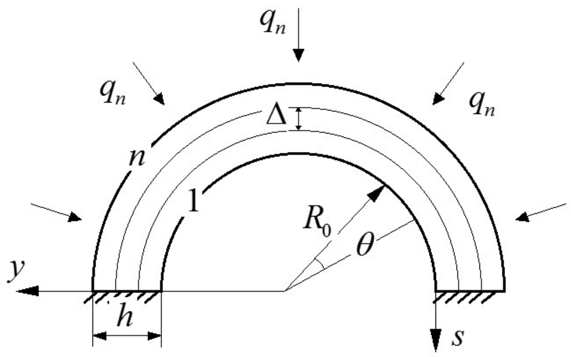

Рис.3. Циліндричний тунель

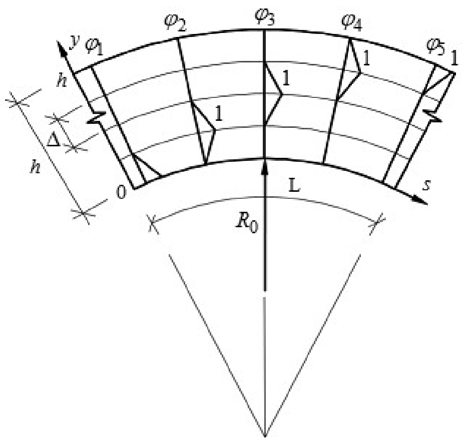

Рис.4. Локальні базисні функції

3) Бетонні кільця опускних колодязів, елеватори, стволи танкової та артилерійської зброї, димові труби та інші. Задача є вісесиметричною відносно геометрії об'єкта. Попередньо по коловій координаті застосовуються тригонометричні ряди. Навантаження і геометрія тіла можуть бути симетричні відносно осі. Зниження вимірності методомліній можна виконувати 2-ма способами.

Перший: прямокутна область розбивається прямими з кроком Δ по координаті z (рис.5). По координаті r функція залишається неперервною. В напрямку осі r використовується метод дискретної ортогоналізації С. К. Годунова. По коловій координаті використовуються ряди Фур'є.

Другий: по координаті r проводяться прямі з кроком Δ, а по координаті z використовується метод ортогоналізації. (рис 6). По коловій координаті використовуються ряди Фур'є.

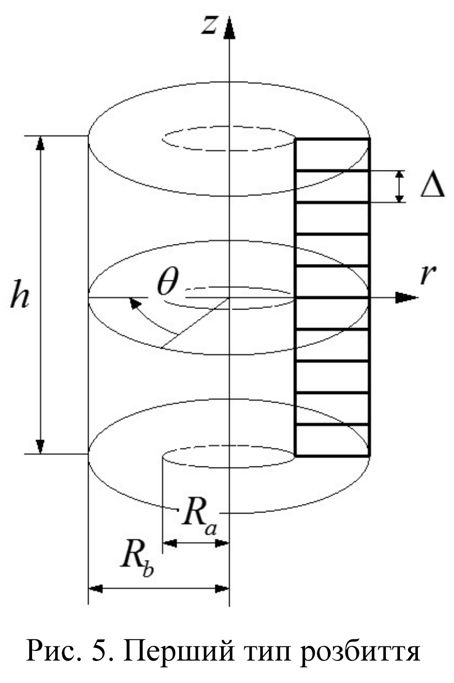

Рис. 5. Перший тип розбиття

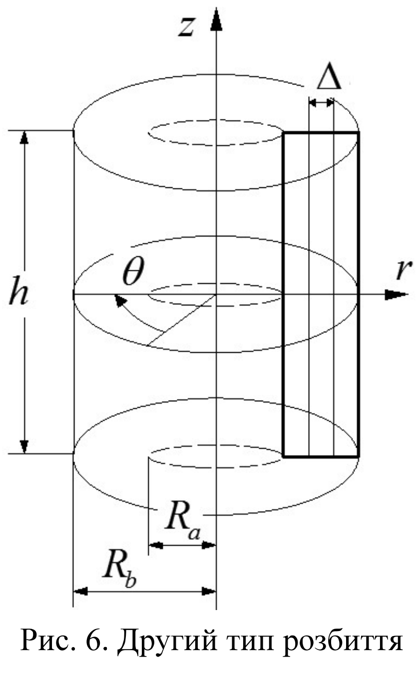

Рис. 6. Другий тип розбиття

Для визначення напружено-деформованого стану описаних моделей використовуються диференціальні рівняння теорії пружності, які можна знайти в кластичних книгах по теорії пружності.

Зниження вимірності по коловій координаті за допомогою рядів Фур'є також є відомою математичною операцією.

Використання модифікованого методу прямих для пластин в прямокутній системі координат досліджено в роботах [1-3] і даний підхід без значних змін використовується для задач в циліндричній системі координат. Але слід виділити один незручний момент, що виникає при використанні проекційного методу по радіальній координаті.

У процесі редукції з'являється матричний оператор $\left\{d_{ij}\right\} = \int_0^h \varphi_i \cdot \varphi_j \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy$.

На рис. 7 зображено базисні функції $\varphi(y)$ та гіпербола $\frac{1}{R_0 + y}$.

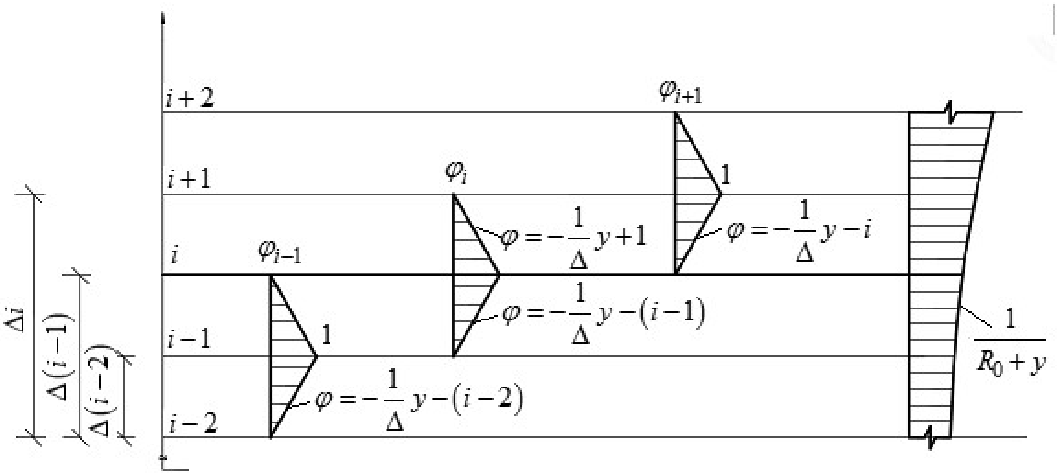

Рис. 7. Базисні функції для внутрішньої лінії

Інтегрування проводиться аналітично в загальному вигляді для трьох сусідніх прямих $i-1$, i та $i+1$ (рис.7).

Елементи головної діагоналі матриці $\left\{d_{ij}\right\}$:

$$d_{ii} = \int_{\Delta(i-2)}^{\Delta(i-1)} \left[\frac{y}{\Delta} - (i-2)\right]^2 \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy + \int_{\Delta(i-1)}^{\Delta i} \left[-\frac{y}{\Delta} + i\right]^2 \cdot \frac{1}{R_0 + y} dy = \left(\frac{(i-1)}{\sqrt{2}} - (i-2) \cdot \sqrt{2}\right)^2 - \frac{(i-2)^2}{2} - \frac{2R_0}{\Delta}$$

$$-\left(i \cdot \sqrt{2} - \frac{(i-1)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{i^2}{2} + \left(\frac{R_0}{\Delta} + (i-2)\right)^2 \cdot \left(\ln\left|R_0 + \Delta(i-1)\right| - \ln\left|R_0 + \Delta(i-2)\right|\right) + \left(\frac{R_0}{\Delta} + i\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \left(\ln\left|R_0 + \Delta i\right| - \ln\left|R_0 + \Delta(i-1)\right|\right).$$

Елементи другорядної діагоналі матриці $\left\{d_{ij}\right\}$:

$$d_{ij}=\int\limits_{\Delta(i-1)}^{\Delta i}\left(-\frac{y}{\Delta}+i\right)\left(\frac{1}{\Delta}y-(i-1)\right)\cdot\frac{1}{R_0+y}dy=\frac{R_0}{\Delta}-\frac{i^2}{2}+(2i-1)i+\frac{(i-2)^2}{2}-(2i-1)(i-1)+$$

$$+\left(\ln\left|R_0+\Delta(i-1)\right|-\ln\left|R_0+\Delta i\right|\right)\cdot\left(\frac{R_0^2}{\Delta^2}+\frac{(2i-1)}{\Delta}R_0+i(i-1)\right)$$

1-й елемент та n-й елемент матриці $\left\{d_{ij}\right\}$:

$$d_{11}=\int\limits_0^{\Delta}\left(-\frac{y}{\Delta}+1\right)^2\cdot\frac{1}{R_0+y}dy=-1,5-\frac{R_0}{\Delta}+\left(1+\frac{R_0}{\Delta}\right)^2\cdot\left(\ln\left|R_0+\Delta\right|-\ln\left|R_0\right|\right)$$

$$d_{nn}=\int\limits_{\Delta(n-2)}^{\Delta(n-1)}\left(\frac{1}{\Delta}y-(n-2)\right)^2\frac{1}{R_0+y}dy=\frac{(2n-3)}{2}-2(n-2)-\frac{R_0}{\Delta}+$$

$$+\left(\frac{R_0}{\Delta}+(n-2)\right)^2\cdot\left(\ln\left|R_0+\Delta(n-1)\right|-\ln\left|R_0+\Delta(n-2)\right|\right)$$

Даний інтеграл визначений незалежно від кількості прямих, радіуса кривизни та товщини об’єкта. В результаті отримаємо трьохдіагональну матрицю.

Розглянемо конкретні значення, при $\Delta=0,01\,м$, $R_0=10\,м$ при 5-ти лініях матричний оператор має вигляд:

$$\left\{d_{ij}\right\}=\begin{bmatrix}0,333 & 0,167 & 0 & 0 & 0\\ 0,167 & 0,666 & 0,166 & 0 & 0\\ 0 & 0,166 & 0,665 & 0,166 & 0\\ 0 & 0 & 0,166 & 0,665 & 0,166\\ 0 & 0 & 0 & 0,166 & 0,332\end{bmatrix}\cdot10^{(-3)}$$

Висновок: використання модифікованого методу ліній в циліндричній системі координат дають можливість покращити процедуру зниження вимірності вихідних диференціальних рівнянь, підвищити точність розрахунку, перейти до розв’язання тривимірних задач статики та динаміки. Також в даному підході покладені основи для впровадження методу ліній для розрахунку товстих оболонок.

Література:

1. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – с. 413 – 423.

2. V. Chybiryakov, A. Stankevich, D. Levkivskiy, V. Melnychuk Application of generalized “method of lines”, for solving problems of thermoelasticity of thick plates. / // Aninternational journal on operation off armandagri-foodindustry machinery “Motrol”, vol.16, No8, Lublin 2014. P. 11-20.
3. Левківський Д.В., Янсонс М.О. Розрахунок товстої пластини модифікованим методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 63 – К.: КНУБА, 2017 – с. 247 – 250.

к.т.н. Левковський Д.В., Янсонс М.О.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ЛИНИЙ ДЛЯ ПОНИЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

При снижении размерности дифференциальных уравнений теории упругости, предпочтение отдается численным методам. Главную позицию при этом занимает метод конечных элементов, который поглотил в себя большую часть существующих математических методов и подходов к расчету пространственных конструкций. В данной работе предложен новый подход к решению дифференциальных уравнений, построенный на методе прямых. Данный метод авторы называют модифицированным методом линий, поскольку классическая разностная схема заменена проекционным методом Бубнова-Петрова. Метод применен для объектов, которые имеют цилиндрическую форму. Показаны варианты разбиения объекта линиями.

Ключевые слова: теория упругости, метод прямых, проекционный метод, базисные функции, метод дискретной ортогонализации, метод линий.

Levkivskyi D.V., Yansons M.O.,
Kyiv National University of Construction and Architecture

FEATURES OF APPLICATION BY METHOD OF LINES FOR LOWERING DIMENSIONALITY OF DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS OF THE THEORY OF ELASTICITY IN CYLINDRICAL SYSTEM OF COORDINATES

By reducing the dimensionality of the differential equations of the theory of elasticity, preference is given to numerical methods. The main position here is the method of finite elements, which absorbed most of the existing mathematical methods and approaches to the calculation of spatial structures. In this paper a new approach to the solution of differential equations, based on the direct method, is proposed. This method is called the modified method by the authors, since the classical difference scheme is replaced by the projection method of Bubnov-Petrov. The method is applied to objects that have a cylindrical shape. Shows variants of object splitting by lines.

Keywords: theory of elasticity, method of lines, projection method, basic function, method of discrete orthogonalization.