

УДК 519.21

канд. ф-м. наук доц. Наголкіна З.І.,
zonagol@ukr.net, ORCID / 0000-0002-2722-5176,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ІМОВІРНІСНА МОДЕЛЬ ВПЛИВУ ТУРБУЛЕНТНОСТІ НА ПРОЦЕСИ ТЕПЛООБМІНУ В ТРУБОПРОВОДІ

Запропонована імовірнісна модель впливу турбулентності на процеси теплообміну представляє собою стохастичне диференціальне рівняння з необмеженим коефіцієнтом знесення. Вона дає можливість визначити середньоквадратичні оцінки розподілів температури.

Ключові слова. Теплоносії, турбулентний режим, втрати теплової енергії.

Гідродинамічні режими руху теплоносія в трубопроводах теплопостачання комунальних теплових мереж визначаються теплофізичними властивостями і швидкістю теплоносія. Критерієм переходу є число $Re = \frac{v \cdot L}{\nu}$, де v - швидкість руху теплоносія, L - лінійний розмір, ν - кінематична в'язкість. Велика протяжність трубопроводів теплових мереж, наявність локального опору у вигляді арматури і поворотів сприяють появі вихорів, що являє собою ознаку турбулентності. В теплових мережах важливо враховувати втрати теплової енергії в навколишнє середовище. Гідродинамічний режим в свою чергу визначає інтенсивність тепловіддачі, що описана рядом емпіричних закономірностей типу $Nu=f(Re, Pe)$. Таким чином при числі $Re \geq Re_{кр}$ будь-які малі збурення, що спонтанно виникають в потоці, не зникають, а навпаки - сприяють турбулізації потоку теплоносія.

Існують різноманітні моделі, що описують турбулентність. Одна з таких моделей – статистична. В цій моделі теплофізичні і гідродинамічні процеси описуються через статистичні характеристики – моменти випадкових полей.

В даній роботі запропонована імовірнісна модель, яка в деякому розумінні є окремим випадком статистичної. Вона не дає змогу отримати точне значення температури теплоносія, а тільки її середньоквадратичні оцінки.

В якості імовірнісної моделі турбулентності в трубопроводі пропонується рівняння конвективного теплообміну з випадковим збуренням у вигляді білого шуму. Саме цей випадковий адитивний додатак, пов'язаний з вінеровським процесом, враховує вплив турбулентності.

Рівняння конвективного теплообміну в трубопроводі в одновимірному випадку в найбільш загальному вигляді

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - v \frac{\partial \theta}{\partial x} + b (\theta - \theta_0) \quad (1)$$

Де $\theta(t, x)$ – температура теплоносія в точці з координатою x в момент часу t . $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коефіцієнт теплопроводності, v – швидкість руху, $b = \frac{2\alpha}{c\rho R}$ –

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Θ_0 – температура зовнішнього середовища, λ – коефіцієнт теплопроводності, c – коефіцієнт теплоємності, ρ – густина, R – радіус труби [1]. (Будемо вважати, що розподілом температур вздовж радіуса можна нехтувати).

Введемо до розгляду функціональний нескінченно вимірний Гілбертів простір неперервних функцій з інтегрованим квадратом $H = L^2[0, l]$ і нормою $\|\varphi\|^2 = \int_0^l |\varphi(x)|^2 dx$. $x \in [0, l]$. Тоді, при кожному фіксованому t , $\theta(t, x) = \theta_t(x) = \varphi(x)$.

Нехай функція $u(t)$ – розподіл температури в момент t , і приймає значення в $H = L^2[0, l]$. Тоді $u(t_1) = \theta_{t_1}(x) = \varphi_1(x)$. Відповідно $\|u(t_1)\|^2 = \int_0^l |\varphi_1(x)|^2 dx$.

Рівняння (1) можна записати в загальному вигляді в просторі H

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(t_0) = u_0. \quad (2)$$

Оператор A в H визначається за формулою

$$Au = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial u}{\partial x} + b u$$

і є необмеженим оператором диференціювання, визначений на області $D_A \subset H$ щільно вкладеній. (D_A – множина двічі неперервно диференційованих функцій). Якщо задача Коші (2) – коректна, то існує полугрупа сильно неперервних обмежених операторів $U(t)$, які визначені спочатку на D_A і подовжені на H . Ця полугрупа визначає розв'язок (2) за формулою

$$u(t) = U(t)u_0, \quad u_0 \in H, \quad t \in [0, T]$$

При певних умовах на спектр оператора A полугрупа має оцінку

$$\|U(t)u_0\| \leq e^{\gamma t} \|u_0\| \quad (3)$$

В [2] досліджені рівняння параболічного типу, до яких відносяться (1), а також відповідно (2), і показана справедливість (3). Імовірнісна модель описана рівнянням в H вигляду

$$du = Au dt + B(t, u(t))dw(t) \quad (4)$$

$u(t_0) = u_0 = u_0 \in H, t \in [0, T]$.

Рівняння (4) є випадковим збуренням рівняння (2) і представляє собою стохастичне диференціальне рівняння з необмеженим коефіцієнтом знесення. Це рівняння відрізняється від класичного стохастичного диференціального рівняння [3]. Доведення існування його єдиного розв'язку провадиться методом

мультиплікативних представлень Троттера-Далецького [4]. За цим методом впливає можливість розглядання замість (4) еквівалентного йому інтегрального рівняння Іто

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)B(s, u(s))dw(s) \quad (5)$$

Для дослідження (4) розглянемо наступні об'єкти. Нехай (Ω, F, P) – імовірносний простір. H – дійсний сепарабельний гільбертів простір, F^t – потік σ – підалгебр σ – алгебри F , узгоджений з вінеровським процесом $w(t)$ [3]. Будемо вважати, що коефіцієнт $B(s, x) \in \wp^2(H)$ – функція вимірна по сукупності змінних ($\wp^2(H)$ -простір операторів Гільберта Шмідта)

$x \in H, s \in [0, T]$ задовольняє

$$\sigma^2(B(s, x)) \leq k_1 \|x\|^2 + k_2 \quad (6)$$

$$\sigma^2(B(s, x) - B(s, y)) \leq k_3 \|x - y\|^2 \quad (7)$$

$\sigma^2(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \|B\varphi_j\|^2$ - норма Гільберта-Шмідта,

$\{\varphi_j\}$ – ортонормований базис в H . k_1, k_2, k_3 – довільні сталі. Умови (6),(7), а також (3) стандартні для існування єдиного розв'язку рівняння (5).

Теорема. Нехай коефіцієнти (5) задовольняють умовам (6,7,3). Тоді, існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності F^t вимірний випадковий процес $u(t)$, який з імовірністю 1 має наступні оцінки:

$$M_0 \|u_x(t)\|^2 \leq e^{\beta_1 t} \|x\|^2 + \beta_2 t \quad (8)$$

$$M_0 \|u_x(t) - u_y(t)\|^2 \leq e^{\beta_3 t} \|x - y\|^2 \quad (9)$$

M_0 – умовне математичне сподівання відносно $F^0, x, y \in H, F^0$ - вимірні функції. Існування єдиного розв'язку рівняння не залежить від простору і наведено в [3] у разі виконання відповідних оцінок. Для доведення (8), (9) розглянемо норму в H у вигляді скалярного добутку

$$M_0 \|u_x(t)\|^2 = M_0 (U(t)x + \int_0^t U(t-s)B(s, u_x(s))dw(s), U(t)x + \int_0^t U(t-s)B(s, u_x(s))dw(s))$$

$$M_0 \|u_x(t)\|^2 = \|U(t)x\|^2 + 2(M_0 (U(t)x, \int_0^t U(t-s)B(s, u_x(s))dw(s))) + M_0 \left\| \int_0^t U(t-s)B(s, u_x(s))dw(s) \right\|^2.$$

Скориставшись оцінками стохастичного інтеграла, а також властивостями коефіцієнтів рівняння (6,7) одержимо оцінку

$$M_0 \|u_x(t)\|^2 \leq e^{2\gamma t} \|x\|^2 + \int_0^t e^{\gamma(t-s)} M_0 (k_1 \|u_x(s)\|^2 + k_2) ds e^{t(\gamma+k_1 e^{\gamma t})}$$

скориставшись лемою Гронуола для інтегральних рівнянь отримаємо оцінку

$$M_0 \|u_x(t)\|^2 \leq e^{\beta_1 t} \|x\|^2 + \beta_2 t,$$

де $\beta_1 = 2\gamma + e^{\gamma t} k_1$, $\beta_2 = k_2$

Аналогічно доводиться справедливості нерівності (9).

Користуючись теоремою Чебишева можна знайти імовірність функцією $u(t)$ перевищення певного критичного значення. $P\{\|u(t)\|^2 > K\} \leq \frac{M\|u(t)\|^2}{K^2}$.

Висновок. Запропонована модель визначає середньоквадратичні оцінки збуреного рівняння конвективного теплообміну, а також імовірність відхилень розподілу температури від контрольних або критичних значень.

Література.

1. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. -М.: Изд. Машгиз, 1962.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Изд. Наука 1967.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Изд. Наука, 1977.
4. Белопольская Я.И., Наголкина З.И. О мультипликативных представлениях решений нелинейных стохастических уравнений, сб: Вероятностные распределения в бесконечномерном пространстве. - К.: Наукова думка, 1978.

канд. ф-м. наук, доцент Наголкина З.И.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ПРОЦЕССЫ ТЕПЛООБМЕНА В ТРУБОПРОВОДЕ

Предлагается вероятностная модель влияния турбулентности на процессы конвективного теплообмена. Эта модель представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение с неограниченным оператором сноса и дает возможность найти средние значения температурных распределений.

Ключевые слова: Теплоносители, турбулентный режим, потери тепловой энергии.

Nagolkina Z.,
Kiev National University of building and architecture

PROBABILISTIC MODEL OF THE EFFECT OF TURBULENCE ON THE PROCESSES OF HEAT EXCHANGE IN A PIPELINE.

The proposed probabilistic model of the influence of turbulence on the processes of heat transfer is a stochastic differential equation with an unlimited damping coefficient. It gives the possibility to determine the mean-square estimates of temperature distributions.

Key words. Heat transfers, turbulent regime, thermal energy losses.