DOI: 10.6084/m9.figshare.9783200

УДК 515.2

Ковальов Сергій Миколайович
Доктор технічних наук, професор кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Мостовенко Олександр Володимирович
Кандидат технічних наук, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ВПЛИВ ВІДСТАНЕЙ МІЖ ТОЧКАМИ ІНТЕРПОЛЯНТА ТА ЗАДАНИМИ ТОЧКАМИ НА ЙОГО ФОРМУ

Анотація. *У пропонованому дослідженні виконано параметризацію апарата для визначення коефіцієнтів впливу координат заданих точок на координату поточної точки інтерполянта у загальному випадку, а також розглянуто окремі випадки такого апарату і виконано їх аналіз. Існує багато різних способів інтерполяції точок [1-3]. Деякі задачі інтерполяції точок вимагають врахування впливу параметрів заданих точок на параметри точки, яку визначають. Зокрема, у багатьох задачах цей вплив пов'язано з відстанями поточної точки інтерполяції від заданих точок. Причому цей вплив має бути тим більше, чим ближче задана точка знаходитися до поточної. На точку, нескінченно близьку до заданої точки, ця задана точка повинна впливати максимально, а при нескінченно великій відстан і між заданою і поточною точкою цей вплив має дорівнювати нулю. Прикладом такої практичної задачі може бути: визначення температури в заданому місці температурного поля, яке утворено точковими джерелами нагріву [4-6] або визначення освітленості в заданій точці простору при точкових джерелах світла [7] і т.д.*

Ключові слова: інтерполяція; інтерполянт; задана точка; поточна точка; відстань; вплив; геометричний апарат; коефіцієнт впливу; крива

Постановка проблеми

У статті [8] було запропоновано спосіб інтерполяції точок на площині з урахуванням зменшення їх впливу на положення точки кривої у міру її віддаленості від заданих точок. Було запропоновано апарат для визначення коефіцієнтів t впливу ординат заданих точок на ординату поточної точки інтерполянта. Можливості використання такого апарату пов'язано з числом його вільних параметрів. Тому у цій статті поставлено задачу параметризації такого апарату в загальному випадку і проведення аналізу окремих випадків цього апарату.

Мета статті

Метою статті є виявлення вільних параметрів геометричного апарату для визначення коефіцієнтів впливу відстаней між зазначеними точками на параметри інтерполянта, що у подальшому дасть змогу варіювати форму інтерполянта.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Існує багато публікацій, пов'язаних з інтерполяцією точок, де розглянуто різні типи інтерполяції, кожний з яких відповідає певній сукупності заданих умов. У відомих публікаціях не ставилася задачаврахування впливу параметрів заданих точок на параметри точок інтерполянта в залежності від відстаней між ними. У статті [8] вперше було запропоновано спосіб урахування такого впливу в задачах інтерполяції точок на площині.

Виклад основного матеріалу

Для побудови поверхні, що проходить через задані точки, з урахуванням впливу координат заданих точок на координати точок поверхні, необхідно цей вплив формалізувати і записати аналітично. Цей вплив має бути тим більше, чим ближче точка поверхні до заданої точки, і тим менше, чим більше ця відстань. При цьому дві координати точки поверхні задаються, а третя – визначається з урахуванням впливу відстані від неї до заданих точок.

Мірою такого впливу може бути певний коефіцієнт t, величина якого залежить від цих відстаней. На перший погляд здається, що цей коефіцієнт має бути обернено пропорційним відстані від точки поверхні до заданої точки,але при необмеженому наближенні точки поверхні до заданої точки величина, яка є обернено пропорційною відстані, прямує до нескінченності, що рівнозначно діленню скінченного числа на нуль.

Задамо умову, відповідно до якої вплив координати заданої точки на координату нескінченно близької до заданої точки дорівнює одиниці (або 100%), а вплив заданої точки на нескінченно віддалену дорівнює нулю. При цьому зі збільшенням зазначеної відстані коефіцієнт t впливу повинен монотонно зменшуватися від одиниці до нуля.

Закономірність залежності такого коефіцієнта від відстані можна отримати шляхом перспективної відповідності між двома рядами точок, один з яких відповідає згаданим відстаням $\infty \geq l \geq 0$, а інший – величинам параметра $1 \geq t \geq 0$.

На рис. 1 довільно обрані осі Ox і Oy афінної системи координат і центр відповідності S ($x_S=a$; $y_S=b$). Початок відліку A параметра t визначається при перетині променя $SA||Ox$з віссю Oy. Тоді точка A відповідає нескінченно віддаленій точці осі Ox. Від точки A у додатному напрямі осі Oy відкладається одинична відстань $AB=1$.

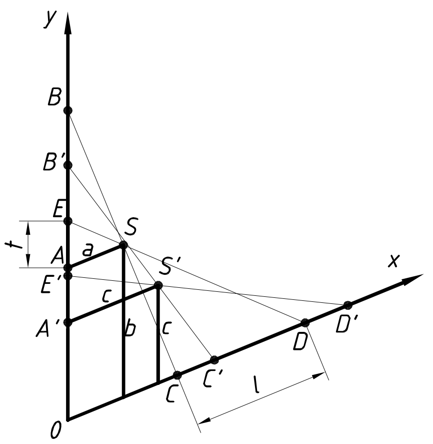

Рисунок 1

Промінь SB перетинає вісь Ox уточці C, яка є початком відліку відстаней від точки поверхні до заданої точки. Тоді при $l=0$ на осі Oy отримуємо точку B, для якої $t=1$; нескінченно великій відстані l відповідає точка $A(t=0)$ при умові $AS||Ox$; довжині $l=CD$ відповідає $t=AE$. З подібності трикутників ABS і OBC маємо:

$$\frac{OC}{AS}=\frac{OB}{AB} \text{ чи } x_C=a(b+1). \qquad (1)$$

Величина параметра t визначається з подібності трикутників AES і OED:

$$\frac{AE}{OE}=\frac{AS}{OD} \text{ чи } t=\frac{ab}{ab+1}. \qquad (2)$$

Рівняння (2) описує гіперболічну залежність між параметрами t і l при заданій величині $a \times b$. При будь-якому положенні центра S на гіперболі (2) співвідношення параметрів t і l не змінюється. Наприклад, при рівних координатах центра $Sx_S=y_S=c$, де $c=\sqrt{ab}$, змінюються положення початків відліків C'і A' відповідно параметрів l і t, а формула (2) набуває вигляду:

$$t=\frac{c^2}{c^2+l}. \qquad (3)$$

У прямокутній декартовій системі координат (рис. 2) вираз (3) є рівнянням рівнобічної гіперболи (4) (рис. 2) з центром в точці T $(x_T=-c^2;\ y_T=0)$ і асимптотами $y=0$ і $x=-c^2$:

$$y=\frac{c^2}{c^2+x}. \qquad (4)$$

Гіпербола (4) проходить через точку $E(x_E=0;\ y_E=1)$.

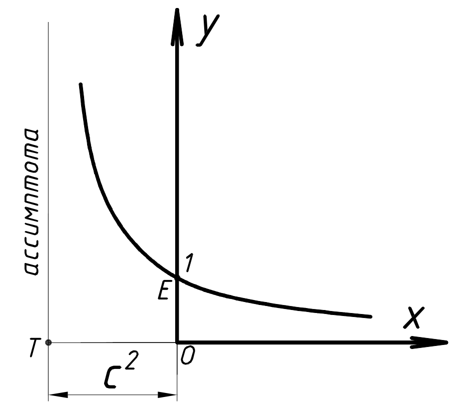

Рисунок 2

Вона має тільки один вільний параметр c, який визначається положенням центраS'перспективної відповідності між рядами t і l на рис. 1.

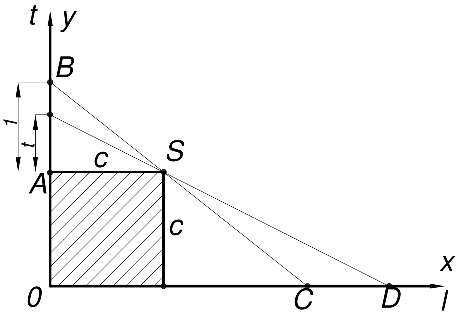

Рисунок 3

Афінним перетворенням схеми, яку показано на рис. 1, можна перетворити її у схему на прямокутній декартовій системі координат (рис. 3). Тоді величина $c^2=s$ є площею квадрата, який на рис. 3 заштриховано.

Якщо призначити межу зміни величини l (CF) (рис. 4), то точка A $(t=0)$ буде відповідати відстані CF (l_{max}), а ряди точок At і Cl можуть бути на паралельних носіях.

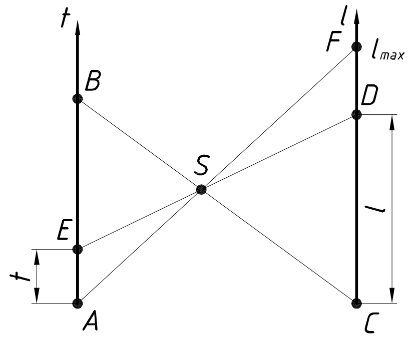

Рисунок 4

Тоді формула (3) набуває вигляду:

$$t = \frac{l_{max} - l}{l_{max}}. \qquad (5)$$

За необхідності збільшення числа вільних параметрів в (3) можна використати складну функцію:

$$t = \frac{l_{max} - f(l)}{l_{max}}, \qquad (6)$$

де *f(l)* може мати будь-яку необхідну кількість вільних параметрів.

Наприклад, за необхідності додавання двох вільних параметрів можна задати:

$$f(l) = a_1 x + a_2 x^2, \qquad (7)$$

що описує параболу другого порядку, яка проходить через точку *C* (рис. 5).

Функція *f(l)* повинна мати відповідні обмеження (рис. 5):

а) крива *f(l)* повинна проходити через початок *C* координатної системи *CxV*. Тільки в цьому випадку параметр *t* може змінюватися в межах $1 \geq t \geq 0$;

b) функція *f(l)* повинна бути монотонно зростаючою при *l>0*. Тільки у цьому випадку параметр *t* буде зменшуватися до нуля зі збільшенням *l*.

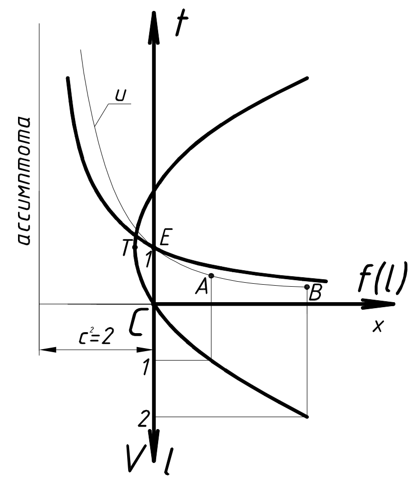

Рисунок 5

Ці обмеження можна записати у вигляді системи нерівностей:

$$x_T = -\frac{a_1}{2a_2} \leq 0 \text{ і } y_T = -\frac{a_1^2}{4a_2} \leq 0,$$

де *T* – вершина параболи.

Для того щоб функція (7) була монотонно зростаючою необхідно, щоб перша похідна функції (7) в точці *C* була додатною, що відповідає додатному куту нахилу дотичної у точці *C*:

$$V' = a_1 + 2a_2 x; \qquad (8)$$
$$\text{при } x = 0 \; a_1 = \operatorname{tg}\alpha,$$

де α – кут нахилу дотичної у точці *C* до осі *Ox*. Тому необхідною умовою є$a_1 > 0$.

За необхідності додавання трьох вільних параметрів можна задати *f(l)* у вигляді кубічної параболи:

$$f(l) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \qquad (9)$$

При цьому для монотонного зростання функції (9) повинні бути забезпечені зазначені обмеження.

Як відомо [9], парабола (9) перетинає вісь *Ox* у трьох точках, дві з яких можуть бути уявними, що забезпечує монотонність функції (9). Точки перетину параболи (9) можна визначити з рівняння (9), якщо *y=0*:

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 = 0, \qquad (10)$$

звідки

$$x_1 = 0;$$
$$x_2 = -\frac{a_2}{2a_3} + \sqrt{\frac{a_2^2}{4a_3} - \frac{a_1}{a_3}}; \qquad (11)$$
$$x_3 = -\frac{a_2}{2a_3} - \sqrt{\frac{a_2^2}{4a_3} - \frac{a_1}{a_3}}.$$

Корені x_2 і x_3 будуть уявними, якщо

$$a_1 > \frac{a_2^2}{4}.$$

Таким чином, умовою можливого використання кубічної параболи (9) є:

$$\frac{a_2^2}{4} < a_1 > 0.$$

Аналогічним чином для збільшення числа вільних параметрів можна використовувати параболи вищих порядків.

Приклад. Задано апарат (рис. 5) визначення залежності між параметром *t* і функцією *f(l)*, де $c^2=2$. Тоді формула (3) набуває вигляду:

$$t = \frac{2}{f(l) + 2}. \qquad (12)$$

Ця залежність аналітично описує рівнобічну гіперболу (рис. 5).

Необхідно, щоб крива *u* пройшла через дві додаткові точки *A* $(l=1;\ t_A=0{,}5)$ і *B* $(l=2;\ t_B=0{,}3)$. Задаємо *f(l)* у вигляді параболи $f(l)=a_1 l + a_2 l^2$. Тоді вираз (12) набуває вигляду:

$$t = \frac{2}{a_1 l + a_2 l^2 + 2}. \quad (13)$$

Умова проходження кривої *u* через точки *A* і *B* записується у вигляді двох рівнянь:

$$0{,}5 = \frac{2}{a_1 + a_2 + 2};$$

$$0{,}3 = \frac{2}{2a_1 + 4a_2 + 2}.$$

Розв'язання цієї системи дає результат:

$$a_1 = 1{,}6667;$$
$$a_2 = 0{,}3333.$$

Крива *u* є алгебраїчною кривою третього порядку і на рис. 5 показана тонкою лінією. Її рівняння має вигляд:

$$t = \frac{2}{1{,}6667 l + 0{,}3333 l^2 + 2}. \quad (14)$$

Висновки

У наведеному дослідженні було виявлено вільні параметри геометричного апарату для визначення коефіцієнтів впливу відстаней між заданими точками і поточними точками на параметри інтерполянта, що у подальшому дасть змогу варіювати форму інтерполянта.

Список літератури

1. *Берг Й. Интерполяция пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лефстрем. – М.: Мир, 1980. – 264 с.*
2. *Аульченко С.М. Построение кривых с помощью параметрических полиномов / С.М. Аульченко, А.Ф. Латыпов, Ю.В. Никуличев // Журнал вычислительной математики и математическойфизики. – 38 (12), 1998.*
3. *Bergren C.A. Do Parabolic Interpolation With Less Memory / C.A. Bergren // Control Engineering 2 2(5), 1975. – P. 44-45.*
4. *Скочко В.І. Спеціальні геометричні моделі процесів, що розвиваються в суцільному середовищі / В.І. Скочко. Дис…к. техн. наук: 05.01.01. – К.: КНУБА, 2012. – 269с.*
5. *Скочко В.І. Підвищення енергоефективності процесу сушіння будівельних виробів на основі його геометричних моделей / В.І. Скочко // Наук.-техн. зб. «Енергозбереження в будівництві та архітектурі». – Вип. 1. – К.: КНУБА, 2011. – С. 126 – 131.*
6. *Болгарова Н.М. Моделювання теплообміну енергоефективної будівлі / Н.М. Болгарова, В.О. Плоский, В.І. Скочко // Енергоефективність в будівництві та архітектурі. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 11. – С. 7 – 21.*
7. *Сергейчук О.В. Геометричне моделювання фізичних процесів при оптимізації форми енергоефективних будинків. Дис…д. техн. наук: 05.01.01. – К.: КНУБА, 2008. 425 с.*
8. *Ковалёв С.Н. Интерполяция точек на плоскости с учётом коэффициентов влияния заданных точек / С.Н. Ковалёв, А.В. Мостовенко // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2018.– Вип. 13. – С. 69-75.*
9. *Ковальов С.М., Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи / С.М. Ковальов, М.С. Гумен, С.І. Пустюльга, В.Є. Михайленко, І.Н. Бурчак. – Луцьк: ЛДТУ, 2006. – Вип. 1. – 256 с.*

Стаття надійшла до редколегії 21.01.2019

Ковалёв Сергей Николаевич
Доктор технических наук, профессор кафедры начертательной геометрии и инженерной графики
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев
Мостовенко Александр Владимирович
Кандидат технических наук, доцент кафедры начертательной геометрии и инженерной графики
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев

ВЛИЯНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ТОЧКАМИ ИНТЕРПОЛЯНТА И ЗАДАННЫМИ ТОЧКАМИ НА ЕГО ФОРМУ

Аннотация. *В данном исследовании выполнена параметризация аппарата для определения коэффициентов влияния координат заданных точек на координату текущей точки интерполянта в общем случае, а также рассмотрены частные случаи такого аппарата и проведен их анализ. Существует множество различных способов интерполяции точек [1-3]. Некоторые задачи интерполяции точек требуют учёта влияния параметров заданных точек на параметры точки, которую определяют. В частности, во многих задачах это влияние связано с расстояниями текущей точки интерполяции от заданных точек. Причём это влияние должно быть тем больше, чем ближе заданная точка находится к текущей. На точку, бесконечно близкую к заданной точке, эта заданная точка должна оказывать максимальное* *влияние, а при бесконечно большом расстоянии между заданной и текущей точкой это влияние должно быть равно нулю. Примером такой практической задачи может быть: определение температуры в заданном месте температурного поля, которое образовано точечными источниками нагрева [4-6] или определение освещенности в заданной точке пространства при точечных источниках света [7] и т.д.*

Ключевые слова: интерполяция; интерполянт; заданная точка; текущая точка; расстояние; влияние; геометрический аппарат; коэффициент влияния; кривая

Kovalev Sergej
DSc, professor of the Department of Descriptive Geometry and Engineering Graphics
Kyiv National University of onstruction and Architecture, Kyiv
Mostovenko Oleksandr
PhD, lecturer of the Department of Descriptive Geometry and Engineering Graphics
Kyiv National University of onstruction and Architecture, Kyiv

EFFECT OF DISTANCES BETWEEN INTERPOLANT POINTS AND SET POINTS ON THE INTERPOLANT FORMS

Abstract. *In this study, the apparatus was parameterized to determine the coefficients of the influence of the coordinates of given points on the coordinate of the interpolant's current point in the general case, and special cases of such an apparatus are considered and analyzed. There are many different ways to interpolate points [1-3]. Some tasks of interpolation of points require taking into account the influence of the parameters of the given points on the parameters of the point that is determined. In particular, in many problems this influence is connected with the distances of the current interpolation point from the given points. Moreover, this influence should be greater, the closer the given point is to the current one. At a point infinitely close to a given point, this given point should have the maximum effect, and for an infinitely large distance between the given point and the current point, this effect should be zero. An example of such a practical task can be: determining the temperature at a given place of the temperature field, which is formed by point sources of heating[4-6] or determining the illumination at a given point in space with point sources of light [7], etc.*

Keywords: interpolation; interpolant; set point; current point; distance; influence; geometric apparatus; influence coefficient; curve

References

1. Berg, J., Lefstrem, Y. (1980). Interpolation of space. Introduction. M.: Mir, 264.

2. Aulchenko, S.M. (1998). Construction of curves using parametric polynomials / S.M. Aulchenko, A.F. Latypov, Yu.V. Nikulichev / Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 38 (12), 1998.

3. Bergren, CA. (1975). Do Parabolic Interpolation With Less Memory. ControlEngineering, 22 (5), 44-45.

4. Skochko, V.I. (2012). Special geometrical models of processes, which are developed in such a medium. Dis ... k. tech. Sciences: 05.01.01. K .: KNUBA, 269.

5. Skochko, V.I. (2011). Energy efficiency of the process of drying of viruses on the basis of new geometric models. Science. tech. Bul. “Energysaving in construction and architecture”, 1, 126–131.

6. Bolgarova, N.M. (2018). Modeling of Heat Transfer of an Energy Efficient Building / N.M. Bolgarova, V.O. Ploskiy, V.I. Skochko / Science. techn. Bul. "Energy efficiency in construction and architecture", 11, 7–21

7. Sergeychuk, O.V. (2008). Geometric modeling of physical processes in optimizing the form of energy-efficient buildings. Dis ... d. techSciences: 05.01.01. K .: KNUBA, 2008. 425.

8. Kovalev, S.N. (2018). Interpolation of points on a plane taking into account coefficients of influence of given points / S.N. Kovalev, A.V. Mostovenko // Modern problems of modeling: Sb. Sciences works. Melitopol: MDPU Publishing House. B. Khmelnitsky, 13, 69-75.

9. Kovalov, S.M., Gumen,, M.S., Pustyulga S.I., Mikhaylenko, V.Ye. (2006). Applied Geometry and Engineering Graphic. Special offers. Lutsk: LDTU, 256.

Посиланнянапублікацію

APA *Kovalev, Sergej & Mostovenko, Oleksandr, (2019). Effects of distances between interpolantpoints and set points on the interpolant. Management of Developmentof Complex Systems, 37, 78 – 82, dx.doi.org\10.6084/m9.figshare.9783200.*

ДСТУ *Ковальов, С.Н. Вплив відстаней між точками інтерполянта та заданими точками на його форму [Текст] / С.Н. Ковалев, А.В. Мостовенко // Управління розвитком складних систем. – 2019. – №37. – С. 78 – 82, dx.doi.org\10.6084/m9.figshare.9783200.*