ISSN 2522-4182

ВУЗЛОВІ РЕАКЦІЇ ТА КОЕФІЦІЄНТИ МАТРИЦІ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА НА ОСНОВІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПОЛІНОМАМИ

Юрій МАКСИМ'ЮК[1], Олексій ШКРИЛЬ[2], Іван МАРТИНЮК[3], Владислав БУЧКО[4]

[1,2,3,4]Київський національний університет будівництва і архітектури
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037
[1] maksymiuk.iuv@knuba.edu.ua, http://orcid.org/0000-0002-5814-6227
[2] shkryl.oo@knuba.edu.ua, http://orcid.org/0000-0003-0851-4754
[3] ivan.martinyuk@gmail.com, http://orcid.org/0000-0001-7957-2068
[4] vlad.buchko.1998@gmail.com, http://orcid.org/ 0000-0002-4668-5469

DOI: 10.32347/2522-4182.9.2021.54-62

Анотація. Дослідження призматичних тіл з постійними вздовж однієї з координат механічними і геометричними параметрами найбільш доцільно проводити на основі напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ). Суть його полягає в поєднанні скінчено елементної дискретизації і розкладенні переміщень в характерному напрямку по системі тригонометричних координатних функцій.

У роботах [8, 15] розроблено варіант напіваналітичного методу скінченних елементів для розрахунку призматичних тіл при використанні як системи координатних функцій рядів Фур'є. Застосування тригонометричних рядів забезпечує максимальну ефективність напіваналітичного методу скінчених елементів, однак, на торцях тіла вдається задовольнити лише граничним умовам, що відповідають спиранню об'єкта на абсолютно жорстку у своїй площині та гнучку діафрагму.

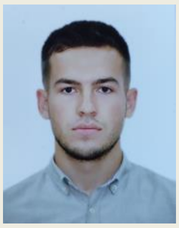
В результаті виконаних досліджень отримані основі уявлення переміщень поліномами, що дозволяє значно розширити коло граничних умов на торцях тіла. У цьому випадку звести рішення вихідної просторової крайової задачі до послідовності двовимірних задач не є можливим, тому особливого значення набуває обґрунтований вибір відповідних поліном. Від їх правильного вибору залежить як обумовленість матриці системи роздільних рівнянь і, отже, збіжність інтеграційних алгоритмів її розв'язання, так і універсальність підходу щодо можливості задоволення різних варіантів граничних умов на торцях тіла.

Крім цього, розглянуте питання про способи інтегрування при обчисленні коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента (СЕ), яке має досить загальне значення, що обумовлено значною трудомісткістю зазначеної процедури.

Юрій МАКСИМ'ЮК
професор кафедри будівельної механіки,
д.т.н., професор

Олексій ШКРИЛЬ
професор кафедри будівельної механіки
д.т.н.

Іван МАРТИНЮК
докторант кафедри будівельної механіки
к.т.н.



Владислав БУЧКО
аспірант кафедри будівельної механіки

Ключові слова. Метод скінчених елементів (МСЕ); напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ); призматичний скінчений елемент (СЕ1); масивні; тонкостінні призматичні тіла; вектор вузлових реакцій; коефіцієнти матриці жорсткості.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Значне число досліджень, пов'язаних з розробкою і застосуванням НМСЕ [5, 6, 10, 12, 14, 16, 17, 20, 21, 22, 24], як правило, використовуються співвідношення тонких оболонок (в [20] враховані деформації поперечного зсуву). Розглянуто різні питання, пов'язані з урахуванням локальних впливів [21], розрахунком розгалужених і складових систем [10, 14, 17, 24], визначенням напружено-деформованого стану ребристих оболонок змінної товщини при термосиловго навантаження [12], орієнтацією підкріплює набору конструктивно-анізотропної оболонки [13]. В [9] запропоновано методику аналізу напружено-деформованого стану циклічно неоднорідних в круговому напрямку оболонок.

У роботах, що відображають застосування напіваналітичного методу скінченних елементів до розрахунку тіл обертання [2,11,18,23,25-27], використані трикутні СЕ з лінійним [2,18,26] і квадратичним [23] розподілом переміщень, прямокутні чотирьохвузлові [25] і чотирикутні криволінійні восьмивузлові [27]. Достовірність отриманих на їх основі результатів підтверджена розв'язанням контрольних прикладів [23, 25,26]. Розв'язані також

конкретні задачі про пружне [11,23,26] і пружно-пластичне [2,27] деформування ряду об'єктів.

Різні аспекти розробки і застосування підходу, заснованого на використанні універсального скінченого елемента, що дозволяє досліджувати в пружній і пружно-пластичній постановці масивні і тонкостінні не вісесиметричні навантажені силовими і температурними впливами тіла обертання, розглянуті в роботах [1,7]. Основні принципи узагальнення даної модифікації НМСЕ на розв'язання задач пружного і пластичного деформування циклічних об'єктів зі змінними по круговій координаті механічними і геометричними параметрами викладені в [3]. Публікації [4,19] присвячені реалізації цих принципів стосовно зазначеного класу об'єктів.

Проведений аналіз літературних джерел показує, що в розглянутих публікаціях не знайшли належного відображення питання, пов'язані із застосуванням напіваналітичного методу скінченних елементів до розрахунку тонкостінних призматичних тіл, в пружно-пластичній, а масивних навіть в пружній постановках. Крім того відсутні публікації з даного напрямку, присвячені розробці універсальних призматичних кінцевих елементів, що дозволяють досліджувати масивні, тонкостінні і комбіновані конструкції.

ВИВЕДЕННЯ ФОРМУЛ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ВУЗЛОВИХ РЕАКЦІЙ ТА КОЕФІЦІЄНТІВ МАТРИЦІ ЖОРСТКОСТІ СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА

Представимо переміщення у вигляді розкладання по поліномах

$$U_{n'} = \sum_{\iota=0}^{L} \bar{U}^{\iota}_{n'} \varphi^{(\iota)} \tag{1}$$

де

$\varphi^{(\iota)}$ - поліноми степені l;

$\bar{U}^{\iota}_{n'}$ - коефіцієнти розкладання переміщень по $\varphi^{(\iota)}$.

Виразимо переміщення через коефіцієнти їх розкладання за поліномами відповідно до (1):

$$
\varepsilon_{\alpha(\alpha)}=\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_{(\alpha)}+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}S_{(\alpha)}+\\+2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_1S_2\end{pmatrix}x^{(3-\alpha)}\right]
$$

$$
\varphi^{(\iota)}\bar{U}^{\iota}_{\gamma'(S_1,S_2)}
$$

$$
\varepsilon_{12}=\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{4}\left(\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,1}S_2+\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,2}S_1\right)\varphi^{(\iota)}\bar{U}^{\iota}_{\gamma'(S_1,S_2)}
$$

$$
\varepsilon_{\alpha3}=\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\left\{\frac{1}{8}\left[\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}+\begin{pmatrix}\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,12}+\\+2\overset{0}{Z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}S_{(3-\alpha)}\end{pmatrix}x^{(3-\alpha)}\right]\cdot\right.
$$

$$
\left.\cdot\varphi^{(\iota)}_{,3}\bar{U}^{\iota}_{\gamma'(S_1,S_2)}+\frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\left(S_\alpha+2S_1S_2x^{(3-\alpha)}\right)\varphi^{(\iota)}\bar{U}^{\iota}_{3'(S_1,S_2)}\right\} \tag{2}
$$

$$
\varepsilon_{33}=\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{\iota=0}^{L}\frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\left(1+2S_\alpha x^{\alpha}\right)\varphi^{(\iota)}_{,3}\bar{U}^{\iota}_{3'(S_1,S_2)}
$$

де

$$
\varphi^{(\iota)}_{,3}=\frac{d\varphi^{(\iota)}}{dx^3} \tag{3}
$$

Виразимо деформації через коефіцієнти розкладання переміщень по поліномах:

$$
\{\varepsilon\}=\sum_{\iota=0}^{L}\left(\left[\bar{B}_1\right]\varphi^{(\iota)}+\left[\bar{B}_2\right]\varphi^{(\iota)}_{,3}\right)\left\{\bar{U}\right\}_{\iota} \tag{4}
$$

$$
\begin{gathered}
\left[\bar{B}_1\right]=\left[\left[\bar{B}_1\right]^{(-1,-1)}\left[\bar{B}_1\right]^{(+1,-1)}\left[\bar{B}_1\right]^{(-1,+1)}\left[\bar{B}_1\right]^{(+1,+1)}\right]\\
\left[\bar{B}_2\right]=\left[\left[\bar{B}_2\right]^{(-1,-1)}\left[\bar{B}_2\right]^{(+1,-1)}\left[\bar{B}_2\right]^{(-1,+1)}\left[\bar{B}_2\right]^{(+1,+1)}\right]
\end{gathered} \tag{5}
$$

Елементи підматриць $\left[\bar{B}_1\right]^{(S_1,S_2)}$ і $\left[\bar{B}_2\right]^{(S_1,S_2)}$ обчислюються згідно (2) та наведені у таблицях 1 та 2. відповідно.

Запишемо вираз варіації енергії через коефіцієнти розкладання переміщень по поліномах і вузлові реакції $\left\{\bar{r}\right\}$ кінцевого елемента:

$$
\delta W=\sum_{\iota=0}^{L}\left(\delta\left\{\bar{U}\right\}^{T}_{\iota}\right)\left\{\bar{r}\right\}_{\iota} \tag{6}
$$

де

$$
\left\{\bar{r}\right\}_{\iota}=\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\left(\left[\bar{B}_1\right]^{T}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\{\sigma\}\varphi^{(\iota)}dx^3+\right.
$$

$$
\left.+\left[\bar{B}_2\right]^{T}\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\{\sigma\}\varphi^{(\iota)}_{,3}dx^3\right)\sqrt{g}\,dx^1dx^2 \tag{7}
$$

Табл. 1.
Tabl. 1.

$$\left[\bar{B}_1\right]^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_1+\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}S_1+2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_1S_2\right)x^2\right] & \frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1+\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}S_1+2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1S_2\right)x^2\right] & 0 \\ \frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_2+\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}S_2+2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1S_2\right)x^1\right] & \frac{1}{2}\left[\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_2+\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}S_2+2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_1S_2\right)x^1\right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_2+\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1\right) & \frac{1}{2}\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_2+\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\left(S_1+2S_1S_2x^2\right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\left(S_2+2S_1S_2x^1\right) \end{bmatrix}$$

Табл. 2.
Tabl. 2.

$$\left[\bar{B}_2\right]^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\overset{0}{Z}{}^{3'}_{,3}\left(1+2S_1x^1+2S_2x^2\right) \\ \frac{1}{4}\left[\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}+\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}+2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,1}S_2\right)x^2\right] & \frac{1}{4}\left[\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}+\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}+2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,1}S_2\right)x^2\right] & 0 \\ \frac{1}{4}\left[\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}+\left(\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,12}+2\overset{0}{Z}{}^{1'}_{,2}S_1\right)x^1\right] & \frac{1}{4}\left[\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}+\left(\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,12}+2\overset{0}{Z}{}^{2'}_{,2}S_1\right)x^1\right] & 0 \end{bmatrix}$$

Інтегруючи по x^3 чисельно, отримуємо формулу для обчислення вузлових реакцій призматичного кінцевого елемента зі змінними у перерізі $x^3=const$ механічними та геометричними параметрами (СЕ1) через напругу:

$$\left\{\bar{r}\right\}_t=\sum_{i=1}^{I}\sum_{I=1}^{I}\left[\begin{pmatrix}\left[\bar{B}_1\right]^T\left\{\bar{\sigma}_1\right\}_t+\\ +\left[\bar{B}_2\right]^T\left\{\bar{\sigma}_2\right\}_t\end{pmatrix}\sqrt{g}H_iH_I\right]_{\left(x_i^1,x_I^2\right)} \tag{8}$$

Виразивши деформації через коефіцієнти розкладання переміщень за поліномами:

$$\left\{\bar{\sigma}_1\right\}_t=\sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\sigma\right\}\varphi^{(t)}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)},$$
$$\left\{\bar{\sigma}_2\right\}_t=\sum_{m=1}^{M}\left(\left\{\sigma\right\}\varphi^{(t)}_{,3}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)} \tag{9}$$

Виразимо деформації через коефіцієнти розкладання переміщень за поліномами:

$$\delta w=\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\sum_{\iota=0}^{L}\left(\delta\left\{\bar{U}\right\}_{\iota}^{T}\right)\cdot$$
$$\left(\left[\bar{B}_1\right]^{T}\varphi^{(\iota)}+\left[\bar{B}_2\right]^{T}\varphi_{,3}^{(\iota)}\right)\cdot \tag{10}$$
$$\cdot\left[D\right]\sum_{n=0}^{L}\left(\left[\bar{B}_1\right]\varphi^{(n)}+\left[\bar{B}_2\right]\varphi_{,3}^{(n)}\right)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3$$

Інтегруючи в (10) по x^3 чисельно, і позначивши:

$$G_1^{\iota n}=\sum_{m=1}^{M}\left(\varphi^{(\iota)}\varphi^{(n)}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)},$$
$$G_2^{\iota n}=\sum_{m=1}^{M}\left(\varphi_{,3}^{(\iota)}\varphi^{(n)}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)},$$
$$G_3^{\iota n}=\sum_{m=1}^{M}\left(\varphi^{(n)}\varphi_{,3}^{(\iota)}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)}, \tag{11}$$
$$G_4^{\iota n}=\sum_{m=1}^{M}\left(\varphi_{,3}^{(\iota)}\varphi_{,3}^{(n)}H_m\right)_{\left(x_m^3\right)}$$

запишемо вираз для варіації енергії деформації у вигляді:

$$\delta W=\sum_{\iota=0}^{L}\left(\delta\left\{\bar{U}\right\}_{\iota}^{T}\right)\left[\bar{K}\right]_{(\iota n)}\left\{\bar{U}\right\}_{n} \tag{12}$$

де

$$\left[\bar{K}\right]_{\iota n}=\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}}\int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}}\left(\left[\bar{B}_1\right]^{T}\left[D\right]\left[\bar{B}_1\right]G_1^{\iota n}+\right.$$
$$+\left[\bar{B}_2\right]^{T}\left[D\right]\left[\bar{B}_1\right]G_2^{\iota n}+\left[\bar{B}_1\right]^{T}\left[D\right]\left[\bar{B}_2\right]G_3^{\iota n}+$$
$$\left.+\left[\bar{B}_2\right]^{T}\left[D\right]\left[\bar{B}_2\right]G_4^{\iota n}\right)\sqrt{g}\,dx^1dx^2$$

Після інтегрування по x^1 і x^2, отримуємо формулу для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості призматичного кінцевого елемента зі змінними в перерізі $x^3=const$ механічними і геометричними параметрами (СЕ1):

$$\left[\bar{K}\right]_{\iota n}=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I}\left[\left(\left[\bar{B}_1\right]^{T}\left[D\right]\left[\bar{B}_1\right]G_1^{\iota n}+\right.\right.$$
$$+\left[\bar{B}_2\right]^{T}\left[D\right]\left[\bar{B}_1\right]G_2^{\iota n}+\left[\bar{B}_1\right]^{T}\left[D\right]\left[\bar{B}_2\right]G_3^{\iota n}+ \tag{13}$$
$$\left.\left.+\left[\bar{B}_2\right]^{T}\left[D\right]\left[\bar{B}_2\right]G_4^{\iota n}\right)\sqrt{g}H_iH_j\right]_{\left(x_i^1,x_j^2\right)}$$

ВИСНОВКИ

Отримані формули для обчислення вузлових реакцій та коефіцієнтів матриці жорсткості дозволяю використовувати для представлення переміщень різні системи координатних функцій, побудовані на основі поліномів. Відмінна особливість цих співвідношень у порівнянні з аналогічними, виведеними при використанні для подання переміщень рядів Фур'є, полягає в тому, що не рівні нулю коефіцієнти не тільки діагональних, але і периферійних підматриць і рішення систем рівнянь, що одержуються на їх основі, прямими методами стає недоцільним. До чинників, визначальних у разі ефективність напіваналітичного методу скінчених елементів, ставляться, насамперед, простота завдання умов закріплення на торцях тіла, і величина обсягу обчислень, обумовлена швидкістю збіжності інтеграційного процесу розв'язання систем рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Баженов В. А.** Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: Монографія / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров – *К. : «Каравела», 2014. – 236 с.*
2. **Бобырь В.И., Ищенко Д.А.** Неосесимметричное деформирование тел вращения при простых процессах нагружения. – *Киев, 1985, 3 с. – Рукопись деп. В ВИНИТИ, 1985, № 5531-85 Деп.*
3. **Гуляр А.И.** Об одном метода расчета пространственных конструкций на основе обобщения полуаналитического варианта МКЭ для замкнутых некруговых конечных элементов. – *Сопротивление материалов и теория сооружений, 1984, вып. 44, с.44-46.*
4. **Гуляр А.И., Топор А.Г.** Пакет программ прочностных расчетов пространственных конструкций «КРУГ». – *Сопротивление материалов и теория сооружений, 1986, вып. 48, с.28-32.*
5. **Гуляр О.** Універсальний призматичний скінчений елемент загального типу для фізично і геометрично нелінійних задач деформування призматичних тіл / О. Гуляр, Ю. Максим'юк, А. Козак, О. Максим'юк *// Зб. наук. праць Будівельні конструкції теорія і практика – 2020. – Вип. 6. – С. 72–84.*
6. **Зенкевич О.К. Морган К.** Конечные элементы и аппроксимация. *– М.: Мир, 1986, – 318 с.*
7. **Исаханов Г.В., Сахаров А.С., Гуляр А.И., Кархалев В.Н.** Развитие полуаналитического метода конечных элементов для решения задачи пластичности неосесимметрично нагруженных тел. – В кн.: Материалы УІ тематической конференции «Практическая реализация численных методов расчета инженерных конструкций». *Л.: Изд-во Ленинград. Дома научн.-техн. пропаганды, 1983, с.12-19.*
8. **Іванченко Г.М.** Побудова розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінченних елементів для призматичних тіл складної форми / Г.М. Іванченко, Ю.В. Максим'юк, А.А. Козак, І.Ю. Мартинюк *// Управління розвитком складних систем: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2021 – Вип.46 – С. 55-62.*
9. **Кантор Б.Я., Гнилько В.И.** Об одном методе изучения напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций вращения циклически неоднородных в окружном направлении. – *Харьков: Изд. АН УССР, Институт проблем машиностроения, 1982, препринт-171, 20 с.*
10. **Кантор Б.Я., Миткевич В.М.** Эффективный метод определения напряженно-деформированного состояния конструкций из оболочек или тел вращения, подкрепленных регулярной системой радиальных пластин при несимметричном радиально-осевом нагружении. – *Харьков, 1985, 15 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, 1985, №2484-85 Деп.*
11. **Кельин В.И., Поляков Ю.Ф.** Сочетание аналитического и численного методов при решении одного класса трехмерных задач теории упругости. – *Ленинград, 1985, 10 с. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, 1985, № 5462-85 Деп.*
12. **Куранов Б.А., Кончаков Н.И.** Температурные напряжения в резервуаре для хранения сжиженного газа. – *Расчеты на прочность, 1980, вып. 21, с.216-224.*
13. **Куранов Б.А., Кончаков Н.И., Игнатьева И.В.** Расчет составных конструктивно-анизотропных оболочек. – *Расчеты на прочность, 1981, вып. 22, с.247-256.*
14. **Куранов Б.А., Кончаков Н.И., Турбаивский А.Т., Бобель Л.В.** Особенности расчета составных тонкостенных конструкций. – *Расчеты на прочность, 1985, вып. 26, с.227-232.*
15. **Максим'юк Ю.** Особливості виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченого елемента з усередненими механічними і геометричними параметрами / Ю. Максим'юк, А. Козак, І. Мартинюк, О. Максим'юк *// Зб.наук. праць Будівельні конструкції теорія і практика. – 2021. – Вип. 8. – С. 97–108.*
16. **Максим'юк Ю.** Розв'язувальні співвідношення моментної схеми скінчених елементів в задачах термов'язкопружнопластичного деформування / Ю. Максим'юк, А. Козак, О. Максим'юк *// Зб. наук. праць Будівельні конструкції теорія і практика – 2019. – Вип. 4. – С. 10–20.*

17. **Миткевич В.М., Медведовская Т.Ф.** Напряженно-деформированное состояние тонкостенных конструкций вращения. – *Проблемы машиностроения, 1976, вып. 2, с.21-26.*
18. **Савченко В.Г.** Об одном методе решения пространственной неосесимметричной задачи термопластичности. – *Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1978, вып. 18, с.24-29.*
19. **Сахаров А.С., Гуляр А.И., Топор А.Г.** Численное решение задач термоупругого равновесия неосесимметрично нагруженных тел вращенния. – *Прикладная механика, 1986, № 6, с.7-13.*
20. **Слезина Н.Г.** Расчет оболочек вращения в условиях неосесимметричного нагружения с учетом деформаций поперечного сдвига. – *Труды ЛКИ, 1977, вып. 116, с.74-81.*
21. **Торопова И.Л.** К расчету упругих тонкостенных конструкций вращения при локальном нагружении. – Прикладные проблемы прочности и пластичности, 1982, вып. 20, с.52-60.
22. **Maksimyuk Yu.V.** Basic relations for physically and geometrically nonlinear problems of deformation of prismatic bodies/ Yu.V. Maksimyuk, S.O. Pyskunov, A.A. Shkril’, O.V. Maksimyuk *// Опір матеріалів і теорія споруд– 2020. – Вип. 104. – С. 255–264.*
23. **Schultchen E., Ulonska H., Wurmnest W.** Statische Berechnung von Rototionskqrpern unter Beliebiger nichtrotations-symmetrischer Belastung mit dem Programmsustem ANTRAS – Rot. – *Techn. Mitt. Krupp. Forsch., 1977, № 2, p.113-126.*
24. **Tanz H. –U., Tuns H.T., Wurmnest W.** Statische Berechnung von Rotationsschalen unter beliebiger nichtrotationssymetrischer Belastung mit dem Programmsystem ANTRAS. – *Tech. Mitt. Krupp. Forsch. BRD. 1978, № 3, s.111-126.*
25. **Weese W.** Berechuug nichtrotatijns symmetrisch belasteter Zylindrischer Korper auf der Yrundlage der Fourierreihendarstellnd nach der Uethode der finite Elemente. – *Wiss. Z. Teehn. Hochsch, 1975, 18, 6-7, s.635-642.*
26. **Wilson E.L**. Structural Analysis of Axi-Symmetric solids. – *TAIAA, 1965, v.3, № 12б p.2269-2274.*
27. **Winnicki L.A., Zienkiewicz O.C.** Plastic (of visco-plastic) behavior of axisymmetric bodies subjected to non-symmetric loading-semi-analytical fical finite element solution. – *Tut. T. Num. Meth. Eng. USA, 1979, v.14, № 9, p.1399-1412.*

REFERENCES

1. **Bazhenov V. A.** Napivanalitychnyi metod skinchennykh elementiv v zadachakh kontynualnoho ruinuvannia prostorovykh til: Monohrafiia / V.A. Bazhenov, O.I. Huliar, S.O. Pyskunov, O.S. Sakharov – *K. : «Karavela», 2014. – 236 s.*
2. **Bobyr V.Y., Yshchenko D.A.** Neosesymmetrychnoe deformyrovanye tel vrashchenyia pry prostыkh protsessakh nahruzhenyia**.** – *Ky-ev, 1985, 3 s. – Rukopys dep. V VYNYTY, 1985, № 5531-85 Dep.*
3. **Huliar A.Y.** Ob odnom metoda rascheta prostranstvennыkh konstruktsyi na osnove obobshchenyia poluanalytycheskoho varyanta МКЭ dlia zamknutykh nekruhovykh konechnыkh elementov. – *Soprotyvlenye materyalov y teoryia sooruzhenyi, 1984, vyp. 44, s.44-46.*
4. **Huliar A.Y., Topor A.H.** Paket prohramm prochnostnыkh raschetov prostranstvennykh konstruktsyi «KRUH». – *Soprotyvlenye materyalov y teoryia sooruzhenyi, 1986, vyp. 48, s.28-32.*
5. **Huliar O.** Universalnyi pryzmatychnyi skinchenyi element zahalnoho typu dlia fizychno i heometrychno neliniinykh zadach deformuvannia pryzmatychnykh til / O. Hu-liar, Yu. Maksymiuk, A. Kozak, O. Maksymiuk // *Zb. nauk. prats Budivelni kons-truktsii teoriia i praktyka – 2020. – Vyp. 6. – S. 72–84.*
6. **Zenkevych O.K. Morhan K.** Konechnye elementyy approksymatsyia. *– M.: Myr, 1986, – 318 s.*
7. **Ysakhanov H.V., Sakharov A.S., Huliar A.Y., Karkhalev V.N.** Razvytye poluanalytycheskoho metoda konechnykh elementov dlia reshenyia zadachy plastychnosty neosesymmetrychno nahruzhennykh tel. – V kn.: Materyaly UI tematycheskoi konferentsyy «Praktycheskaia realyzatsyia chyslennykh metodov rascheta ynzhenernykh konstruktsyi». *L.: Yzd-vo Lenynhrad. Doma nauchn.-tekhn. propahandy, 1983, s.12-19.*
8. **Ivanchenko H.M.** Pobudova rozviazuvalnykh rivnian napivanalitychnoho metodu skinchennykh elementiv dlia pryzmatychnykh til skladnoi formy / H.M. Ivanchenko, Yu.V. Maksymiuk, A.A. Kozak, I.Iu. Martyniuk *// Upravlinnia rozvytkom skladnykh system: Nauk.-tekhn. zbirn. – K.: KNUBA, 2021 – Vyp.46 – S. 55-62.*

9. **Kantor B.Ia., Hnylko V.Y.** Ob odnom metode yzuchenyia napriazhenno-deformyrovannoho sostoianyia tonkostennykh konstruktsyi vrashchenyia tsyklychesky neodnorodnykh v okruzhnom napravlenyy. – Kharkov: *Yzd. AN USSR, Ynstytut problem mashynostroenyia, 1982, preprynt-171, 20 s.*

10. **Kantor B.Ia., Mytkevych V.M.** Эffek-tyvnыi metod opredelenyia napriazhenno-deformyrovannoho sostoianyia konstruktsyi iz obolochek ili tel vrashchenyia, pod-kreplennykh rehuliarnoi systemoi radyalnykh plastyn pry nesymmetrychnom radyalno-osevom nahruzhenyy. *– Kharkov, 1985, 15 s. – Rukopys dep. v VYNYTY, 1985, №2484-85 Dep.*

11. **Kelyn V.Y., Poliakov Yu.F.** Sochetanye analytycheskoho y chyslennoho metodov pry reshenyy odnoho klassa trekh-ernykh zadach teoryy upruhosty. *– Lenynhrad, 1985, 10 s. – Rukopys dep. v VYNY-TY, 1985, № 5462-85 Dep.*

12. **Kuranov B.A., Konchakov N.Y.** Tem-peraturnыe napriazhenyia v rezervuare dlia khranenyia szhyzhennoho haza. – *Raschety na prochnost, 1980, vыp. 21, s.216-224.*

13. **Kuranov B.A., Konchakov N.Y., Yhnateva Y.V.** Raschet sostavnykh konstruktyvno-anyzotropnykh obolochek. – *Raschety na prochnost, 1981, vыp. 22, s.247-256.*

14. **Kuranov B.A., Konchakov N.Y., Tur-bayvskyi A.T., Bobel L.V.** Osobennosty rascheta sostavnykh tonkostennykh kons-truktsyi. – *Raschety na prochnost, 1985, vыp. 26, s.227-232.*

15. **Maksymiuk Yu.** Osoblyvosti vyvedennia formul dlia obchyslennia vuzlovykh reaktsii i koefitsiientiv matrytsi zhorstkosti skinchenoho elementa z userednenymy mekhanichnymy i heometrychnymy parametramy /Yu. Maksy-miuk, A. Kozak, I. Martyniuk, O. Maksymiuk *// Zb.nauk. prats Budivelni konstruktsii teoriia i praktyka. – 2021. – Vyp. 8. – S. 97–108.*

16. **Maksymiuk Yu.** Rozviazuvalni spiv-vidnoshennia momentnoi skhemy skinchenykh elementiv v zadachakh termoviazkopruzhno-plastychnoho deformuvannia / Yu. Maksymiuk, A. Kozak, O. Mak-symiuk *// Zb. nauk. prats Budivelni kons-truktsii teoriia i praktyka – 2019. – Vyp. 4. – S. 10–20.*

17. **Mytkevych V.M., Medvedovskaia T.F.** Napriazhenno-deformyrovannoe sostoianye tonkostennыkh konstruktsyi vrashchenyia. – *Problemy mashynostroenyia, 1976, vыp. 2, s.21-26.*

18. **Savchenko V.H.** Ob odnom metode reshenyia prostranstvennoi neosesymmetry-chnoi zadachy termoplastychnosty. – *Teplovye napriazhenyia v elementakh konstruktsyi, 1978, vыp. 18, s.24-29.*

19. **Sakharov A.S., Huliar A.Y., Topor A.H.** Chyslennoe reshenye zadach termoup-ruhoho ravnovesyia neosesymmetrychno na-hruzhennykh tel vrashchennyia. – *Prykladnaia mekhanyka, 1986, № 6, s.7-13.*

20. **Slezyna N.H.** Raschet obolochek vra-shchenyia v uslovyiakh neosesymmetrychnoho nahru-zhenyia s uchetom deformatsyi pope-rechnoho sdvyha. *– Trudy LKY, 1977, vyp. 116, s.74-81.*

21. **Toropova Y.L.** K raschetu upruhykh tonkostennыkh konstruktsyi vrashchenyia pry lokalnom nahruzhenyy. – *Prykladnye problemy prochnosty y plastychnosty, 1982, vыp. 20, s.52-60.*

22. **Maksimyuk Yu.V.** Basic relations for physically and geometrically nonlinear problems of deformation of prismatic bodies / Yu.V. Maksimyuk, S.O. Pyskunov, AA Shkril ', O.V. *Maksimyuk // Resistance of materials and theory of constructions - 2020. - Issue. 104. - P. 255–264.*

23. **Schultchen E., Ulonska H., Wurmnest W.** Statistic calculation of rotational beacons under beliebiger non-rotational symmetrical loading with the ANTRAS program system - Rot. - *Techn. Mitt. Krupp. Forsch., 1977, № 2, pp.113-126.*

24. **Tanz H. –U., Tuns H.T., Wurmnest W.** Statische Berechnung von Rotationsschalen unter beliebiger nichtrotationssymetrischer Belastung mit dem Programmsystem ANTRAS. *– Tech. Mitt. Krupp. Forsch. BRD. 1978, № 3, s.111-126.*

25. **Weese W.** Berechuug nichtrotatijns symmetrisch belasteter Zylindrischer Korper auf der Yrundlage der Fourierreihendarstellnd nach der Uethode der finite Elemente. – *Wiss. Z. Teehn. Hochsch, 1975, 18, 6-7, s.635-642.*

26. **Wilson E.L**. Structural Analysis of Axi-Symmetric solids. – *TAIAA, 1965, v.3, № 12б p.2269-2274.*

27. **Winnicki L.A., Zienkiewicz O.C.** Plastic (of visco-plastic) behavior of axisymmetric bodies subjected to non-symmetric loading-semi-analytical fical finite element solution. *– Tut. T. Num. Meth. Eng. USA, 1979, v.14, № 9, p.1399-1412.*

NODAL REACTIONS AND COEFFICIENTS OF THE STIFFNESS MATRIX OF A FINITE ELEMENT BASED ON THE REPRESENTATION OF DISPLACEMENTS BY POLYNOMIALS

Yurii MAKSYMIUK,
Oleksii SHKRYL,
Ivan MARTYNIUK,
Vladyslav BUCHKO

Abstract. The study of prismatic bodies with constants along one of the coordinates of mechanical and geometric parameters is most appropriate to conduct on the basis of the semi-analytical finite element method (NMSE). Its essence is a combination of finite element sampling and decomposition of displacements in the characteristic direction by a system of trigonometric coordinate functions.

In [8, 15], a variant of the semivanalytic finite element method for the calculation of prismatic bodies when used as a system of coordinate functions of Fourier series was developed. The use of trigonometric series provides maximum efficiency of the semi-analytical finite element method, however, only the boundary conditions corresponding to the object's support on an absolutely rigid in its plane and flexible diaphragm can be satisfied at the ends of the body.

As a result of the performed researches, the basis of the representation of displacements by polynomials is obtained, which allows to significantly expand the range of boundary conditions at the ends of the body. In this case, it is not possible to reduce the solution of the initial spatial boundary value problem to a sequence of two-dimensional problems, so a reasonable choice of appropriate polynomials becomes especially important.

Both the conditionality of the matrix of the system of separate equations and, consequently, the convergence of integration algorithms for its solution, and the universality of the approach to the possibility of satisfying different variants of boundary conditions at the ends of the body depend on their correct choice.

In addition, the question of methods of integration in the calculation of the coefficients of the stiffness matrix of a finite element (CE), which is quite common, due to the significant complexity of this procedure.

Keywords. Finite element method (FEM); semi-analytic finite element method (SFEM),; prismatic finite element (CE1; massive; thin-walled prismatic bodies; vector of nodal reactions, stiffness matrix coefficients.

Стаття надійшла до редакції 28.10.21