

АРІТЕКТУРА БУДІВЕЛЬ І СПОРУД

УДК 514.18

Н. М. Аушева,

к.т.н., доцент

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Україна

МОДЕЛЮВАННЯ СІТОК З НАПРЯМНИМИ ІЗОТРОПНИМИ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИМИ КРИВИМИ

У роботі досліджується побудова плоских сіток на основі дробово-раціональних кривих нульової довжини. Знайдені умови для формування плоскої ізотропної кривої та ізотропної сітки на площині. Доведено, що сітка буде ортогональною та ізотермічною.

Ключові слова: дробово-раціональні криві, уявні довжини, ізотропні довжини, параметричні ізотропні криві, характеристичний багатокутник, ізотропні сітки.

Постановка проблеми. При моделюванні поверхонь дуже часто виникає необхідність корегування форми без зміни точкового каркасу. В цьому випадку доцільно будувати поверхні на основі дробово-раціональних кривих [1]. Для конструювання поверхонь за заданими диференціальними властивостями зручно застосовувати апарат ізотропних об'єктів [2], який дозволяє будувати ортогональні та ізотермічні сітки на площині. Тому актуальним питанням є розробка способу конструювання ізотропних дробово-раціональних кривих та на їх базі конструювання плоских сіток.

Аналіз останніх досліджень. Дисертацію [3] присвячено конструюванню і перетворенню поверхонь із збереженням ортогональних сіток координатних ліній та ліній кривини. Автором роботи [4] пропонується використовувати ізотропні криві для моделювання алгебраїчних мінімальних поверхонь. Знайдені параметричні рівняння просторових кривих нульової довжини та побудовані відповідні мінімальні поверхні. У роботах [5-7] проводиться дослідження побудови мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих Без'є.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Метою даної роботи є розробка способу моделювання сіток на основі дробово-раціональних кривих нульової довжини.

Основна частина. Нехай дробово-раціональна крива n -го порядку (рис.1) задана у вигляді:

$$r(t) = \frac{\sum_{j=0}^n r_j w_j J_{n,j}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j J_{n,j}(t)}, \quad \text{де } J_{n,j}(t) = \frac{n!}{j!(n-j)!} t^j (1-t)^{n-j}, \quad r_j = [x_j \quad y_j] \quad (1)$$

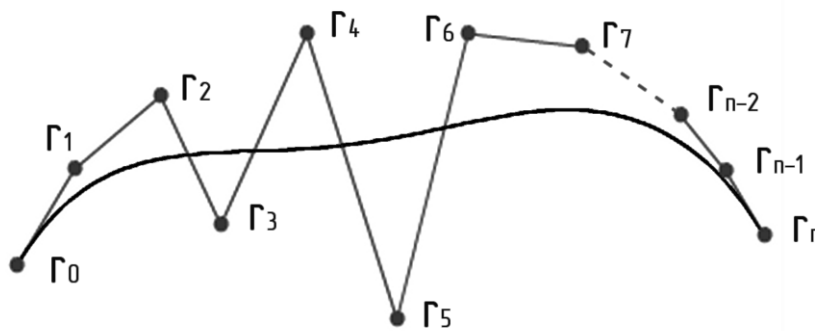


Рис.1 Дробово-раціональна крива n -го порядку

Будемо будувати дробово-раціональну криву на основі ізотропних сторін характеристичного багатокутника, тобто:

$$\begin{cases} (x_{j+1} - x_j) = I(y_{j+1} - y_j), \\ (x_0 - x_n) = I(y_0 - y_n) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (x_{j+1} - x_j) = -I(y_{j+1} - y_j), \\ (x_0 - x_n) = -I(y_0 - y_n) \end{cases} \quad (2)$$

де $j = 0..(n-1)$.

Якщо змінити знак на протилежний перед комплексною змінною у системі - це призводить до невиконання умови ізотропності довжини кривої.

Підставимо умову (2) у вираз (1) та одержимо рівняння на основі ізотропних сторін багатокутника:

$$x(t) = \frac{\sum_{j=0}^n x_j w_j J_{n,j}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j J_{n,j}(t)}, \quad y(t) = y_0 + \frac{I \sum_{j=1}^n (x_j - x_0) w_j J_{n,j}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j J_{n,j}(t)}. \quad (3)$$

Сформулюємо твердження.

Твердження 1. Плоска дробово-раціональна крива буде ізотропною, якщо будуть ізотропними сторони характеристичного багатокутника незалежно від значення ваги точок.

Доведення. Введемо заміни у рівнянні (3):

$$u_x = \sum_{j=0}^n x_j w_j J_{n,j}(t), \quad u_y = I \sum_{j=1}^n (x_j - x_0) w_j J_{n,j}(t), \quad v = \sum_{j=0}^n w_j J_{n,j}(t).$$

Підставимо данні значення у (3) та візьмемо похідні:

$$x'(t) = \left(\frac{u_x}{v} \right)' = \frac{u'_x v - v' u_x}{v^2}, \quad y'(t) = \left(y_0 + \frac{u_y}{v} \right)' = \frac{u'_y v - v' u_y}{v^2},$$

де $u'_x = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (r_{j+1} - r_j) \cdot J_{n-1,j}(t)$, $v' = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (w_{j+1} - w_j) \cdot J_{n-1,j}(t)$,

$$u'_y = I \left[n(x_1 w_1 (1-t)^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} w_{j+1} - x_j w_j) \cdot J_{n-1,j}(t)) - \right. \\ \left. - x_0 n \sum_{j=1}^{n-1} (w_{j+1} - w_j) \cdot J_{n-1,j}(t) \right],$$

$$J_{n-1,j}(t) = \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} t^j (1-t)^{n-1-j}$$

Порівняємо у виразах (4) $u'_x v - v' u_x$ та $u'_y v - v' u_y$. Для цього позначимо:

$$A = \sum_{j=1}^n x_j w_j J_{n,j}(t), \quad B = n(x_1 w_1 (1-t)^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} w_{j+1} - x_j w_j) \cdot J_{n-1,j}(t)), \\ C = \sum_{j=1}^n w_j J_{n,j}(t), \quad D = n(w_1 (1-t)^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (w_{j+1} - w_j) \cdot J_{n-1,j}(t)), \quad (5)$$

$$\text{де } J_{n,j}(t) = \frac{n!}{j!(n-j)!} t^j (1-t)^{n-j}, \quad J_{n-1,j}(t) = \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} t^j (1-t)^{n-1-j}.$$

Підставимо (5) у $u'_x v - v' u_x$ та $u'_y v - v' u_y$. Будемо мати:

$$u'_x v - v' u_x = B(w_0 (1-t)^n + C) - A(-n w_0 (1-t)^{n-1} + D) - x_0 w_0 (1-t)^{n-1} (nC + \\ + (1-t)D),$$

$$u'_y v - v' u_y = I \{ B(w_0 (1-t)^n + C) - A(-n w_0 (1-t)^{n-1} + D) - x_0 w_0 (1-t)^{n-1} (nC + \\ + (1-t)D) \}.$$

Тобто одержимо залежність: $y'(t) = I x'(t)$. Якщо підставити ці залежності у вираз для довжини кривої одержимо нуль. Тобто довжина кривої буде дорівнювати нулю. Отже твердження доведено.

Твердження 2. Якщо плоска ізотропна дробово-раціональна крива побудована на основі ізотропних сторін характеристичного багатокутника, тоді і кривина такої кривої буде дорівнювати 0.

Доведення. Двічі диференційована крива, яка має довільну параметризацію, має в кожній точці кривизну, яка обчислюється для плоскої кривої за формулою:

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

Підставимо $y'(t) = Ix'(t)$ у (6):

$$k(t) = \frac{x'(t)Ix''(t) - Ix'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = 0.$$

Твердження доведено.

Побудуємо плоску сітку на основі кубічної дробово-раціональної плоскої кривої, тобто підставимо у рівняння (3) $n=3$ та виконаємо конформну підстановку $t = u + Iv$:

$$x(u + Iv) = \frac{\sum_{j=0}^3 x_j w_j J_{n,j}(u + Iv)}{\sum_{j=0}^3 w_j J_{n,j}(u + Iv)}, \quad (7)$$

$$J_{3,j}(u + Iv) = \frac{3!}{j!(3-j)!} (u + Iv)^j (1 - u - Iv)^{3-j},$$

$$y(u + Iv) = y_0 + \frac{I \sum_{j=1}^3 (x_j - x_0) w_j J_{n,j}(u + Iv)}{\sum_{j=0}^3 w_j J_{n,j}(u + Iv)}.$$

Якщо відокремити дійсну частину від уявної та відобразити на площині то одержимо дві сітки. Проаналізуємо дійсну сітку. Для цього введемо заміни у рівнянні (7):

$$x(u, v) = \frac{x_{\text{Re}}(u, v) + Ix_{\text{Im}}(u, v)}{w_{\text{Re}}(u, v) + Iw_{\text{Im}}(u, v)}, \quad y(u, v) = y_0 + \frac{y_{\text{Re}}(u, v) + Iy_{\text{Im}}(u, v)}{w_{\text{Re}}(u, v) + Iw_{\text{Im}}(u, v)}. \quad (8)$$

Відокремимо дійсну частину:

$$x(u, v)_{\text{Re}} = \frac{x_{\text{Re}}(u, v)w_{\text{Re}}(u, v) + x_{\text{Im}}(u, v)w_{\text{Im}}(u, v)}{w_{\text{Re}}(u, v)^2 + w_{\text{Im}}(u, v)^2}, \quad (9)$$

$$y(u, v)_{\text{Re}} = y_0 + \frac{y_{\text{Re}}(u, v)w_{\text{Re}}(u, v) + y_{\text{Im}}(u, v)w_{\text{Im}}(u, v)}{w_{\text{Re}}(u, v)^2 + w_{\text{Im}}(u, v)^2}.$$

Для того щоб одержати часткові похідні від виразів (9) знайдемо часткові похідні від $x_{\text{Re}}(u, v)$, $y_{\text{Re}}(u, v)$, $w_{\text{Re}}(u, v)$, $x_{\text{Im}}(u, v)$, $y_{\text{Im}}(u, v)$, $w_{\text{Im}}(u, v)$, та одержимо наступні співвідношення:

$$x_{\text{Re}u}(u, v) = x_{\text{Im}v}(u, v), \quad x_{\text{Re}v}(u, v) = -x_{\text{Im}u}(u, v), \quad (10)$$

$$y_{\text{Re}u}(u, v) = y_{\text{Im}v}(u, v), \quad y_{\text{Re}v}(u, v) = -y_{\text{Im}u}(u, v),$$

$$w_{\text{Re}u}(u, v) = w_{\text{Im}v}(u, v), \quad w_{\text{Re}v}(u, v) = -w_{\text{Im}u}(u, v).$$

Застосовуючи вирази (10) одержимо:

$$x_v(u, v) = y_u(u, v), \quad x_u(u, v) = -y_v(u, v) \quad (11)$$

Тобто одержимо ортогональну та ізотермічну сітку. Аналогічні обчислення можна виконати для квазіконформних підстановок.

Приклад. Побудуємо сітку на основі ізотропної дробово-раціональної кривої 3-го порядку, якщо задані наступні значення $x_0 = 0$, $x_1 = 2 + 6i$, $x_2 = 6 + 5i$, $x_{3\text{Re}} = 8 - i$, $y_0 = 3 - 8i$. Невідомі точки будемо знаходити на основі виразу (2). Одержимо: $y_1 = -3 - 6i$, $y_2 = -2 - 2i$, $y_3 = 4$. Задамо ваги точок: $w_0 = 1$, $w_1 = 4$, $w_2 = 4$, $w_3 = 1$. Побудована сітка відображена на рис. 2. На рис. 3 зображені графіки функцій F , $E=G$. З рисунку видно, що $F = 0$, тобто сітка є ортогональною, а графіки E та G співпадають, тобто сітка ізотермічна. На рис. 4. зображені сітки при інших значеннях ваги.

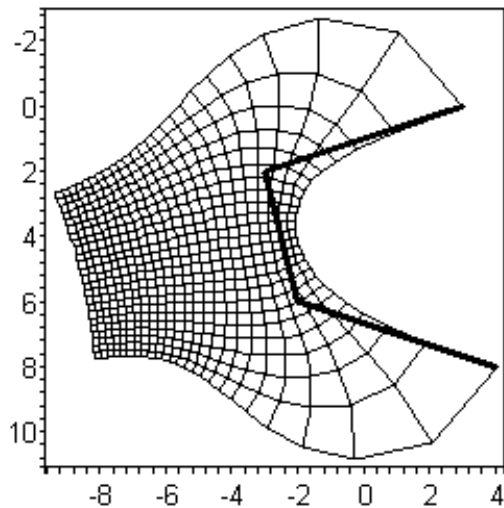


Рис.2. Дійсна частина плоскої сітки при завданні $t = u + Iv$ на основі ізотропної дробово-раціональної кривої 3-го порядку

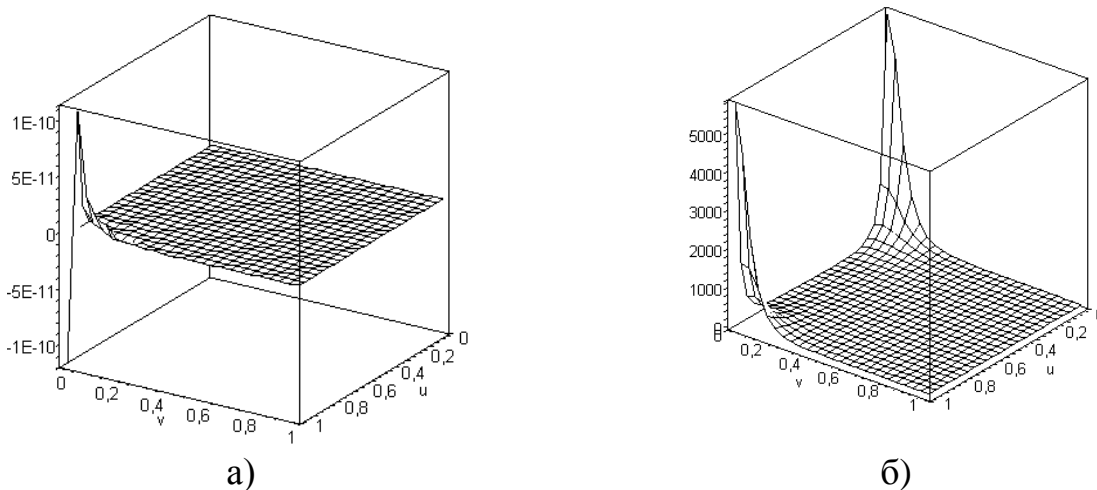


Рис.3. Графіки функцій а) графік функції F , б) графіки функцій E та G

Висновки. Дослідження показали, що при моделюванні дробово-раціональної плоскої кривої на основі ізотропного багатокутника будь-які значення ваги точок будуть визначати криву нульової довжини з нульовою кривиною. Одержані ізотропні плоскі сітки, які є ортогональними та ізотермічними. Подальші дослідження пов'язані з конструюванням поверхонь на основі ізотропних кривих.

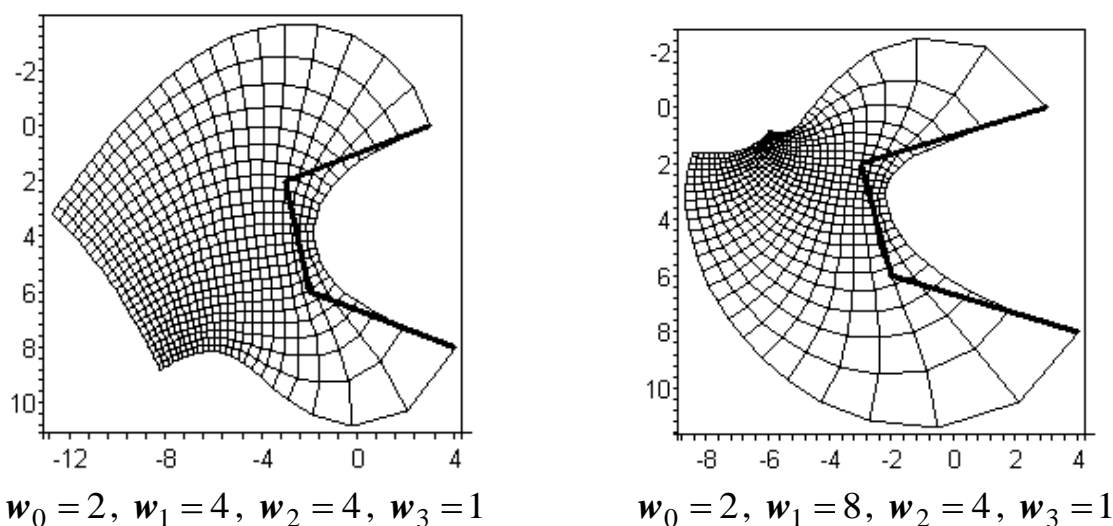


Рис.4. Дійсні частини плоскої сітки при завданні $t = u + Iv$ на основі ізотропної дробово-раціональної кривої 3-го порядку

Література:

1. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт.- М.: Мир, 1982.- 304 с.
2. Аушева Н.М. Ізотропні дробово-раціональні криві третього порядку / Н. М. Аушева, Г.А. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет - Вип. 4, т.53.- Мелітополь: ТДАТУ, 2012. - С.3-6.
3. Дзюба В.В. Конструювання і перетворення поверхонь із збереженням ліній кривини: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 „Прикладна геометрія, інженерна графіка” / В.В. Дзюба. - К.: КНУБА, 2008.- 21 с.
4. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна / В. Бляшке. - Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935.- 330 с.
5. Аушева Н. М. Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без'є / Н. М. Аушева // Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”.-Вип.88.-К.:КНУБА, 2011р.- С.57-61.

6. Аушева Н.М. Визначення сім'ї мінімальних поверхонь з напрямною кривою Без`є на базі процесора SIMD-архітектури / Н. М. Аушева, А. А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. - Вип.4, т.57.- Мелітополь: ТДАТУ, 2013. - С.10-16.

7. Аушева Н. М. Згинання мінімальних поверхонь в комплексному просторі деформацією напрямної кривої Без`є / Н.М. Аушева, А. А. Демчишин // Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”.-Вип.90.-К.:КНУБА, 2012р.- С.15-19.

Аннотация

В работе исследуется построение плоских сеток на основе дробно-рациональных кривых нулевой длины. Найдены условия для формирования плоской изотропной кривой и изотропной сетки на плоскости. Доказано, что сетка будет ортогональной и изотермичной.

Ключевые слова: дробно-рациональные кривые, мнимые длины, изотропные длины, параметрические изотропные кривые, характеристический многоугольник, изотропные сетки.

Annotation

The paper examines constructing of plane grids based on the fractional-rational curves of zero length. The conditions for the plane isotropic curve and isotropic grid on the plane were found. In this case, it is proved, that the grid is orthogonal and isothermal.

Key words: fractional-rational curves, imaginary length, isotropic length, parametric isotropic curves, characteristic polygon, isotropic grids.

УДК 728

А. В. Ануфрієнко

архітектор, аспірант КиївЗНДІЕП

АРХІТЕКТУРНЕ ФОРМУВАННЯ МАСОВОГО ЖИТЛА НА СУЧАСНОМУ ЕТАПІ (НА ПРИКЛАДІ ДОНЕЦЬКОГО РЕГІОНУ)

Анотація: у статті розглядаються питання формування масового житла на сучасному етапі, надання житла черговикам, шляхи розвитку іпотечного житлового кредитування. Проаналізовано також досвід інших країн у будівництві та наданні соціального житла. На підставі аналізу, проведеного