

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**



АУШЕВА НАТАЛІЯ МИКОЛАЇВНА

УДК 514.18

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ
ДІЙСНОГО ПРОСТОРУ НА ОСНОВІ ІЗОТРОПНИХ
ХАРАКТЕРИСТИК**

05.01.01 – прикладна геометрія, інженерна графіка

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Київ – 2014

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут» Міністерства освіти та науки України

Науковий консультант доктор технічних наук, професор
БАДАЄВ Юрій Іванович,
Київська державна академія водного транспорту
ім. гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного (м. Київ),
завідувач кафедри інформаційних технологій

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
ПИЛИПАКА Сергій Федорович,
Національний університет біоресурсів
і природокористування України (м. Київ), завідувач
кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та
дизайну;

доктор технічних наук, професор
КОРЧИНСЬКИЙ Володимир Михайлович,
Дніпропетровський національний університет
імені Олеся Гончара (м. Дніпропетровськ), завідувач
кафедри електронних засобів телекомунікацій,

доктор технічних наук, професор
ШОМАН Ольга Вікторівна,
Національний технічний університет «Харківський
політехнічний інститут» (м. Харків), завідувач кафедри
геометричного моделювання та комп'ютерної графіки

Захист відбудеться «01» жовтня 2014 р. о 13 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.056.06 у Київському національному університеті будівництва і архітектури за адресою: 03680, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31, КНУБА, зала Вченої ради університету, ауд. 466.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Київського національного університету будівництва і архітектури за адресою: 03680, м. Київ, Повітрофлотський проспект, 31, КНУБА.

Автореферат розіслано «28» серпня 2014 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради

О. А. Бондар

Підписано до друку 03.07.2014 р. Формат 60x90/16.
Ум. друк. арк. 1,9. Обл.-вид. арк. 1,9.
Тираж 100. Зам. 57.

«Видавництво “Науковий світ”»[®]
Свідоцтво ДК № 249 від 16.11.2000 р.
м. Київ, вул. Боженка, 23, оф. 414.
200-87-15, 050-525-88-77
E-mail: nsvit@mail.ru
Сайт: nsvit.cc.ua

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Сутність наукової проблеми. В багатьох розділах геометрії часто звертаються до розгляду уявних об'єктів, які забезпечують більшу загальність та одноманітність опису прикладної області. В цьому випадку, як правило, застосовують комплексні числа. Для розширення поняття уявних об'єктів можна скористатися гіперкомплексними числами, а саме кватерніонами. Важливу підгрупу уявних об'єктів складають ізотропні, які мають у своїх елементах характеристики нульової довжини. Доцільно розширити вплив таких характеристик на формоутворення об'єктів дійсного простору. Тому виникла *науково-прикладна проблема – розробити та формалізувати основи моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик, які дозволяють будувати об'єкти дійсного простору з наперед заданими диференціальними та метричними властивостями.*

Сучасний стан проблеми. В останні роки розвивається напрям досліджень у галузі ізотропної геометрії, але ці дослідження пов'язані з формоутворенням об'єктів у комплексному евклідовому просторі чи у просторі Мінковського. Дослідження стосовно моделювання в дійсному просторі на основі ізотропних характеристик – несистемні й, головне, не мають узагальненого підходу щодо формоутворення таких об'єктів.

Значимість проблеми. Створення теоретичних основ моделювання геометричних об'єктів на основі застосування ізотропних характеристик як цілісного напрямку в прикладній геометрії визначає подальший розвиток як в теоретичних дослідженнях, так і у вирішенні практичних завдань. З одного боку відкриваються нові можливості щодо керування геометричними об'єктами з уявного простору без змін дійсних характеристик, можливість наочного відстеження зміни характеристик об'єктів, створення об'єктів за заданими диференціальними властивостями. З другого боку – пошук підходів та створення геометричних моделей об'єктів, процесів та систем в середовищах комп'ютерної графіки для розв'язання прикладних завдань. Цим напрямом сприяє зростання обчислювальних та графічних можливостей сучасної комп'ютерної техніки, засобів аналізу та проектування. Таким чином, відкриваються нові можливості щодо керування плоскими сітками та сітками на поверхнях за рахунок застосування ізотропних кривих, побудованих на основі характеристичних багатокутників.

Актуальність теми. Розробка теоретичних основ моделювання геометричних об'єктів на основі застосування ізотропних характеристик потребує вирішення низки питань теоретичного і практичного характеру, які складають актуальність досліджень. Насамперед, це узагальнення підходу щодо вибору нульових характеристик та алгебр з уявними одиницями.

Сутність моделювання об'єктів дійсного простору проявляється через адаптацію сучасних методів моделювання до застосування ізотропних характеристик та дослідження впливу на властивості об'єктів, основна увага приділяється моделюванню кривих та поверхонь. Тому актуальними є: дослідження зі створення ізотропних плоских та просторових кривих, плоских сіток на основі ізотропних

кривих, поверхонь на основі ізотропних сіток, виявлення властивостей та закономірностей моделювання об'єктів, пошук характерних умов їх завдання. Також вкрай вагомою є проблема візуалізації одержаних об'єктів і створення можливості інтерактивного керування формою в режимі користувача.

Таким чином, *розв'язання поставленої в дисертаційній роботі проблеми, пов'язаної із застосуванням ізотропних характеристик у галузі моделювання об'єктів дійсного простору, є актуальним як у теоретичному напрямі – розширення методів побудови об'єктів дійсного простору за рахунок застосування нульових характеристик, так і в практичному – використання створених моделей із визначеними диференціальними характеристиками для конструювання геометричних форм різного промислового призначення.*

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у Національному технічному університеті України «КПІ» згідно з планом науково-дослідних робіт кафедри автоматизації проектування енергетичних процесів і систем, а також у рамках науково-дослідних робіт «Розробка процесу лазерно-дугового наплавлення та автоматизованої системи визначення його технологічних параметрів» (номер державної реєстрації 0108U000614), «Автоматизація моніторингу геологічного середовища в зоні впливу споруд АЕС» (номер державної реєстрації 0113U01696).

Напрямок дослідження – методи моделювання ізотропних об'єктів.

Метою досліджень є створення теоретичних основ моделювання геометричних об'єктів на основі застосування ізотропних характеристик.

Для досягнення мети розв'язуються такі **основні завдання**:

1. Виконати системний аналіз методів, які існують для моделювання об'єктів на основі ізотропних характеристик та їх застосування для моделювання дійсних об'єктів.
2. Розробити теоретичні основи:
 - узагальнюючого представлення кривих та поверхонь на основі ізотропних характеристик;
 - моделювання плоских ізотропних сіток;
 - моделювання мінімальних поверхонь на основі ізотропних кривих;
 - застосування кватерніонів для моделювання ізотропних об'єктів.
3. Провести комп'ютерні експерименти з дослідження впливу ізотропних характеристик на особливості форми об'єктів та проаналізувати отримані результати.
4. Здійснити програмну реалізацію розроблених методів.
5. Підтвердити практичне значення отриманих результатів досліджень на прикладах застосування моделей кривих та поверхонь у конструюванні форм різного призначення і застосувати в навчальному процесі.

Об'єктом дослідження є процес моделювання геометричних об'єктів дійсного простору.

Предмет дослідження – нові математичні моделі, методи та обчислювальні алгоритми для побудови кривих і поверхонь на основі ізотропних характеристик.

Методи дослідження. Розв'язання поставлених у роботі завдань виконувалось на базі положень аналітичної, диференціальної геометрії, теорії кривих ліній та поверхонь, теорії функцій комплексної змінної, теорії гіперкомплексних функцій, а також сучасних комп'ютерних технологій. Програмна реалізація методів виконувалась у середовищі програмування Microsoft Visual Studio мовою C++ та у середовищі MAPLE.

Теоретичною та інформаційною базою проведення досліджень стали роботи учених:

- у галузі теорії ізотропної геометрії, ізотропних кривих та мінімальних поверхонь: К. Вейерштрасс, Е. Картан, С. Лі, К. Струбекер, С.Ф. Пилипака, А.Т. Фоменко та ін.;
- у галузі теорії геометричного моделювання об'єктів, процесів та явищ: П. Без'є, Ю.І. Бадаєва, І.Г. Балюби, В.Д. Борисенка, В.В. Ваніна, Г.Г. Власюк, Г.С. Іванова, В.В. Гнатушенко, С.М. Ковальова, Ю.М. Ковальова, В.М. Комяк, В.М. Корчинського, Л. М. Куценка, В.Г. Лі, В.М. Малкіної, В.Є. Михайленка, А.В. Найдиша, В.М. Найдиша, В.С. Обухової, А.В. Павлова, О.Л. Підгорного, А.М. Підкоритова, В.О. Плоского, Є.В. Пугачова, С.І. Пустюльги, К.О. Сазонова, І.А. Скідана, О.В. Шоман, В.П. Юрчука, М.І. Яковлева та ін.;
- у галузі комп'ютерного моделювання геометричних моделей складних об'єктів: Ю.І. Бадаєва, Ю.О. Дорошенка, В.І. Іванова, Л.М. Куценка, В.М. Несвідоміна, К.О. Сазонова та ін.

Наукова новизна одержаних результатів.

Вперше:

- розроблено теоретичні основи моделювання дійсних об'єктів на основі ізотропних характеристик;
- створено цілісну структуру формування кривих та поверхонь за визначеними диференціальними властивостями на основі ізотропних характеристик;
- розроблено ряд оригінальних методів і способів формоутворення кривих та поверхонь на основі ізотропних характеристик, а саме: плоских та просторових ізотропних кривих Без'є, ізотропних дробово-раціональних кривих, фундаментального сплайну, кривих на основі годографа Піфагора, кривих у полікоординатному вигляді, просторових ізотропних кривих, геометричних фрактальних кривих, плоских ізотропних сіток, мінімальних поверхонь, поверхонь за плоскими ортогональними та ізотермічними сітками;
- запропоновано застосовувати алгебру кватерніонів для моделювання ізотропних кривих та поверхонь;
- створено спосіб формоутворення тривимірної геометричної моделі багатокомпонентної крученої нитки методом кватерніонів для легкої промисловості.

Удосконалено:

- методику формоутворення мінімальних поверхонь на основі ізотропних кривих.

Отримало подальший розвиток:

- способи моделювання мінімальних поверхонь на основі ізотропних кривих.

Практичне значення одержаних результатів. Створений новий підхід до геометричного моделювання кривих та поверхонь що є науковою базою для:

- моделювання геометричних форм різного призначення й візуалізації процесів, зокрема тривимірної геометричної форми пряжи, наочного процесу згинання тонкостінних форм, візуалізації процесів у графічних редакторах;

- моделювання плоских ортогональних та ізотермічних сіток, якими можливо керувати в інтерактивному режимі, що дає підстави застосовувати їх у подальшому для розв'язання завдань гідро- та аеродинаміки;

- унаочнення впливу уявних величин на формоутворення дійсних поверхонь для навчальних цілей із забезпеченням інтерактивного режиму їх конструювання.

Вірогідність та обґрунтованість результатів досліджень підтверджуються доведеними твердженнями, зіставленнями результатів тестових прикладів із уже відомими, комп'ютерною візуалізацією змодельованих кривих, сіток та поверхонь за створеними алгоритмами, практичними впровадженнями.

Впровадження одержаних результатів виконані в: 1) Київському національному університеті технологій та дизайну на кафедрі технології трикотажного виробництва (акт № 1027/92к від 23.10.13, м. Київ) – для формування графічних образів трикотажних переплетінь, віртуального зразку трикотажу в комп'ютерному середовищі; 2) НВП «УССУРІ-ФЛОР»(акт № 107/2 від 15.01.13, м. Київ) – для розробки макетів для пакування та оформлення дизайну пакувальних виробів біодобавок; 3) ТОВ «Енерджи енд Дейта Інтелідженс Консалтінг Юкрейн» (акт № 0105-95 від 30.09.13, м. Київ) – для створення програмного забезпечення графічної обробки даних (запропоновані в дисертації геометричні моделі та алгоритми дають змогу керувати формою графічних примітивів у режимі реального часу); 4) ДП «Квазар-4» (акт № 45-14-14 від 14.02.14, м. Київ) – для автоматизації проектно-конструкторських робіт; 5) Вищому технічному училищі сервісу та дизайну (акт № 395к від 13.05.09, м. Київ) – для підготовки кравців та дизайнерів одягу (впроваджено програмний комплекс «Геометричне моделювання лекала рукава»); 6) НТУУ «КПІ» у науково-дослідних роботах (акт № 1067-04-14 від 02.04.14, м. Київ) і в навчальний процес кафедри автоматизації проектування енергетичних процесів та систем при викладанні дисциплін «Геометричне моделювання в САПР», «3D моделювання та візуалізація», «Комп'ютерна графіка та геометричне моделювання» (довідка № 1068-04-14 від 02.04.14, м. Київ).

Особистий внесок здобувача полягає в узагальненні основних положень за темою дисертаційної роботи; постановці проблеми досліджень, обранні шляхів її вирішення; розробці основних принципів та підходів щодо моделювання дійсних об'єктів, створенні математичного, алгоритмічного та програмного забезпечення комп'ютерних моделей об'єктів, побудованих на основі ізотропних характеристик; проведенні обчислювальних експериментів із комп'ютерного аналізу диференціальних властивостей кривих та поверхонь. Результати виконаних досліджень, які виносяться на захист і складають наукову новизну роботи, викладено в 48 працях. Особистий внесок здобувача в роботах, опублікованих у співавторстві, полягає у: формуванні геометричної тривимірної моделі петлі та пряжи,

геометричного лекала рукава [3, 18, 26, 43], розробці методів побудови геометричних об'єктів на основі ізотропних характеристик [2, 4, 19, 23, 24, 27, 28, 46, 48], розробці алгоритмів щодо конструювання гладких обводів та поверхонь [6, 7, 31], представлення кривих у полікоординатному вигляді та за допомогою функцій радіального базису [8, 10, 15, 35–36, 42, 44], розробці алгоритмів стосовно візуалізації тривимірних сцен [1, 11, 33, 38], способів щодо моделювання фрактальних кривих [22, 34, 37, 40], чисельного моделювання [32],

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень на окремі їх положення пройшли апробацію на наукових форумах різного рівня: VII міжнародній науково-технічній конференції «Контроль і управління в складних системах» (м. Вінниця, 2003 р.); Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні проблеми геометричного моделювання» (м. Харків, 2005 р.); IX Міжнародна школа-семінар «Современные информационные технологии» (м. Мінськ, 2006 р.); The 15th International Conference in central Europe on Computer Graphics, Visualisation and Computer Vision (Plzen, Czech Republic, 2007); Міжнародній Кримській конференції «Геометрическое и компьютерное моделирование: энергосбережение, экология и дизайн» (м. Симферополь, 2007 р.); VIII Міжнародній науково-практичній конференції «Розвиток підприємництва як фактор росту національної економіки» (м. Київ, 2009 р.); Міжнародних науково-практичних конференціях «Сучасні проблеми геометричного моделювання» (м. Дніпропетровськ, 2006 р.), (м. Мелітополь, 2008, 2009, 2011, 2012, 2013 рр.); Міжнародній науково-практичній конференції «Моделювання об'єктів, процесів та систем» (м. Київ, 2011 р.); VIII Всеукраїнській науково-практичній конференції «Прикладна геометрія, графічні технології та дизайн» (м. Полтава, 2012 р.); науково-практичному семінарі в Національному університеті біоресурсів і природокористування України, присвяченій пам'яті проф. Обухової В.С. (м. Київ, 2012 р.); Scientific and Professional Conference Natural, Mathematical and Technical science – NaMaTech (Budapest, 2013).

Публікації. Результати виконаних дисертаційних досліджень опубліковані у 48 працях. 30 статей віднесено до основних публікацій, з яких 5 – у міжнародних виданнях та виданнях, що входять до наукометричних баз, 25 – у міжвузівських та вузівських збірниках наукових праць затверджених МОН України, як фахові, 18 – до списку додаткових публікацій, з яких 2 – монографії.

Структура та об'єм дисертаційної роботи. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел із 296 найменувань та 5 додатків. Робота містить 336 сторінок основного тексту, 144 рисунки, 5 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі розкрито зміст і стан наукової проблеми, її теоретичну та прикладну значущість; сформульовано цілі та задачі дослідження, його наукову новизну; подано загальну характеристику роботи.

У першому розділі розглянуто застосування чисел з уявними одиницями для формоутворення різних геометричних об'єктів, особлива увага приділяється дослідженням з моделювання ізотропних кривих та поверхонь, аналізу їхнього стану в даний час і можливості інтеграції з методами прикладної геометрії, що дає підстави для визначення низки нерозв'язаних у цій галузі питань та обмежень, які зумовлюють наукову спрямованість даної роботи:

1. Проведений аналіз стосовно моделювання ізотропних кривих, ізотропних сіток та поверхонь показав, що: основні дослідження проводяться в комплексному просторі; не проводяться дослідження стосовно перетворення ізотропної кривої, ізотропної поверхні і сітки у відповідні об'єкти дійсного простору та дослідження стосовно впливу цієї унікальної властивості на геометричні та диференційні властивості об'єктів дійсного простору; як ізотропна характеристика розглядається тільки довжина ізотропної кривої; основні дослідження проводяться з тривимірними кривими й не розглянуто закономірності побудови плоских кривих; моделювання ізотропних кривих здійснюється на основі аналітичної функції, що звужує можливості щодо формоутворення.

2. Були виявлені основні недоліки методів моделювання мінімальних поверхонь на основі ізотропних кривих: недостатньо розглянути способи побудови мінімальних поверхонь на основі кривих, які проходять через точковий каркас; не проведено ґрунтовних досліджень щодо формування спеціальних координатних систем на мінімальних поверхнях залежно від заданої напрямної кривої; для формування мінімальної поверхні застосовується тільки конформна заміна параметра: $t=u+iv$.

3. На основі аналізу чисел з уявними одиницями було запропоновано застосовувати тільки алгебри з діленням та виключити з розгляду алгебру октав у зв'язку зі складністю застосування. Для геометричного моделювання кривих та поверхонь доцільно використовувати алгебру комплексних чисел і кватерніонів.

4. Аналізуючи способи побудови геометричних об'єктів, було запропоновано виділити як базові такі ізотропні характеристики: ізотропний відрізок, ізотропний багатокутник, ізотропна довжина кривої, ізотропна кривина, ізотропний скрут.

Проведений аналіз показав, що не існує узагальнених підходів щодо моделювання геометричних об'єктів дійсного простору на основі застосування ізотропних характеристик. Тому важливо визначитися, яким чином буде проводитися побудова таких об'єктів. Розглянемо алгоритм формування об'єкта дійсного простору (рис. 1). За початкову умову буде обрана ізотропна характеристика та алгебра чисел з уявними одиницями, які впливатимуть на формування функції моделювання та вибір простору. Після створення функції $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ та $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, виконується виділення окремо дійсної та окремо уявної частини змодельованої функції: $\mathbf{r}_{\text{Re}} = \text{Re}(\mathbf{r}(t))$, $\mathbf{r}_{\text{Im}} = \text{Im}(\mathbf{r}(t))$, $\mathbf{r}_{\text{Re}} = \text{Re}(\mathbf{r}(u, v))$, $\mathbf{r}_{\text{Im}} = \text{Im}(\mathbf{r}(u, v))$. Після відокремлення матимемо об'єкти дійсного простору, дослідження яких і проводиться.

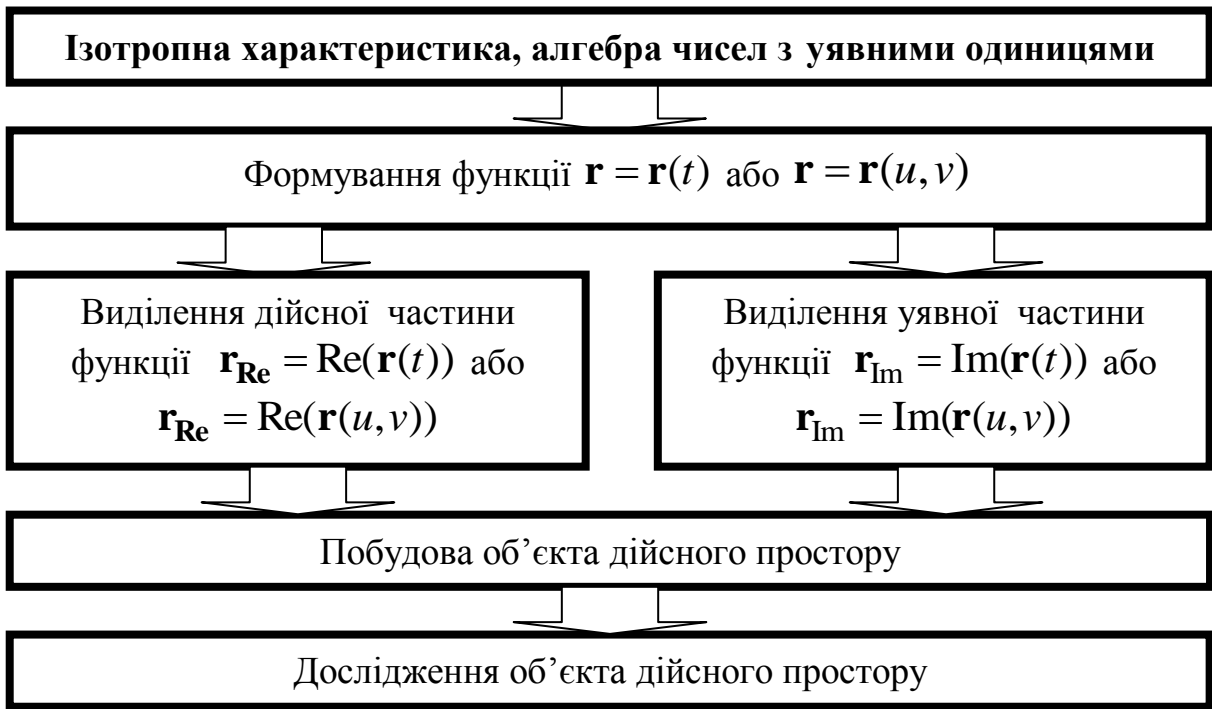


Рис. 1. Алгоритм побудови об'єкта дійсного простору на основі ізотропних характеристик

У другому розділі розглядається конструювання плоских кривих на основі ізотропних характеристик. Розглянуто моделювання *ізотропних* кривих Без'є, дробово-раціональних кривих, кривих за годографом Піфагора, кривих на основі параметричного многочлена Лагранжа, кривих у полікоординатній формі та кривих на основі функцій радіального базису.

У якості базових елементів використано ізотропні відрізки, які складають основу для ізотропних характеристичних багатокутників. Ізотропний відрізок на площині визначається на основі виразу:

$$R_{0,1}^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = 0. \quad (1)$$

Для побудови ізотропних багатокутників на площині матимемо:

$$\begin{cases} R_{0,1}^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = 0, \\ \dots, \\ R_{n-1,n}^2 = (x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2 = 0, \\ R_{n,0}^2 = (x_0 - x_n)^2 + (y_0 - y_n)^2 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де n – кількість сторін багатокутника.

Твердження 1. Для того, щоб одержати замкнений ізотропний багатокутник, необхідно, аби при знаходженні ординат кожної з наступних точок використовувався знак або тільки «+», або тільки «-».

Нехай крива Без'є n -го порядку (рис. 2) задана у вигляді:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{r}_j J_{n,j}(t), \quad \text{де } J_{n,j}(t) = \frac{n!}{j!(n-j)!} t^j (1-t)^{n-j}, \quad (3)$$

де $\mathbf{r}_j = [x_j \quad y_j]$

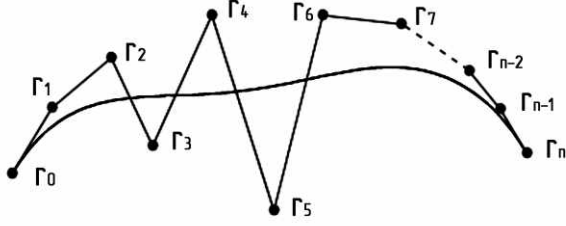


Рис. 2. Крива Без'є n -го порядку

Розглянемо криві Без'є як комплексні аналітичні функції дійсного аргументу. При виділенні дійсної та уявної частини окремо, одержимо дві криві. Дослідимо властивості кривих з різними типами характеристичного многокутника. Якщо маємо уявне значення $R^2_{j,j+1} = Const \cdot i$, або

ізотропне $-R^2_{j,j+1} = 0$, тоді уявні та дійсні криві мають однакові довжини сторін характеристичного многокутника $R_{j \text{ Re},(j+1) \text{ Re}} = R_{j \text{ Im},(j+1) \text{ Im}}$.

Якщо до умови $R^2_{j,j+1} = Const \cdot i$ додамо умову $R^2_{0,n} = Const \cdot i$, тоді дійсні та уявні криві матимуть однакові довжини та рівні кривини. Але для того, щоб такі криві були знайдені, повинна виконуватись додаткова умова:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \pm \sqrt{(\text{Re}(x_{j+1}) - \text{Re}(x_j))^2 + (\text{Re}(y_{j+1}) - \text{Re}(y_j))^2 - (\text{Im}(x_{j+1}) - \text{Im}(x_j))^2} \pm \quad (4)$$

$$\pm \sqrt{(\text{Re}(x_0) - \text{Re}(x_n))^2 + (\text{Re}(y_0) - \text{Re}(y_n))^2 - (\text{Im}(x_0) - \text{Im}(x_n))^2} = 0$$

Для того, щоб, крім характеристичного многокутника, і хорда $R_{0,n}$ мала уявну довжину, необхідно визначити умову:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\text{Re}(x_{j+1}) - \text{Re}(x_j))(\text{Im}(x_{j+1}) - \text{Im}(x_j))}{\text{Re}(y_{j+1}) - \text{Re}(y_j)} + (\text{Re}(x_0) - \text{Re}(x_n)) \cdot \frac{(\text{Im}(x_0) - \text{Im}(x_n))}{\text{Re}(y_0) - \text{Re}(y_n)} = 0. \text{ Буд}$$

емо будувати ізотропну криву Без'є n -го порядку на основі умови ізотропності ланок характеристичного многокутника та хорди, тобто:

$$\begin{cases} |\mathbf{r}_{10}|^2 = 0 \\ \dots \\ |\mathbf{r}_{n(n-1)}|^2 = 0 \\ |\mathbf{r}_{0n}|^2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

З урахуванням виразу (5), координати точок визначатимуться за допомогою умов:

$$\begin{cases} (x_{j+1} - x_j) = i(y_{j+1} - y_j), \\ (x_0 - x_n) = i(y_0 - y_n) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (x_{j+1} - x_j) = -i(y_{j+1} - y_j), \\ (x_0 - x_n) = -i(y_0 - y_n) \end{cases} \quad (6)$$

де $j = 0..(n-1)$.

Твердження 2. Якщо крива Без'є n -го порядку визначається на основі ізотропних ланок характеристичного многокутника та ізотропності хорди (вирази (5)), тоді одержимо криву з нульовою довжиною.

Твердження 3. Якщо плоска ізотропна крива Без'є n -го порядку побудована на основі ізотропних сторін характеристичного многокутника та ізотропної хорди, то і кривина такої кривої буде невизначена.

При завданні плоскої дійсної кривої точки характеристичного многокутника кривої визначаються на основі виразів (7):

$$\mathbf{r}_{j+1} = \left[\operatorname{Re}(x_{j+1}) \pm i \operatorname{Im}(x_{j+1}) \quad \operatorname{Re}(y_{j+1}) \pm i \operatorname{Im}(y_{j+1}) \right] \quad (7)$$

де $\operatorname{Im}(x_{j+1}) = -\operatorname{Re}(y_{j+1}) + \operatorname{Im}(x_j) + \operatorname{Re}(y_j)$,

$$\operatorname{Im}(y_{j+1}) = \operatorname{Re}(x_{j+1}) - \operatorname{Re}(x_j) + \operatorname{Im}(y_j),$$

$$j = 0..(n-1).$$

Дробово-раціональна крива n -го порядку (рис.2.) визначається у вигляді:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{j=0}^n \mathbf{r}_j w_j J_{n,j}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j J_{n,j}(t)}, \quad \text{де } J_{n,j}(t) = \frac{n!}{j!(n-j)!} t^j (1-t)^{n-j}, \quad (8)$$

де $\mathbf{r}_j = [x_j \quad y_j]$.

На основі досліджень, що проведені у роботі, сформовано та доведено наступне твердження:

Твердження 4. Плоска дробово-раціональна крива буде ізотропною, якщо будуть ізотропними сторони характеристичного многокутника незалежно від значення ваги точок.

З математичної точки зору плоска крива $\mathbf{r}(t) = [x(t) \quad y(t)]$ буде кривою за годографом Піфагора (РН-крива) тоді й тільки тоді, коли годограф (похідні) від $\mathbf{r}(t)$ пов'язаний співвідношенням:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)|^2 &= x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2, \\ x'(t) &= u(t)^2 - v(t)^2, \\ y'(t) &= 2u(t)v(t), \end{aligned} \quad (9)$$

де $\sigma(t)$, $u(t)$, $v(t)$ – поліноми.

Для кубічної кривої будемо шукати $u(t)$ та $v(t)$ у вигляді лінійних поліномів:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_a(1-t) + u_b t, \\ v(t) &= v_c(1-t) + v_d t, \end{aligned} \quad (10)$$

де u_a, u_b, v_c, v_d – коефіцієнти.

Знайдені залежності для визначення кубічної РН-кривої у вигляді Без'є:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{v_c^2}{3}, \quad x_1 = \frac{u_a^2}{3}, \quad x_2 = \frac{u_a^4}{3v_c^2}, \quad x_3 = \frac{u_a^6}{3v_c^4}, \\ y_1 &= \frac{2}{3}u_a v_c + y_0, \quad y_2 = \frac{2u_a^3}{3v_c} + y_1, \quad y_3 = \frac{2u_a^5}{3v_c^3} + y_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Вирази (12) визначають умови ізотропності довжини кривої за годографом Піфагора у вигляді Без'є:

$$v_c^2 = -u_a^2 \quad \text{або} \quad v_c^2 = u_a^2 \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}. \quad (12)$$

У роботі розглянуто моделювання ізотропних кривих на основі параметричного многочлена Лагранжа. Для визначення ізотропної кривої застосовано ізотропні хорди:

$$x(t) = \sum_{j=0}^n x_j l_j(t), \quad y(t) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(t), \quad (13)$$

$$\text{де } y_{j+1} = i(x_{j+1} - x_j) + y_j, \quad l_j(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{(t - t_k)}{(t_j - t_k)}.$$

Кубічна ізотропна крива на основі параметричного многочлена Лагранжа визначається за допомогою призначення параметрів: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{2}{3}$, $t_3 = 1$:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (-5.5x_0 + 9x_1 - 4.5x_2 + x_3)t + (9x_0 - 22.5x_1 + 18x_2 \\ &\quad - 4.5x_3)t^2 + (-4.5x_0 + 13.5x_1 - 13.5x_2 + 4.5x_3)t^3, \\ y(t) &= y_0 + i(-5.5x_0 + 9x_1 - 4.5x_2 + x_3)t + i(9x_0 - 22.5x_1 + 18x_2 \\ &\quad - 4.5x_3)t^2 + i(-4.5x_0 + 13.5x_1 - 13.5x_2 + 4.5x_3)t^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Для моделювання кривих у полікоординатному вигляді застосовано ізотропне подання прямих:

$$(x - x_j) \pm i(y - y_j) = 0. \quad (15)$$

Розглянуто моделювання кривих четвертого порядку на основі ізотропних прямих. Квадратична функція, яка входить до рівняння кривої визначається: як квадрат ізотропної прямої, як добуток двох ізотропних прямих, на основі комбінації трьох прямих у трилінійній системі координат, на основі комбінації чотирьох прямих у чотирилінійній системі координат.

У роботі розглянуто основні види функцій радіального базису та досліджено поведінку складених кривих. Запропоновано для формування функцій радіального базису використовувати квадратичні функції у полікоординатному вигляді на основі ізотропних прямих (15).

Третій розділ присвячено побудові плоских сіток на основі ізотропних кривих. Нехай задана певна ізотропна плоска крива: $\mathbf{r}(t)$. Моделювання ізотропних кривих будемо проводити за допомогою завдання дійсних характеристик точок та визначення уявних: $\mathbf{r}_{j\text{Re}} \Rightarrow \mathbf{r}_{j\text{Im}}$. Для побудови сітки використано ізотропну криву як напрямну криву. Для цього підставимо замість параметру t деяку комплексну змінну.

Будемо *називати конформною* заміною, якщо замість параметра t підставимо комплексну змінну $u+iv$: $t=u+iv$. Будемо *називати квазіконформною* заміною, якщо замість параметра t підставимо комплексну змінну $ku+iv$ або $u+ikv$: $t=ku+iv$ або $t=u+ikv$.

У результаті таких замін одержимо функцію: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Якщо відокремити дійсну частину від уявної і відобразити на площині, то одержимо дві сітки: $\mathbf{r}_{\text{Re}}(u, v) = \text{Re}(\mathbf{r}(u, v))$ та $\mathbf{r}_{\text{Im}}(u, v) = \text{Im}(\mathbf{r}(u, v))$, напрямними кривими в яких будуть відповідно дійсна та уявна частини ізотропної кривої. Дослідимо властивості одержаної дійсної сітки залежно від способу побудови напрямної кривої та заміни параметра.

Побудуємо плоску сітку на основі ізотропної кривої Без'є третього порядку з конформною заміною параметра та відокремимо дійсну частину:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \operatorname{Re}[x_0(1-u-iv)^3 + 3x_1(1-u-iv)^2(u+iv) + 3x_2(1-u-iv)(u+iv)^2 + x_3(u+iv)^3], \\ y(u, v) &= \operatorname{Re}[y_0(1-u-iv)^3 + 3(i(x_1-x_0)+y_0)(1-u-iv)^2(u+iv) + 3(i(x_2-x_1) - \\ &- x_1) + i(x_1-x_0)+y_0)(1-u-iv)(u+iv)^2 + (i(x_3-x_2) + i(x_2-x_1) + i(x_1- \\ &- x_0) + y_0)(u+iv)^3]. \end{aligned} \quad (16)$$

Визначимо внутрішню геометрію побудованої сітки. Для цього розрахуємо коефіцієнти першої квадратичної форми, які дадуть змогу оцінити довжини сегментів кривих, з яких складається сітка, кути між кривими та площі областей на сітці. Після визначення часткових похідних було одержано вирази:

$$x_v(u, v) = y_u(u, v), \quad x_u(u, v) = -y_v(u, v). \quad (17)$$

Рівняння (17) є аналогом умови Коши-Рімана.

Одержані рівняння підставимо у вирази для першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned} F &= x_u(u, v)x_v(u, v) + y_u(u, v)y_v(u, v) = x_u(u, v)y_u(u, v) - y_u(u, v)x_u(u, v) = 0, \\ E &= x_u(u, v)^2 + y_u(u, v)^2 = y_v(u, v)^2 + y_u(u, v)^2, \\ G &= x_v(u, v)^2 + y_v(u, v)^2 = y_u(u, v)^2 + y_v(u, v)^2, \text{ тобто } E = G. \end{aligned}$$

Значення $F=0$ означає, що побудована сітка є ортогональною, а $E=G$ – ізотермічною.

Дослідження властивостей сітки, побудованої на основі квазіконформної заміни $t = ku + iv$ та ізотропної кубічної кривої Без'є показали, що

$$kx_v(u, v) = y_u(u, v), \quad x_u(u, v) = -ky_v(u, v), \quad (18)$$

коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned} F &= -ky_v(u, v)x_v(u, v) + kx_v(u, v)y_v(u, v) = 0, \quad G = x_v(u, v)^2 + y_v(u, v)^2, \\ E &= k^2(x_v(u, v)^2 + y_v(u, v)^2), \text{ тобто } E = k^2G \end{aligned}$$

Сітка буде ортогональна, але не ізотермічна.

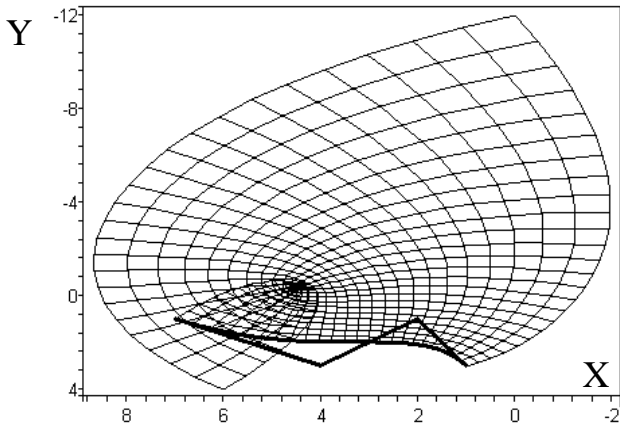
Аналогічні дослідження проведено для сітки, побудованої за допомогою виразу $t = u + ivk$ та доведено, що: $F=0$, $k^2E=G$, тобто сітка буде ортогональна, але не ізотермічна.

На рис. 3, 4 відображено сітки на основі ізотропних кривих Без'є.

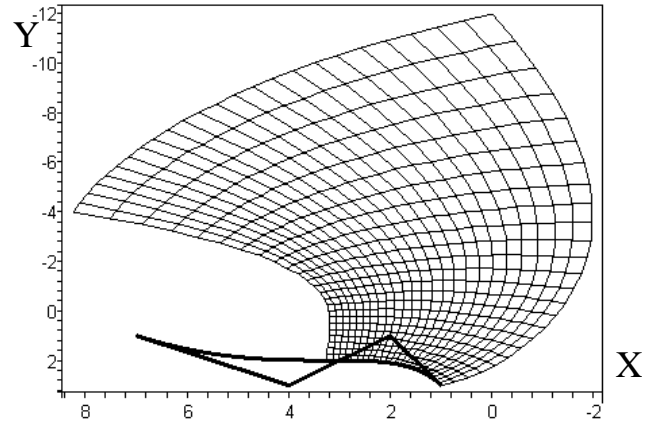
У роботі побудовані плоскі сітки на основі ізотропної кубічної дробово-раціональної плоскої кривої (8) та конформної заміни параметра:

$$x(u+iv) = \frac{\sum_{j=0}^3 x_j w_j J_{n,j}(u+iv)}{\sum_{j=0}^3 w_j J_{n,j}(u+iv)}, \quad y(u+iv) = y_0 + \frac{I \sum_{j=1}^3 (x_j - x_0) w_j J_{n,j}(u+iv)}{\sum_{j=0}^3 w_j J_{n,j}(u+iv)} \quad (19)$$

$$\text{де } J_{3,j}(u+iv) = \frac{3!}{j!(3-j)!} (u+iv)^j (1-u-iv)^{3-j}.$$

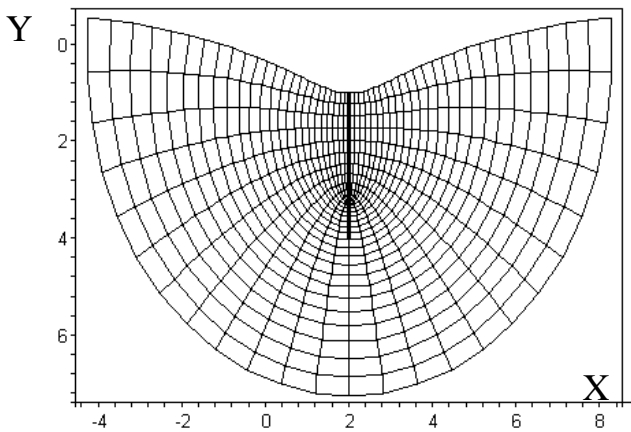


а)

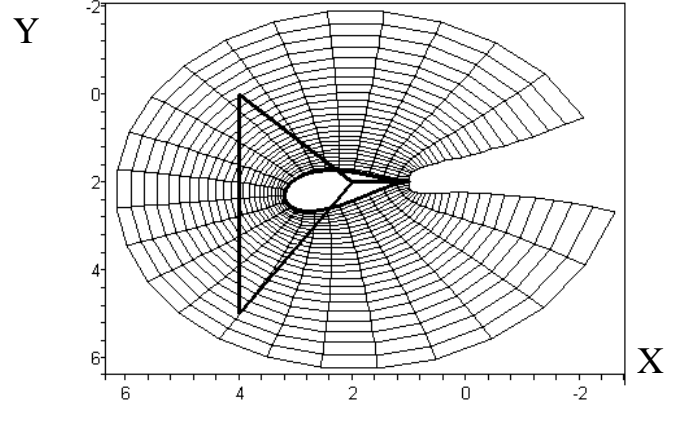


б)

Рис. 3. Дійсна частина плоскої сітки на основі ізотропної кривої Без'є 3-го порядку при завданні: а) $t = u + iv$; б) $t = ku + iv$



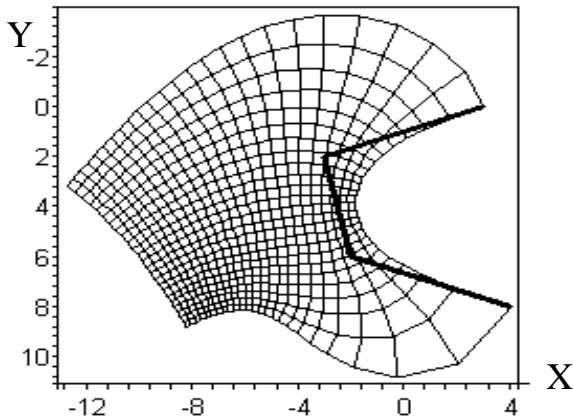
а)



б)

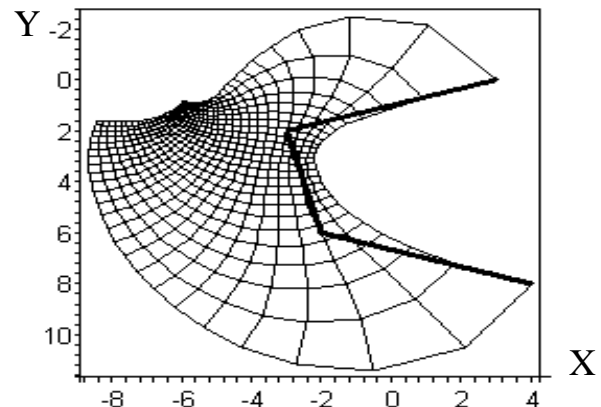
Рис. 4. Дійсна частина плоскої сітки при завданні $t = u + iv$ на основі ізотропної кривої Без'є 5-го порядку: а) $r_0 = r_5, r_1 = r_4, r_2 = r_3$; б) $r_0 = r_5, r_1 = r_4$

Доведено, що сітка є ортогональною та ізотермічною (рис. 5). Розглянуто моделювання сіток на основі квазіконформної заміни параметру та точок характеристичного багатокутника, що збігаються.



а)

$$w_0 = 2, w_1 = 4, w_2 = 4, w_3 = 1$$



б)

$$w_0 = 2, w_1 = 8, w_2 = 4, w_3 = 1$$

Рис. 5. Дійсні частини плоскої сітки при завданні $t = u + iv$ на основі ізотропної дробово-раціональної кривої 3-го порядку

Змодельовано плоску сітку на основі параметричного многочлена Лагранжа у вигляді (13), яка буде ортогональною та ізотермічною при конформній заміні параметра (рис. 6):

$$\operatorname{Re}(x(u + iv)) = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^n x_j l_j(u + iv)\right), \quad \operatorname{Re}(y(u + iv)) = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^n y_j l_j(u + iv)\right),$$

$$\text{де } y_{j+1} = i(x_{j+1} - x_j) + y_j, \quad l_j(u + iv) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{(u + iv) - t_k}{t_j - t_k}. \quad (20)$$

У роботі запропоновано способи поєднання сегменту сітки $\mathbf{r}_{\operatorname{Re}}^{(1)}(u_1, v_1)$, де $0 \leq u_1, v_1 \leq 1$, із сегментом сітки $\mathbf{r}_{\operatorname{Re}}^{(2)}(u_2, v_2)$, де $0 \leq u_2, v_2 \leq 1$.

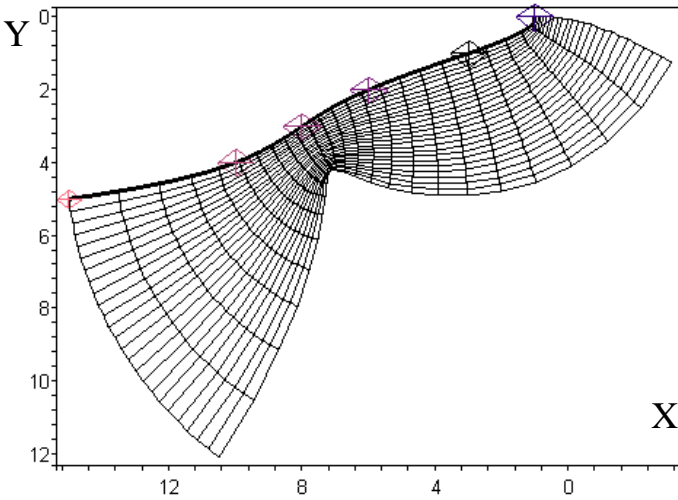


Рис. 6. Дійсна частини плоскої сітки при заміні $t = u + iv$ на основі многочлена Лагранжа, який проходить через 6 точок

Для поєднання необхідно, щоб виконувались умови:

1) гранична крива повинна бути неперервною в точці поєднання, тобто

$$\mathbf{r}_{\operatorname{Re}}^{(1)}(1, 0) = \mathbf{r}_{\operatorname{Re}}^{(2)}(0, 0); \quad (21)$$

2) граничні криві сіток повинні збігатися:

$$\mathbf{r}_{\operatorname{Re}}^{(1)}(1, v_1) = \mathbf{r}_{\operatorname{Re}}^{(2)}(0, v_2) \quad (22)$$

Розроблено способи поєднання для сіток побудованих на основі різних ізотропних кривих, конформної та квазіконформної заміни параметра, знайдено умови для склеювання сіток:

- умови для склеювання двох дійсних частин ізотропних сіток, побудованих на основі ізотропних кривих Без'є другого порядку та конформної заміни:

$$\begin{aligned} x_{1\operatorname{Re}}^{(2)} &= 2x_{2\operatorname{Re}}^{(1)} - x_{1\operatorname{Re}}^{(1)}, & y_{1\operatorname{Re}}^{(2)} &= 2y_{2\operatorname{Re}}^{(1)} - y_{1\operatorname{Re}}^{(1)}, \\ x_{2\operatorname{Re}}^{(2)} &= x_{0\operatorname{Re}}^{(1)} + 2x_{1\operatorname{Re}}^{(2)} - 2x_{1\operatorname{Re}}^{(1)}, & y_{2\operatorname{Re}}^{(2)} &= y_{0\operatorname{Re}}^{(1)} + 2y_{1\operatorname{Re}}^{(2)} - 2y_{1\operatorname{Re}}^{(1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

- умови для склеювання двох дійсних частин ізотропних сіток, побудованих на основі ізотропних кривих Без'є другого порядку і квазіконформної заміни:

$$\begin{aligned} x_{1\operatorname{Re}}^{(2)} &= \frac{2x_{2\operatorname{Re}}^{(1)}(k_1 + k_2) - k_1 x_{1\operatorname{Re}}^{(1)}}{k_2}, & y_{1\operatorname{Re}}^{(2)} &= \frac{2y_{2\operatorname{Re}}^{(1)}(k_1 + k_2) - k_1 y_{1\operatorname{Re}}^{(1)}}{k_2}, \\ x_{2\operatorname{Re}}^{(2)} &= \frac{k_1^2 x_{0\operatorname{Re}}^{(1)} + 2k_2^2 x_{1\operatorname{Re}}^{(2)} - 2k_1^2 x_{1\operatorname{Re}}^{(1)} + x_{2\operatorname{Re}}^{(1)}(k_1^2 - k_2^2)}{k_2^2}, \\ y_{2\operatorname{Re}}^{(2)} &= \frac{k_1^2 y_{0\operatorname{Re}}^{(1)} + 2k_2^2 y_{1\operatorname{Re}}^{(2)} - 2k_1^2 y_{1\operatorname{Re}}^{(1)} + y_{2\operatorname{Re}}^{(1)}(k_1^2 - k_2^2)}{k_2^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Доведено твердження:

Твердження 5. Якщо сітки $\mathbf{r}_{\text{Re}}^{(1)}(u_1, v_1)$, де $0 \leq u_1, v_1 \leq 1$, та $\mathbf{r}_{\text{Re}}^{(2)}(u_2, v_2)$, де $0 \leq u_2, v_2 \leq 1$, побудовані на основі ізотропних кривих Без'є n -го порядку, склеєні за умовами (21) та (22), тоді $\mathbf{r}_{u_1 \text{Re}}^{(1)}(1, 0) = \mathbf{r}_{u_2 \text{Re}}^{(2)}(0, 0)$.

Проведено дослідження стосовно моделювання сітки на основі ізотропної кривої за годографом Піфагора (РН-кривої) з конформною заміною параметра, якщо крива представляється у вигляді кубічної кривої Без'є. Визначено умови ортогональності та ізотермічності сітки, побудованої на основі РН-кривої для лінійних базових функцій (10):

$$v_{c \text{Re}} = -u_{a \text{Im}}, \quad v_{c \text{Im}} = u_{a \text{Re}}, \quad v_{d \text{Im}} = u_{b \text{Re}}, \quad v_{d \text{Re}} = -u_{b \text{Im}}.$$

Координати кривої Без'є визначаються на основі виразів:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_a^2 - v_c^2}{3} + x_0, & x_2 &= \frac{u_a u_b - v_c v_d}{3} + x_1, & x_3 &= \frac{u_b^2 - v_d^2}{3} + x_2, \\ y_1 &= \frac{2u_a v_c}{3} + y_0, & y_2 &= \frac{u_a v_d - v_c u_b}{3} + y_1, & y_3 &= \frac{2u_b v_d}{3} + y_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Даний підхід узагальнено та доведено твердження:

Твердження 6. Для моделювання ортогональної та ізотермічної сітки, побудованої на основі плоскої РН-кривої, необхідно, щоб виконувалась умова: $v(t) = iu(t)$.

Четвертий розділ присвячено моделюванню просторових ізотропних кривих.

Розглянута низка способів моделювання просторових ізотропних кривих Без'є n -го порядку.

На основі аналітичної функції $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_n t^n$, де $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ - деякі комплексні значення, та безквадратурного подання Вейерштрасса сформована система $3n$ рівнянь для визначення координат многокутника Без'є n -го порядку:

- Якщо $0 \leq j \leq n - 2$

$$\begin{aligned} i \cdot \left\{ \frac{(j-1)(j-2)}{2} a_j - \frac{(j+1)(j+2)}{2} a_{j+2} \right\} &= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} x_l \frac{n!}{l!(j-l)!(n-j)!}, \\ \left\{ \frac{(j-1)(j-2)}{2} a_j + \frac{(j+1)(j+2)}{2} a_{j+2} \right\} &= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} y_l \frac{n!}{l!(j-l)!(n-j)!}, \\ i \cdot \left\{ (j+1)(j-1) a_{j+1} \right\} &= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} z_l \frac{n!}{l!(j-l)!(n-j)!}; \end{aligned} \quad (26)$$

- Якщо $j = n - 1$

$$\begin{aligned} i \cdot \left\{ \frac{(j-1)(j-2)}{2} a_j \right\} &= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} x_l \frac{n!}{l!(j-l)!(n-j)!}, \\ \left\{ \frac{(j-1)(j-2)}{2} a_j \right\} &= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} y_l \frac{n!}{l!(j-l)!(n-j)!}, \\ i \cdot \left\{ (j+1)(j-1) a_{j+1} \right\} &= \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} z_l \frac{n!}{l!(j-l)!(n-j)!}; \end{aligned} \quad (27)$$

- Якщо $j = n$

$$i \cdot \left\{ \frac{(j-1)(j-2)}{2} a_j \right\} = \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} x_l \frac{n!}{l!(j-l)!(n-j)!},$$

$$\left\{ \frac{(j-1)(j-2)}{2} a_j \right\} = \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} y_l \frac{n!}{l!(j-l)!(n-j)!}, \quad (28)$$

$$0 = \sum_{l=0}^j (-1)^{j-l} z_l \frac{n!}{l!(j-l)!(n-j)!}.$$

Вирази (26)–(28) будуть складати систему рівнянь із нижньою трикутною матрицею, яка розв'язується послідовною підстановкою відшуканих значень. Для ізотропної кривої Без'є n -го порядку $3(n+1)$ координати точок характеристичного многокутника задаються на основі $(n+1)$ коефіцієнтів аналітичної функції.

У роботі змодельована просторова ізотропна крива за допомогою плоскої дійсної параметричної кривої: $x = x(t)$, $y = y(t)$. У загальному випадку (тобто коли крива не є кривою за годографом Піфагора) одержати значення виразу без додаткових обчислень не можливо, тому застосовані апроксимаційні методики. Завдання розв'язуються у два етапи: на першому етапі одержуємо поліном, який апроксимує функцію квадратного кореня, а на другому етапі – інтеграл.

Запропоновано моделювати просторові ізотропні криві Без'є на основі ізотропності сторін характеристичного многокутника. Умова *ізотропності* для просторової кривої Без'є n -го порядку:

$$\sum_{r=x,y,z} n^2 \left[\sum_{j=0}^{n-1} (r_{j+1} - r_j)^2 J_{n-1,j}^2(t) + 2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=j+1}^{n-1} (r_{j+1} - r_j) J_{n-1,j}(t) (r_{l+1} - r_l) J_{n-1,l}(t) \right] = 0$$

Для визначення обмежень для значень реперних точок ізотропної просторової кривої Без'є n -го порядку складається система рівнянь:

$$- \text{якщо } j = 2k : n^2 \left[(r_{j+1} - r_j)^2 \left(\frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \sum_{l=j+1}^{n-1} (r_{j+1} - r_j) \left(\frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \right) (r_{l+1} - r_l) \left(\frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} \right) \right] = 0; \quad (29)$$

- якщо $j = 2k - 1$:

$$n^2 \left[2 \sum_{l=j+1}^{n-1} (r_{j+1} - r_j) \left(\frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \right) (r_{l+1} - r_l) \left(\frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} \right) \right] = 0.$$

Умови *ізотропності* для просторової кривої Без'є третього порядку мають вигляд:

$$\sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)^2 = 0, \quad \sum_{r=x,y,z} (r_3 - r_2)^2 = 0, \quad \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)(r_2 - r_1) = 0, \quad (30)$$

$$2 \sum_{r=x,y,z} (r_2 - r_1)^2 + \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)(r_3 - r_2) = 0, \quad \sum_{r=x,y,z} (r_2 - r_1)(r_3 - r_2) = 0.$$

Аналіз виразів (30) показує, що довжини першої та останньої ланки характеристичного чотирикутника повинні дорівнювати нулю, тобто бути

ізотропними. Якщо $\sum_{r=x,y,z} (r_2 - r_1)^2 = 0$, тоді буде ізотропною і хорда, яка стягує сегмент кривої, тобто $\sum_{r=x,y,z} (r_3 - r_0)^2 = 0$. В цьому випадку вирази (30) спрощуються:

$$\begin{aligned} \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)^2 = 0, \quad \sum_{r=x,y,z} (r_3 - r_2)^2 = 0, \quad \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)(r_2 - r_1) = 0, \\ \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)(r_3 - r_2) = 0, \quad \sum_{r=x,y,z} (r_2 - r_1)(r_3 - r_2) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Вирази (31) визначають криву, що лежить у площині у просторі.

У роботі запропоновано моделювати просторову ізотропну криву Без'є на основі деформації плоскої кривої. Для кубічної кривої знайдено дробово-лінійні залежності:

$$\begin{aligned} z_1 = z_0, y_3 = \frac{-2(z_2 - z_1)^2 - (x_1 - x_0)(x_3 - x_2)}{(y_1 - y_0)} + y_2; \\ z_3 = \frac{2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}{(y_1 - y_0)} + z_2; \quad x_3 = \frac{-(z_2 - z_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}{(x_1 - x_0)} + x_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Проведено дослідження просторових дробово-раціональних кривих третього порядку та знайдені умови ізотропності:

$$\begin{aligned} \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)^2 = 0, \quad \sum_{r=x,y,z} (r_3 - r_2)^2 = 0, \quad \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)(r_2 - r_1) = 0, \\ 2 \sum_{r=x,y,z} (r_2 - r_1)^2 + \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)(r_3 - r_2) = 0, \quad \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)(r_2 - r_1) = 0, \\ -2w_2^2 \sum_{r=x,y,z} (r_2 - r_1)^2 \quad -2w_1^2 \sum_{r=x,y,z} (r_2 - r_1)^2 \\ w_3 = \frac{\sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)(r_3 - r_2)}{w_1 \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)(r_3 - r_2)}, \quad w_0 = \frac{\sum_{r=x,y,z} (r_2 - r_1)^2}{w_2 \sum_{r=x,y,z} (r_1 - r_0)(r_3 - r_2)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Знайдена залежність між значеннями ваги точок: $w_0 w_2^3 = w_3 w_1^3$.

Сформульовано та доведено твердження:

Твердження 7. Дробово-раціональна крива буде ізотропною, якщо виконуються умови ізотропності для кривої Без'є, побудованої на основі реперних точок дробово-раціональної кривої.

Дослідження показали, що якщо $\sum_{r=x,y,z} (r_2 - r_1)^2 = 0$, тоді дробово-раціональна

крива залишиться ізотропною незалежно від значення ваги, а крива буде лежати у площині, яка довільно розташована у тривимірному просторі.

У роботі знайдені умови ізотропності для фундаментального просторового сплайну:

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_{j-1})^2 = 0, \quad \sum_{r=x,y,z} (r_{j+2} - r_j)^2 = 0, \\
& -s \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_{j-1})(r_{j+2} - r_j) + 3 \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_{j-1})(r_{j+1} - r_j) = 0, \\
& \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_{j-1})(r_{j+1} - r_j) = \sum_{r=x,y,z} (r_{j+2} - r_j)(r_{j+1} - r_j), \\
& 2 \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_j)^2 - s \sum_{r=x,y,z} (r_{j+1} - r_{j-1})(r_{j+1} - r_j) = 0,
\end{aligned} \tag{34}$$

де r_{j-1} , r_j , r_{j+1} , r_{j+2} – точки заданого точкового каркасу, $s = (1-u)/2$, u – параметр натягу сплайну. Якщо $u = 0$, маємо різновид фундаментального сплайну, а саме сплайн Катмалл–Рома.

При дослідженні моделювання геометричних фрактальних просторових кривих знайдено умови ізотропності та побудовані ізотропні трикутна та квадратична криві Коха, криві «кущ», дерево Піфагора. Розрахована розмірність Хаусдорфа–Безікевича.

П'ятий розділ присвячено моделюванню поверхонь на основі ізотропних кривих. Поверхня в комплексному просторі визначається кінематичним способом за допомогою руху однією ізотропною кривою (твірною) за іншими заданими ізотропними кривими (напрямними). За допомогою виділення окремо дійсної та уявної частини будемо мати дві поверхні для дослідження:

$$\begin{aligned}
x_{\text{Re}}(u, v) &= \text{Re}(x(u, v)), \quad y_{\text{Re}}(u, v) = \text{Re}(y(u, v)), \quad z_{\text{Re}}(u, v) = \text{Re}(z(u, v)); \\
x_{\text{Im}}(u, v) &= \text{Im}(x(u, v)), \quad y_{\text{Im}}(u, v) = \text{Im}(y(u, v)), \quad z_{\text{Im}}(u, v) = \text{Im}(z(u, v)).
\end{aligned}$$

Поверхня будується на основі напрямної ізотропної кривої та конформної ($t = u + vi$) або квазіконформної ($t = ku + iv$ або $t = u + ikv$) заміни параметра:

$$\begin{aligned}
x_{\text{Re}}(u, v) &= \text{Re}(x(t)), \quad y_{\text{Re}}(u, v) = \text{Re}(y(t)), \quad z_{\text{Re}}(u, v) = \text{Re}(z(t)); \\
x_{\text{Im}}(u, v) &= \text{Im}(x(t)), \quad y_{\text{Im}}(u, v) = \text{Im}(y(t)), \quad z_{\text{Im}}(u, v) = \text{Im}(z(t)),
\end{aligned} \tag{35}$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – просторова параметрична ізотропна крива.

Якщо в рівнянні поверхні (35) вирази $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ визначають площку ізотропну криву, тоді будемо мати ізотропну сітку на площині. При конформній заміні параметра виділення дійсної та уявної частини дає змогу одержувати мінімальні та приєднані мінімальні поверхні в дійсному просторі. Для дослідження поверхонь розраховуються коефіцієнти першої та другої квадратичних форм, середня кривина. Моделювання мінімальних поверхонь здійснюється на основі просторових кривих, що були досліджені у попередньому розділі.

Рівняння мінімальної поверхні на основі напрямної кривої Без'є n -го порядку (3) має вигляд:

$$\mathbf{r}_{\text{Re}}(u, v) = \text{Re}\left(\sum_{j=0}^n \mathbf{r}_j J_{n,j}(u + iv)\right), \quad J_{n,j}(u + iv) = \frac{n!}{j!(n-j)!} t^j (1-u-iv)^{n-j}, \tag{36}$$

де $\mathbf{r}_j = [x_{j\text{Re}} + x_{j\text{Im}} \quad y_{j\text{Re}} + y_{j\text{Im}} \quad z_{j\text{Re}} + z_{j\text{Im}}]$, $j = 0..n$.

Будемо досліджувати мінімальну поверхню на основі кубічної ізотропної кривої Без'є з узагальненим рівнянням (37):

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\text{Re}}(u, v) = & \mathbf{r}_{0\text{Re}}(1 - 3u + 3u^2 - 3v^2 - u^3 + 3uv^2) - \mathbf{r}_{0\text{Im}}(-3v + 6uv - 3u^2v + \\
& + v^3) - (-3\mathbf{r}_{1\text{Re}}(1 - 2u + u^2 - v^2) + 3\mathbf{r}_{1\text{Im}}(-2v + 2uv))u + (-3\mathbf{r}_{1\text{Im}}(1 - 2u + \\
& + u^2 - v^2) - 3\mathbf{r}_{1\text{Re}}(-2v + 2uv))v - (-3\mathbf{r}_{2\text{Re}}(1 - u) - 3\mathbf{r}_{2\text{Im}}v)(u^2 - v^2) + \\
& + 2(-3\mathbf{r}_{2\text{Im}}(1 - u) + 3\mathbf{r}_{2\text{Re}}v)uv + \mathbf{r}_{3\text{Re}}(u^3 - 3uv^2) - \mathbf{r}_{3\text{Im}}(3u^2v - v^3).
\end{aligned} \tag{37}$$

У роботі знайдені рівняння мінімальних поверхонь на основі різних способів побудови ізотропних напрямних кривих Без'є.

- *напрямна ізотропна крива Без'є створюється на основі аналітичної функції (рис. 7а) :*

$$\mathbf{r}(u + iv) = \text{Re}[\mathbf{r}_0(1 - u - iv)^3 + 3\mathbf{r}_1(1 - u - iv)^2(u + iv) + 3\mathbf{r}_2(1 - u - iv)(u + iv)^2 + \mathbf{r}_3(u + iv)^3],$$

$$\text{де } \mathbf{r}_0[(a_0 - a_2)i \quad a_0 + a_2 \quad -a_1i], \quad \mathbf{r}_1[(a_0 - a_2 - a_3)i \quad a_0 + a_2 + a_3 \quad -a_1i],$$

$$\mathbf{r}_2[(a_0 - a_2 - 2a_3)i \quad a_0 + a_2 + 2a_3 \quad (a_3 - a_1)i],$$

$$\mathbf{r}_3[(a_0 - a_2 - 2a_3)i \quad a_0 + a_2 + 4a_3 \quad (3a_3 - a_1)i].$$

- *напрямна крива будується за допомогою деформації плоскої кривої:*

$$\begin{aligned}
x(u, v) = & x_0(1 - 3u + 3u^2 - 3v^2 - u^3 + 3uv^2) + 3x_1(1 - 2u + u^2 - v^2)u - 6x_1(-v + \\
& + uv)v + 3x_2(1 - u)(u^2 - v^2) + 6x_2v^2u + \left[\frac{-(z_2 - z_0)^2 + (x_2 - x_1)^2}{x_1 - x_0} + x_2 \right] (u^3 - 3uv^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(u, v) = & y_0(1 - 3u + 3u^2 - 3v^2 - u^3 + 3uv^2) + 3(y_0(1 - 2u + u^2 - v^2) - 2(x_1 - \\
& - x_0)(-v + uv))u - 3((x_1 - x_0)(1 - 2u + u^2 - v^2) + 2y_0(-v + uv))v + 3(y_0(1 - u) + \\
& + (x_2 - x_0)v)(u^2 - v^2) - 6((x_2 - x_0)(1 - u) - y_0v)uv + y_0(u^3 - 3uv^2) - \\
& - \left[\frac{(z_2 - z_0)^2 + (x_2 - x_1)^2}{x_1 - x_0} + x_2 - x_0 \right] (3vu^2 - v^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(u, v) = & z_0(1 - 3u + 3u^2 - 3v^2 - u^3 + 3uv^2) + 3z_0(1 - 2u + u^2 - v^2)u - 6z_0(-v + \\
& + uv)v + 3z_2(1 - u)(u^2 - v^2) + 6z_2uv^2 + \left[\frac{2(x_2 - x_1)(z_2 - z_0)}{x_1 - x_0} + z_2 \right] (u^3 - 3uv^2),
\end{aligned}$$

де $r_j = r_{j\text{Re}} + r_{j\text{Im}}i$, $j = 0..3$.

У роботі доведено, що для мінімальної поверхні, яка побудована на основі деформації плоскої кривої координатні лінії є *лініями кривини*, тобто $M = 0$.

- *напрямна крива Без'є будується на основі апроксимаційних алгоритмів (рис. 7б):*

$$\begin{aligned}
x(u, v) = & \text{Re}[x_0(1 - u - vi)^3 + 3x_1(1 - u - vi)^2(u + vi) + 3x_2(1 - u - vi)(u + \\
& + vi)^2 + x_3(u + vi)^3],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(u, v) = & \text{Re}[y_0(1 - u - vi)^3 + 3y_1(1 - u - vi)^2(u + vi) + 3y_2(1 - u - vi)(u + \\
& + vi)^2 + y_3(u + vi)^3],
\end{aligned}$$

$$z(u, v) = \operatorname{Re}[i \{ (x_0(1-u-vi)^3 + 3x_1(1-u-vi)^2(u+vi) + 3x_2(1-u-vi)(u+vi)^2 + x_3(u+vi)^3)^2 + (y_0(1-u-vi)^3 + 3y_1(1-u-vi)(u+vi)^2 + y_2(1-u-vi)(u+vi)^2 + y_3(u+vi)^3)^2 \}],$$

де $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3$ – координати дійсної плоскої кубічної кривої Без'є.

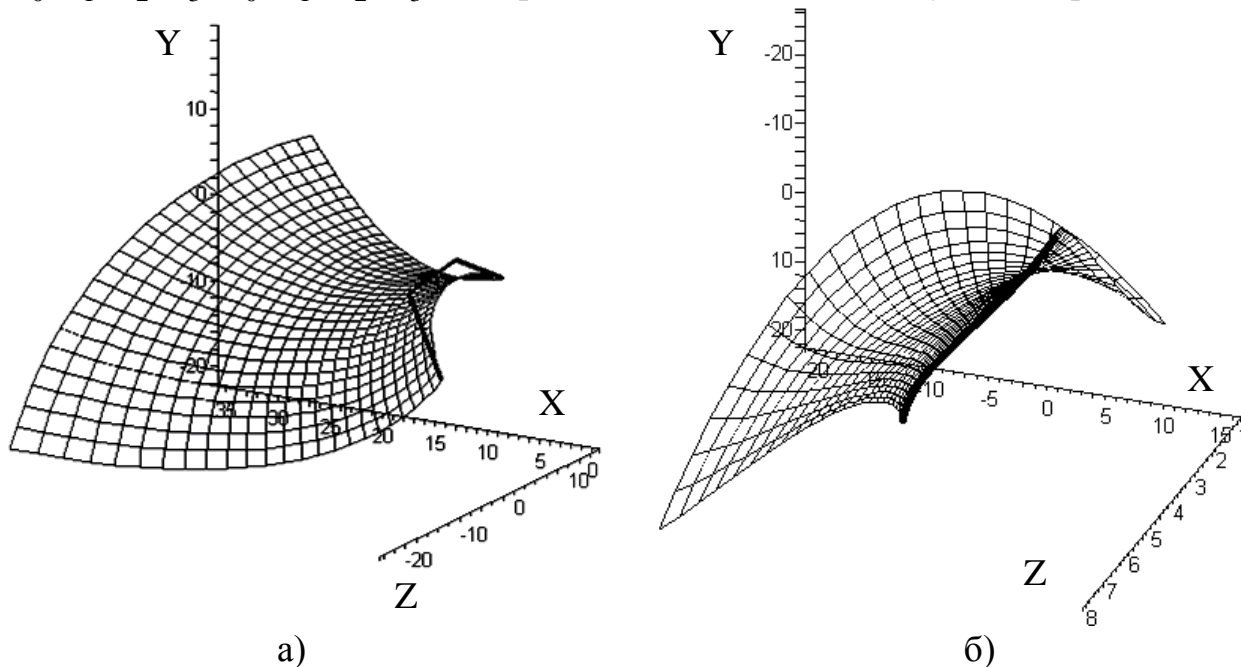


Рис. 7. Мінімальні поверхні з напрямною ізотропною кривою Без'є, що побудована: а) на основі аналітичної функції; б) апроксимації многочленами Чебишева

- напрямна крива будується на основі геодезичних кривих Без'є. Знайдені обмеження, що накладаються на координати напрямної кривої:

$$\begin{aligned} -(x_{1\operatorname{Im}} - x_{0\operatorname{Im}}) &= 6(y_{1\operatorname{Re}} - y_{0\operatorname{Re}})(z_{2\operatorname{Re}} - z_{1\operatorname{Re}}) - 6(z_{1\operatorname{Re}} - z_{0\operatorname{Re}})(y_{2\operatorname{Re}} - y_{1\operatorname{Re}}); \\ -(x_{2\operatorname{Im}} - x_{1\operatorname{Im}}) &= 3(y_{1\operatorname{Re}} - y_{0\operatorname{Re}})(z_{3\operatorname{Re}} - z_{2\operatorname{Re}}) - 3(z_{1\operatorname{Re}} - z_{0\operatorname{Re}})(y_{3\operatorname{Re}} - y_{2\operatorname{Re}}); \\ -(x_{3\operatorname{Im}} - x_{2\operatorname{Im}}) &= 6(y_{2\operatorname{Re}} - y_{1\operatorname{Re}})(z_{3\operatorname{Re}} - z_{2\operatorname{Re}}) - 6(z_{2\operatorname{Re}} - z_{1\operatorname{Re}})(y_{3\operatorname{Re}} - y_{2\operatorname{Re}}); \\ -(y_{1\operatorname{Im}} - y_{0\operatorname{Im}}) &= 6(z_{1\operatorname{Re}} - z_{0\operatorname{Re}})(x_{2\operatorname{Re}} - x_{1\operatorname{Re}}) - 6(x_{1\operatorname{Re}} - x_{0\operatorname{Re}})(z_{2\operatorname{Re}} - z_{1\operatorname{Re}}); \\ -(y_{2\operatorname{Im}} - y_{1\operatorname{Im}}) &= 3(z_{1\operatorname{Re}} - z_{0\operatorname{Re}})(x_{3\operatorname{Re}} - x_{2\operatorname{Re}}) - 3(x_{1\operatorname{Re}} - x_{0\operatorname{Re}})(z_{3\operatorname{Re}} - z_{2\operatorname{Re}}); \\ -(y_{3\operatorname{Im}} - y_{2\operatorname{Im}}) &= 6(z_{2\operatorname{Re}} - z_{1\operatorname{Re}})(x_{3\operatorname{Re}} - x_{2\operatorname{Re}}) - 6(x_{2\operatorname{Re}} - x_{1\operatorname{Re}})(z_{3\operatorname{Re}} - z_{2\operatorname{Re}}). \end{aligned} \quad (38)$$

Якщо геодезична напрямна буде будуватися на основі деформації плоскої кривої, тоді рівняння (38) призводять до наступних обмежень:

$$z_{2\operatorname{Re}} = 1/6 + z_{0\operatorname{Re}}; \quad x_{2\operatorname{Im}} = \frac{x_{1\operatorname{Im}}(x_{2\operatorname{Re}} - x_{0\operatorname{Re}}) - x_{0\operatorname{Im}}(x_{2\operatorname{Re}} - x_{1\operatorname{Re}})}{x_{1\operatorname{Re}} - x_{0\operatorname{Re}}}.$$

У цьому випадку напрямна крива перетворюється на пряму лінію, оскільки що є лінією кривини та геодезичною.

- напрямна крива будується на основі кривих Без'є та методу спряжених градієнтів. Для побудови мінімальної поверхні на основі ізотропної кубічної кривої Без'є в загальному вигляді необхідно розв'язати систему нелінійних (квадратичних) рівнянь (30). У роботі запропоновано скористатися одним із нелінійних методів

спряжених градієнтів, а саме методом Полака і Ріб'єра. Виходячи з рівняння (30), сформовано цільову функцію оптимізації:

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & \text{norm} \left(\sum_{r=x,y,z} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)^2 \right) + \text{norm} \left(\sum_{r=x,y,z} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right) + \\
 & + \text{norm} \left(2 \sum_{r=x,y,z} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 + \sum_{r=x,y,z} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \right) + \\
 & + \text{norm} \left(\sum_{r=x,y,z} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \right) + \text{norm} \left(\sum_{r=x,y,z} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)^2 \right) \rightarrow \min.
 \end{aligned}$$

Інтерактивний метод керування мінімальною поверхнею полягає в повторенні процесу мінімізації кожного разу, при зміні користувачем положення контрольних точок у просторі. В даному випадку як початкові значення координат точок $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ використовуються їх попередні значення.

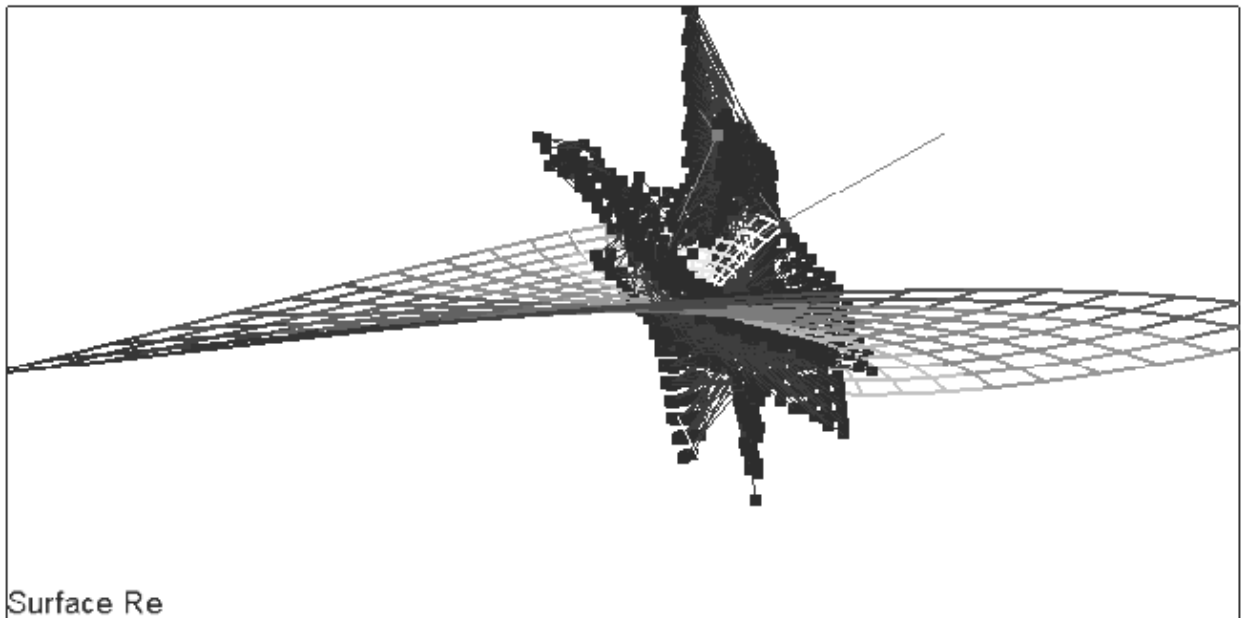


Рис. 8. Дискретні сліди внутрішніх точок характеристичного чотирикутника напрямної кривої, які замітають деякі поверхні у комплексному просторі

В результаті застосування наведеного алгоритму, отримано дискретні сліди внутрішніх точок характеристичного чотирикутника напрямної кривої, які замітають деякі поверхні в комплексному просторі (рис.8). Для візуалізації хмар точок використано один із методів об'ємної візуалізації.

Розглянуто моделювання мінімальних поверхонь з напрямними ізотропними кубічними дробово-раціональними кривими (на основі аналітичної функції, на основі деформації плоскої кривої), з напрямною кривою за годографом Піфагора, з ізотропним фундаментальним сплайном.

У роботі запропоновано моделювати поверхні на основі квазіконформної заміни параметра.

Узагальнене рівняння поверхні на основі кривої Без'є:

– при заміні $t=u+ikv$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{Re}}(u, v) = & \mathbf{r}_{0\text{Re}}(1-3u+3u^2-3v^2k^2-u^3+3uv^2k^2) - \mathbf{r}_{0\text{Im}}(-3vk+6uvk- \\ & -3u^2vk+v^3k^3) - (-3\mathbf{r}_{1\text{Re}}(1-2u+u^2-v^2k^2) + 3\mathbf{r}_{1\text{Im}}(-2vk+2uvk))u + \\ & + (-3\mathbf{r}_{1\text{Im}}(1-2u+u^2-v^2k^2) - 3\mathbf{r}_{1\text{Re}}(-2vk+2uvk))vk - (-3\mathbf{r}_{2\text{Re}}(1-u) - \\ & -3\mathbf{r}_{2\text{Im}}vk)(u^2-v^2k^2) + 2(-3\mathbf{r}_{2\text{Im}}(1-u) + 3\mathbf{r}_{2\text{Re}}vk)uvk + \mathbf{r}_{3\text{Re}}(u^3 - \\ & -3uv^2k^2) - \mathbf{r}_{3\text{Im}}(3u^2vk-v^3k^3). \end{aligned} \quad (39)$$

– при заміні $t=ku+iv$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{Re}}(u, v) = & \mathbf{r}_{0\text{Re}}(1-3uk+3u^2k^2-3v^2-u^3k^3+3uv^2k) - \mathbf{r}_{0\text{Im}}(-3v+6uvk- \\ & -3u^2vk^2+v^3) - (-3\mathbf{r}_{1\text{Re}}(1-2uk+u^2k^2-v^2) + 3\mathbf{r}_{1\text{Im}}(-2v+2uvk))uk + \\ & + (-3\mathbf{r}_{1\text{Im}}(1-2uk+u^2k^2-v^2) - 3\mathbf{r}_{1\text{Re}}(-2v+2uvk))v - (-3\mathbf{r}_{2\text{Re}}(1-uk) - \\ & -3\mathbf{r}_{2\text{Im}}v)(u^2k^2-v^2) + 2(-3\mathbf{r}_{2\text{Im}}(1-uk) + 3\mathbf{r}_{2\text{Re}}v)uvk + \mathbf{r}_{3\text{Re}}(u^3k^3 - \\ & -3uv^2k) - \mathbf{r}_{3\text{Im}}(3u^2vk^2-v^3). \end{aligned} \quad (40)$$

Аналізуючи поверхні, побудовані на основі напрямної ізотропної кривої Без'є та аналітичної функції при $t=u+ikv$ було виявлено, що:

$$F = 0. E \neq G \Rightarrow k^2E = G, k^2L = -N, M = \frac{a_{3\text{Re}}Lk}{a_{3\text{Im}}}, H = 0.$$

Для віднесення цієї поверхні до ліній кривини, необхідно щоб $a_{3\text{Re}} = 0$, для віднесення поверхні до асимптотичних ліній - $a_{3\text{Im}} = 0$.

Було сформульовано та доведено твердження:

Твердження 8. При квазіконформній заміні параметра на $t=ku+iv$ або $t=u+ikv$ у рівнянні ізотропної кривої матимемо рівняння мінімальної поверхні.

На рис. 9. відображено приклади поверхонь, побудованих на основі квазіконформної заміни параметра.

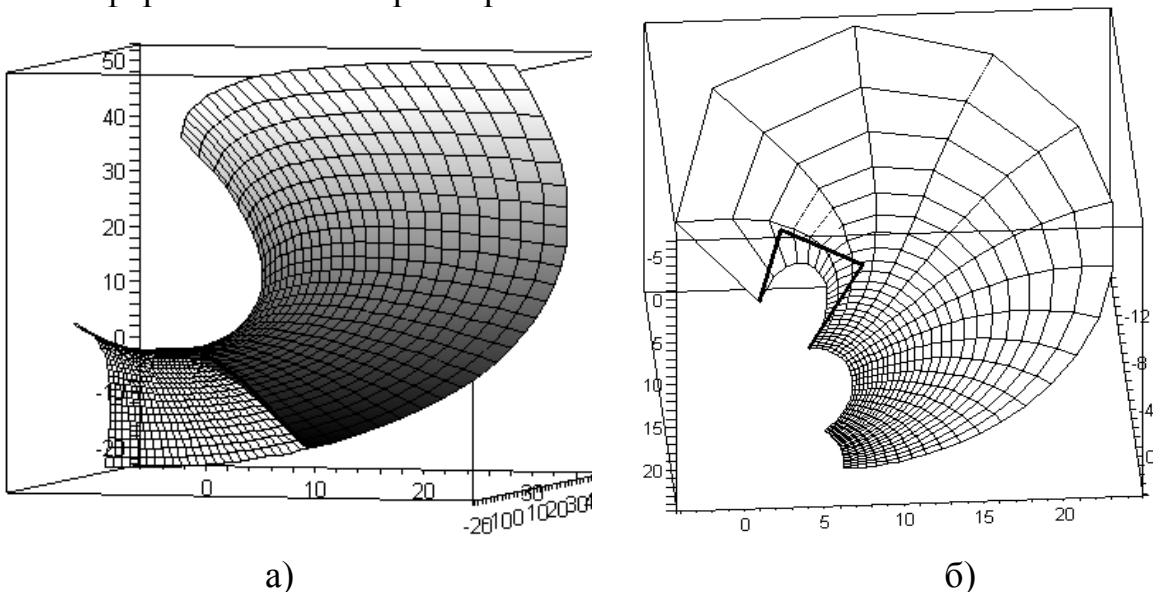


Рис. 9. Мінімальні поверхні на основі квазіконформної заміни параметра та а) кривої Без'є і аналітичної функції ; б) дробово-раціональної кривої

У роботі пропонується застосувати плоскі сітки, які було створено у розділі 3 для моделювання поверхонь. Розглянуто моделювання поверхонь з ортогональними сітками та сітками для яких $E=G$.

– Поверхні з ортогональними сітками будуються на основі розподілу однієї сім'ї плоскої сітки по висоті за будь-яким законом.

При формуванні сітки за кубічною напрямною кривою Без'є розподіл за висотою здійснюється на основі кубічного закону (рис.10):

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}(x_0(1-t)^3 + 3x_1(1-t)^2t + 3x_2(1-t)t^2 + x_3t^3), \\ y(t) &= \operatorname{Re}(y_0(1-t)^3 + 3(i(x_1-x_0)+y_0)(1-t)^2t + 3(i(x_2-x_1)+i(x_1-x_0)+y_0)t^2 + \\ &+ (i(x_3-x_2)+i(x_2-x_1)+i(x_1-x_0)+y_0)t^3), \end{aligned} \quad (41)$$

$$z(u) = \operatorname{Re}(z_0(1-u)^3 + 3z_1(1-u)^2u + 3z_2(1-u)u^2 + z_3u^3), \text{ або}$$

$$z(v) = \operatorname{Re}(z_0(1-v)^3 + 3z_1(1-v)^2v + 3z_2(1-v)v^2 + z_3v^3),$$

де $t=u+iv$, або $t=u+ikv$, або $t=ku+iv$.

Знайдені вирази, за яких поверхня (41) з $z = z(u)$ буде віднесена до ліній кривини:

$$x_2 = -x_0 + 2x_1, \quad x_3 = x_0 - 3x_1 + 3x_2. \quad (42)$$

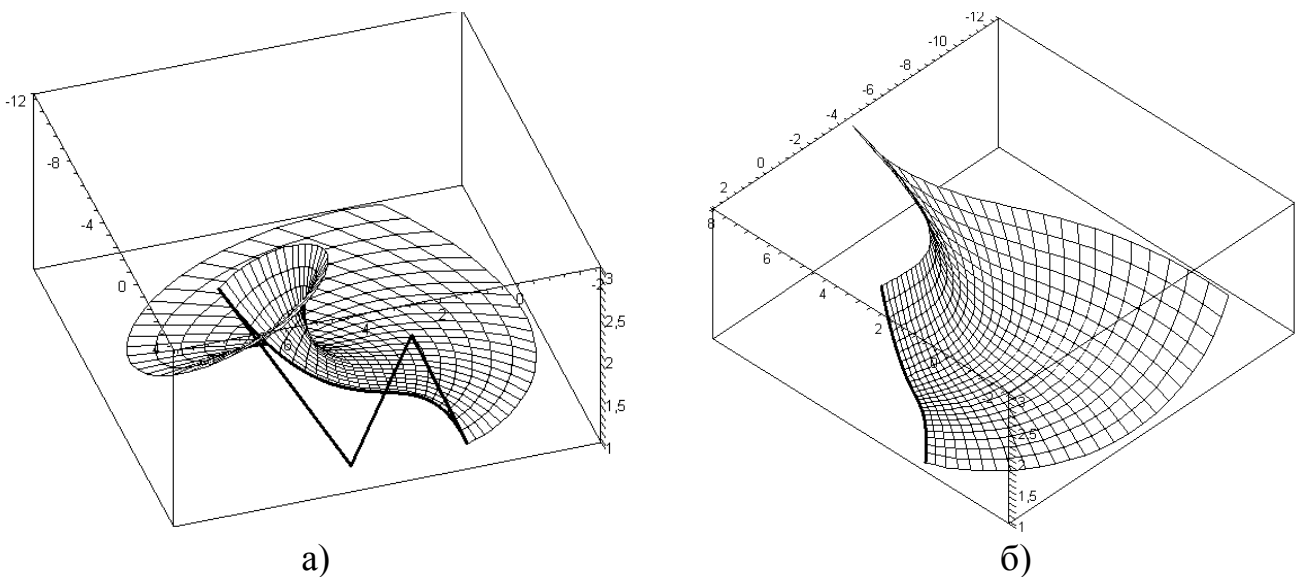


Рис. 10. Поверхні на основі плоскої ізотропної сітки при завданні: а) $t=u+iv$; б) $t=0.5u+iv$

Розглянуто моделювання поверхонь з ортогональними сітками на основі плоских склеєних сіток. Було сформульовано та доведено твердження:

Твердження 9. Для гладкого поєднання поверхонь, побудованих на основі плоских сіток, достатньо виконати умову гладкого поєднання напрямних ізотропних кривих.

– Поверхні з координатними лініями, для яких $E = G$.

Якщо обирати третю координату у вигляді полінома, то залежність $E = G$ можна одержати, якщо функція матиме вигляд:

$$z(t) = \operatorname{Re}(z_0(1-t)^3 + 3z_1(1-t)^2t + 3z_2(1-t)t^2 + z_3t^3), \text{ де } t = |u| + |v|. \quad (43)$$

Якщо у виразі (43) $t = u + v$ або $t = u - v$, тоді z_0, z_1, z_2, z_3 визначають треті координати для реперних точок характеристичного чотирикутника напрямної просторової кривої Без'є. Якщо $t = -u + v$ або $t = -u - v$, тоді координати z точок характеристичного многокутника необхідно розраховувати додатковими методами.

У роботі розглянуто моделювання поверхонь на основі плоских сіток з напрямними у дробово-раціональному вигляді (рис.11), параметричної функції Лагранжа.

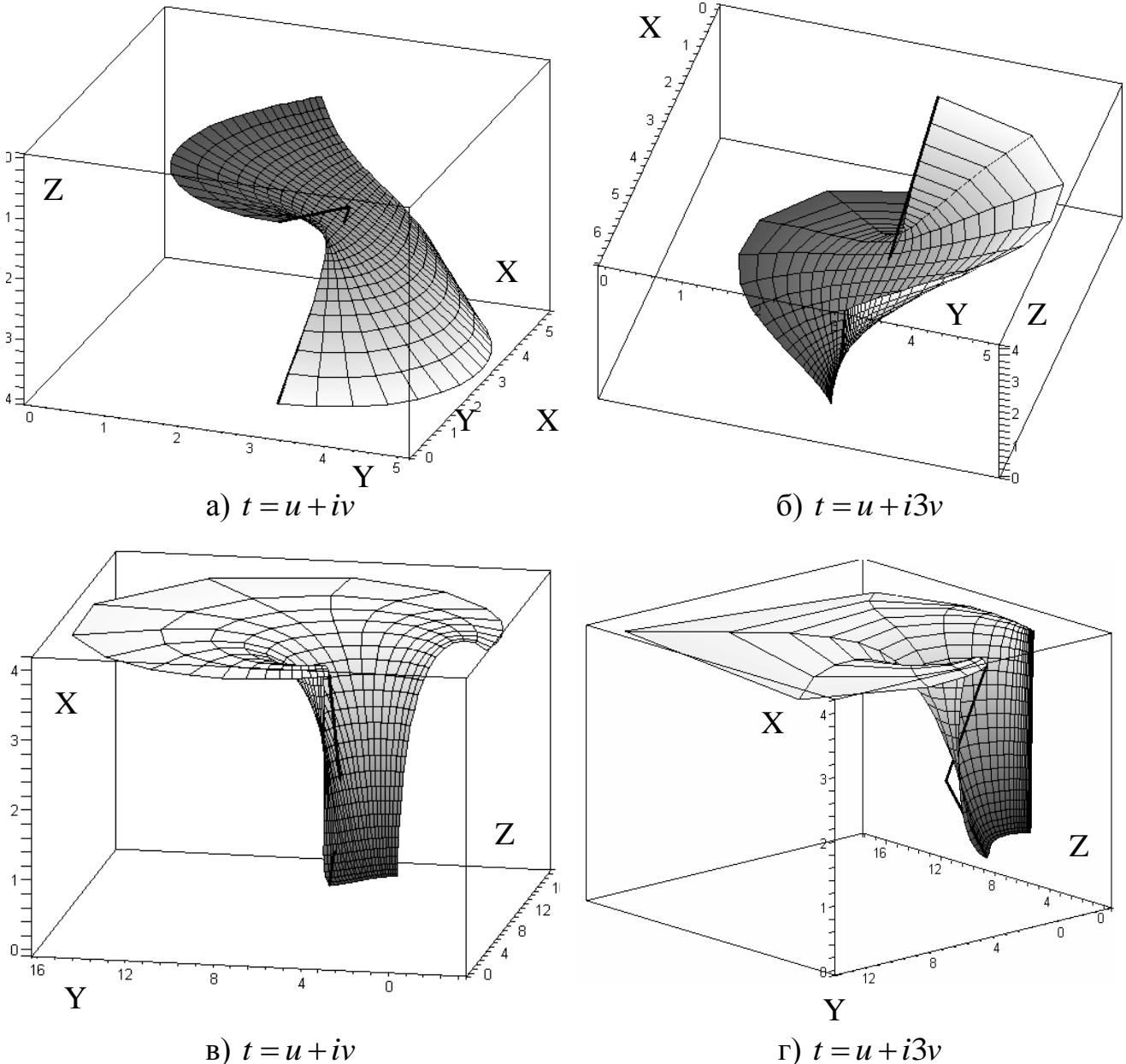


Рис. 11. Поверхня на основі дробово-раціональної кривої 2-го порядку та плоскої ізотропної сітки а), б) дійсні значення ваги; в), г) комплексні значення ваги

Шостий розділ присвячено застосуванню кватерніонів для побудови кривих і поверхонь. Для розширення способів моделювання геометричних кривих та поверхонь доцільно застосувати алгебру кватерніонів, які створюються в результаті подвоєння алгебри комплексних чисел. Кватерніони не комутативні за операцією множення, тому застосовувати їх повною мірою не завжди можливо.

У роботі розглядається застосування підкласу кватерніонів із тривимірною уявною одиницею, а саме кватерніонів із колінеарною векторною частиною. Кватерніон із колінеарною векторною частиною у тригонометричному вигляді має вигляд:

$$\mathbf{q} = |\mathbf{q}|(\cos\varphi + \mathbf{I} \cdot \sin\varphi) = |\mathbf{q}|e^{\mathbf{I}\varphi(t)}, \quad |\mathbf{I}| = 1. \quad (44)$$

Вираз (44) застосовано для визначення ізотропних кривих та поверхонь. Ізотропність відрізка на основі кватерніону із колінеарною векторною частиною буде визначатись на основі співвідношень:

$$(x_{1\text{Re}} - x_{0\text{Re}})^2 - (x_{1\text{Im}} - x_{0\text{Im}})^2 = -(y_{1\text{Re}} - y_{0\text{Re}})^2 + (y_{1\text{Im}} - y_{0\text{Im}})^2, \quad (45)$$

$$(x_{1\text{Re}} - x_{0\text{Re}})(x_{1\text{Im}} - x_{0\text{Im}}) = -(y_{1\text{Re}} - y_{0\text{Re}})(y_{1\text{Im}} - y_{0\text{Im}}).$$

Координати кожної точки ізотропних відрізків будуть визначатися у вигляді:

$$\mathbf{q}_I = \mathbf{q}_{I\text{Re}} + \mathbf{q}_{I\text{Im}}x_I \cdot i + \mathbf{q}_{I\text{Im}}y_I \cdot j + \mathbf{q}_{I\text{Im}}z_I \cdot k. \quad (46)$$

Ізотропна крива Без'є з ізотропними сторонами характеристичного многокутника на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною:

$$x(t) = \sum_{j=0}^n x_j J_{n,j}(t), \quad y(t) = y_0 + \mathbf{I} \sum_{j=1}^n (x_j - x_0) J_{n,j}(t), \quad (47)$$

$$\mathbf{I} = x_I i + y_I j + z_I k, \quad |\mathbf{I}| = 1.$$

Якщо у рівнянні (47) виконати конформну заміну $t = u + \mathbf{I}v$ і відокремити окремо дійсну частину, то одержимо плоску ортогональну та ізотермічну сітку. При відокремленні уявних частин одержимо три сітки, які будуть відрізнятись на значення координат уявної тривимірної одиниці (рис.12).

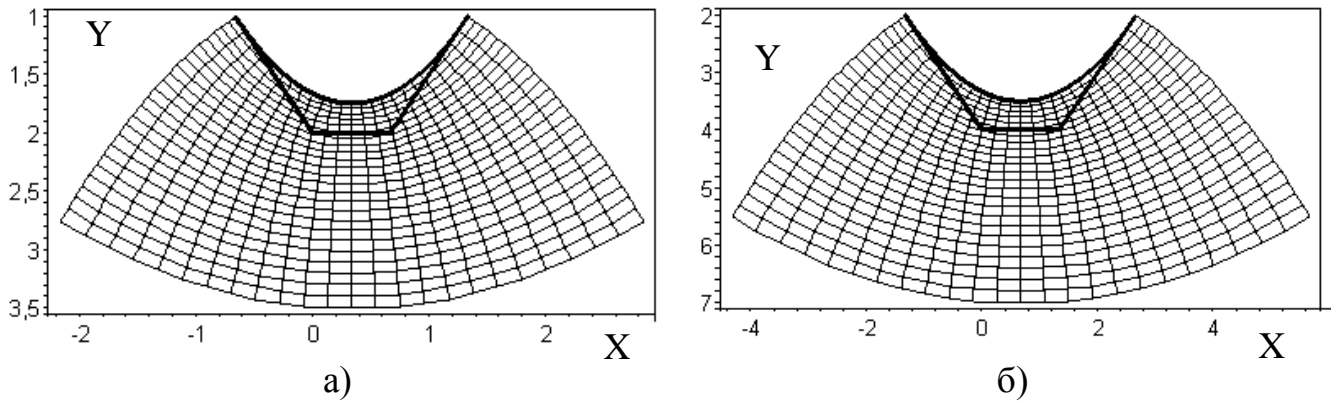


Рис. 12. Відображення а) сітки Im_i , б) сітки Im_j

Розглянемо квазіконформну заміну $t = u + k\mathbf{I}v$. Якщо ввести поняття довжини тривимірної одиниці, тоді змінна k буде довжиною багатовимірної одиниці.

У роботі розглядається моделювання сім'ї ізотропних просторових кривих за годографом Піфагора (РН- кривих) на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною, яка визначається у вигляді:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{i}\mathbf{A}^*(t) = [u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)]i + \quad (48)$$

$$+ 2[u(t)q(t) + v(t)p(t)]j + 2[v(t)q(t) - u(t)p(t)]k,$$

де $\mathbf{A}(t) = u(t) + v(t)i + p(t)j + q(t)k$ – кватерніонний поліном,

$\mathbf{A}^*(t) = u(t) - v(t)i - p(t)j - q(t)k$ – спряжений кватерніонний поліном.

Співвідношення (48) визначає РН-структуру у просторі \mathbf{R}^3 (\mathbf{j} або \mathbf{k} можна поставити замість \mathbf{i} , що визначить перестановку поліномів $u(t)$, $v(t)$, $p(t)$, $q(t)$).

Для кватерніонів із колінеарними векторними частинами вираз (48) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{i}\mathbf{A}^*(t) &= [u^2(t) + v^2(t)x_I^2 - v^2(t)y_I^2 - v^2(t)z_I^2]i + \\ &+ 2[u(t)v(t)z_I + v^2(t)x_I y_I]j + 2[v^2(t)x_I z_I - u(t)v(t)y_I]k, \end{aligned} \quad (49)$$

де $\mathbf{A}(t) = u(t) + v(t)x_I i + v(t)y_I j + v(t)z_I k$,

$$\mathbf{A}^*(t) = u(t) - v(t)x_I i - v(t)y_I j - v(t)z_I k, \quad u(t) = u_a(1-t) + u_b t, \quad v(t) = v_a(1-t) + v_b t$$

Знайдено вирази для обчислення координат кубічної РН-кривої у вигляді Без'є на основі тривимірної уявної одиниці:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_a^2 + v_a^2(x_I^2 - y_I^2 - z_I^2)}{3} + x_0; \quad x_2 = \frac{u_a u_b + v_a v_b(x_I^2 - y_I^2 - z_I^2)}{3} + x_1; \\ x_3 &= \frac{u_b^2 + v_b^2(x_I^2 - y_I^2 - z_I^2)}{3} + x_2; \quad y_1 = \frac{2}{3}[u_a v_a z_I + v_a^2 y_I] + y_0; \\ y_2 &= \frac{u_b v_a z_I + u_a v_b z_I + 2v_b v_a x_I y_I}{3} + y_1; \quad y_3 = \frac{2}{3}[u_b v_b z_I + v_b^2 y_I] + y_2; \\ z_1 &= \frac{2}{3}[v_a^2 z_I - u_a v_a y_I] + z_0; \quad z_2 = \frac{2v_b v_a x_I z_I - u_b v_a y_I - u_a v_b y_I}{3} + z_1; \\ z_3 &= \frac{2}{3}[v_b^2 z_I - u_b v_b y_I] + z_2. \end{aligned} \quad (50)$$

Змінюючи значення багатовимірної уявної одиниці, одержимо сім'ю РН-кривих. При однакових довжинах багатовимірних уявних одиниць матимемо сім'ю кривих з однаковими довжинами кривих. У роботі знайдена умова для моделювання ізотропної кривої на основі кватерніонних поліномів із колінеарною векторною частиною.

$$v_{b1,2} = \frac{1}{2} \left[-v_a \pm i \sqrt{3v_a^2 + \frac{4(u_a^2 + u_a u_b + u_b^2)}{(x_I^2 + y_I^2 + z_I^2)}} \right]. \quad (51)$$

Змінюючи багатовимірну уявну одиницю одержимо сім'ю ізотропних РН-кривих.

Було розглянуто моделювання сферичних та гіперсферичних кривих. Сферичні криві будуються за допомогою кватерніонів обертання, а гіперсферичні криві визначались на основі рівняння:

$$\mathbf{q}(t) = \cos \frac{\theta}{2}(t) + \sin \frac{\theta}{2}(t) \cdot \mathbf{I}(t), \quad (52)$$

де $\mathbf{I}(t)$ – одиничний тривимірний вектор, що належить тривимірній сфері $S^2 \subset R^3$.

У роботі розглянуто залежності для побудови ізотропного відрізка на основі повних кватерніонів та знайдені координати для просторової РН-кривої у вигляді кривої Без'є 5-го порядку за виразом (48), якщо

$$u(t) = u_a(1-t)^2 + 2u_b(1-t)t + u_c t^2, v(t) = v_a(1-t)^2 + 2v_b(1-t)t + v_c t^2, \\ p(t) = p_a(1-t)^2 + 2p_b(1-t)t + p_c t^2, q(t) = q_a(1-t)^2 + 2q_b(1-t)t + q_c t^2.$$

Залежності для ізотропності довжини кривої визначаються на основі виразу:

$$\sum_{f=u,v,p,q} \frac{1}{5} f_a^2 + \frac{1}{5} f_a f_b + \frac{1}{15} f_a f_c + \frac{2}{15} f_b^2 + \frac{1}{5} f_b f_c + \frac{1}{5} f_c^2 = 0 \quad (53)$$

Знайдено координати РН-кривої у вигляді полінома Лагранжа 5-го порядку та розглянуто моделювання ізотропних кривих у чотирирівимірному просторі .

При застосуванні ізотропної РН-кривої для моделювання поверхні, поверхня не буде мінімальною. Знайдені умови, за якими кубічні ізотропні РН – криві визначають мінімальні поверхні:

$$v_a = \mathbf{I} \frac{u_a}{\sqrt{x_I^2 + y_I^2 + z_I^2}}; \quad v_b = \mathbf{I} \frac{u_b}{\sqrt{x_I^2 + y_I^2 + z_I^2}}. \quad (54)$$

При нормованій тривимірній уявній одиниці одержимо:

$$v_a = \mathbf{I} u_a; \quad v_b = \mathbf{I} u_b. \quad (55)$$

Поверхні за умовами (54) та (55) вироджується у ортогональну та ізотермічну плоску сітку, тобто $F=0$, $E=G$.

Розглянуто моделювання мінімальних поверхонь на основі ізотропних кривих із колінеарною векторною частиною та формулами Вейєрштрасса. Поверхні визначаються тривимірною уявною одиницею. При розкладанні тривимірної уявної частини на скалярні уявні одиниці одержимо тривимірні проєкції змодельованих поверхонь:

$$x_n(u, v) = \text{Im}_n \{x\}, \quad y_n(u, v) = \text{Im}_n \{y\}, \quad z_n(u, v) = \text{Im}_n \{z\}, \quad \text{де } n = i, j, k. \quad (56)$$

Під тривимірною проєкцією будемо розуміти поверхню, яка відповідає одній з уявних координат i , j або k . Рівняння (56) визначають три поверхні, які будуть відрізнятися масштабними коефіцієнтами. Коефіцієнти відповідатимуть координатам тривимірного вектора x_I, y_I, z_I .

Сьомий розділ присвячено застосуванню методів, що описуються за допомогою уявних величин, у прикладних задачах.

Для дослідження плоских сіток з визначеними першими квадратичними формами й мінімальних поверхонь було створено програмне забезпечення, впроваджене в навчальний процес при вивченні дисциплін «Геометричне моделювання в САПР», «3D моделювання та візуалізація», «Комп'ютерна графіка та геометричне моделювання» в розділі «Геометричне моделювання кривих та поверхонь» і «Твердотільне проектування» (стосовно питань оптимізації графічного конвеєра, створення інтерактивного режиму користувача). Для оптимізації процесу розрахунку точок кривої Без'є було проведено перенесення коду алгоритму нелінійного методу спряжених градієнтів на платформу Compute Unified Device Architecture версії 1.2. Успіх реалізації методу нелінійної оптимізації на процесорі SIMD-архітектури дає підстави вважати, що дизайн мінімальної поверхні можна проводити цілком в інтерактивному режимі.

Фізико-механічні, а відтак і споживчі властивості трикотажу залежать від властивостей та механічної поведінки пряжі чи ниток і від особливостей їх

розташування в його структурі. Тому питання коректного відображення конфігурації нитки у структурі полотна є одним із ключових при розробці підсистем САПР трикотажу, спрямованих на тривимірне геометричне моделювання його структури. Геометричні параметри полотна, що виконано з нетермопластичних ниток, визначаються довжиною нитки в петлі (модулем петлі), лінійною щільністю нитки, її волокнистим складом, коефіцієнтом крутки та виглядом переплетення, тому вибір правильного співвідношення між лінійною щільністю та довжиною нитки в петлі відіграє дуже важливу роль. Конфігурація осьової лінії нитки була змодельована на основі теорії сплайнів (кривої Без'є, сплайна Катмулл-Рома). Для моделювання тривимірних геометричних моделей петель з крученої пряжі було запропоновано застосувати кватерніони обертання. На рис. 13 відображено тривимірні моделі пряжі, а на рис. 14 відображено модель петлі з крученої пряжі на основі нитки, що виготовлена з однієї сировини.

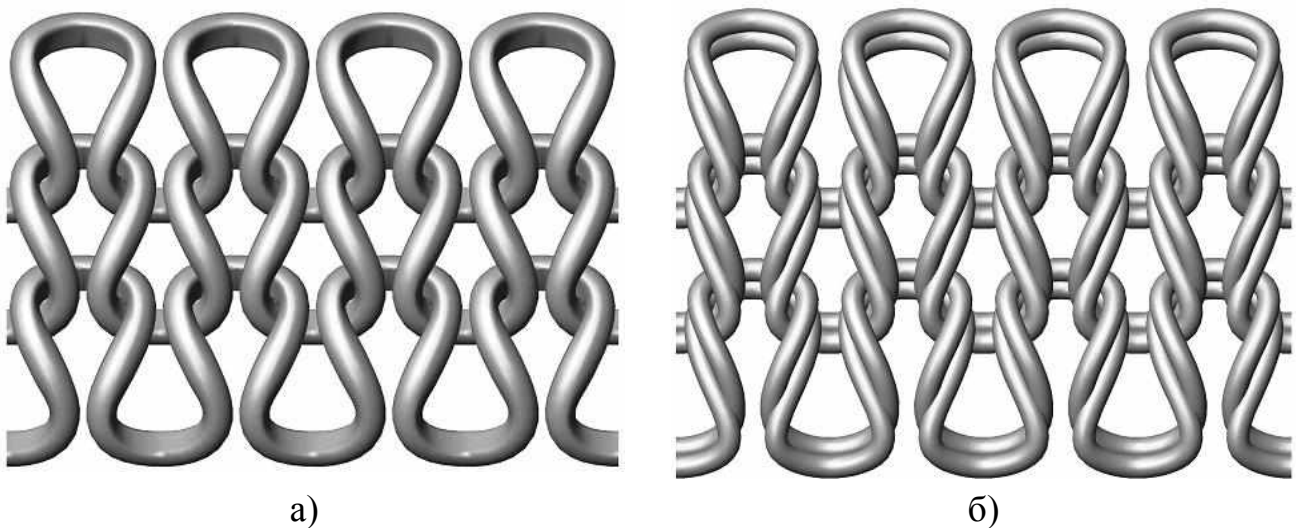


Рис. 13. Тривимірні моделі пряжі з ідентичними параметрами структури для вовняної пряжі лінійної щільності 31Х2 текс

Створено програмне забезпечення для дослідження якості формоутворення вузла «окат рукав-пройма» на етапі проектування, що дозволяє вирішувати ряд задач



Рис. 14. Тривимірна модель петлі з крученої пряжі на основі нитки, що виготовлена з однієї сировини

для прогнозування факторів, які впливають на його обробку: інтерполяція контуру окату рукава кривими за методом Катмалл-Рома, інтерполяція контурів бічних нижнього зрізу рукава; побудова лекала рукава; розрахунок довжини контуру і коефіцієнта деформування окату рукава, вздовж якого виконується посадка матеріалу; розрахунок коефіцієнта деформування зрізу припуску окату рукава; визначення радіуса кривини контуру; визначення кутів нахилу дотичних у вузлових точках контуру окату рукава.

Для виконання замовлень на пакувальні виробі розроблено програмне забезпечення, яке включає в себе графічний редактор для дизайну упаковок. Запропоновано використовувати ізотропні характеристики для моделювання мінімальних поверхонь згинанням плоских заготовок, що дозволяє одержувати тонкостінні конструкції з ортогональними та ізотермічними сітками.

У додатках наведено: А) приклади програм для дослідження об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик в середовищі MAPLE; Б) система візуалізації структури трикотажу основов'язаних переплетень із ажурними і рельєфними ефектами; В) приклад моделі одинарного одно гребінкового переплетення трико із закритими петлями; Г) система моделювання ізотропних фракталів; Д) довідки впроваджень.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Результатом досліджень, виконаних у дисертаційній роботі, є розв'язання науково-прикладної проблеми розробки та формалізації основ моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик.

Значення для науки полягає у створенні теоретичної бази моделювання кривих та поверхонь на основі ізотропних характеристик і визначає новий рівень досліджень у прикладній геометрії.

Значення для практики полягає у розробці моделей, що складають основу конструювання різних технічних форм та процесів методами, що базуються на ізотропних характеристиках.

Отримано такі основні результати, які мають наукову новизну та практичну цінність:

1. Виконано аналіз методів моделювання ізотропних об'єктів, що уже існують. Цей аналіз не виявив загальних підходів щодо розв'язання завдань формоутворення кривих та поверхонь дійсного простору на основі ізотропних характеристик, що дало підстави для створення теоретичних основ побудови об'єктів із нульовими характеристиками.

2. Узагальнено способи побудови основних геометричних ізотропних примітивів: прямої, кривої, сітки на площині, поверхні у тривимірному просторі, що дало змогу систематизувати методи та алгоритми конструювання ізотропних об'єктів і моделювання на їх основі об'єктів дійсного простору.

3. Розроблено на основі системного підходу ряд моделей, методів та способів щодо побудови ізотропних кривих на площині та у просторі, за допомогою яких було проведено обчислювальні експерименти з виявлення нових або ж унаочнення відомих властивостей. Зокрема: а) розроблено способи формування плоских ізотропних кривих Без'є та дробово-раціональних кривих n -го порядку, досліджено характеристики кривих за уявних, ізотропних, комплексних і дійсних сторін многокутника, розкрито вплив значень ваги точок на форму кривої; наведено конструювання ізотропних кривих на основі параметричного многочлена Лагранжа та кривої за годографом Піфагора; запропоновано моделювати криві у полікоординатній формі та на основі функцій радіального базису за допомогою

ізотропних прямих; б) запропоновано низку способів для моделювання просторових ізотропних кривих Без'є, розглянуто способи керування формою кривої; розроблено підходи щодо моделювання ізотропних просторових дробово-раціональних кривих, фундаментальних сплайнів і самоподібних фрактальних ліній.

4. Розроблено способи конструювання плоских сіток за допомогою ізотропних кривих, доведено умови ортогональності і ізотермічності для конформної заміни параметра, запропоновано формувати ортогональні сітки на основі квазіконформної заміни параметра, які дозволяють моделювати поверхні за визначеними геометричними умовами.

5. Розроблено способи моделювання мінімальних поверхонь на основі ізотропних просторових кривих із конформною та квазіконформною заміною параметра, моделювання мінімальних поверхонь з координатними лініями що є асимптотичними або лініями кривини та знайдені умови для гладкого поєднання мінімальних поверхонь, які дають змогу змінювати точки напрямної кривої в інтерактивному режимі, залишаючи поверхню мінімальною.

6. Доведено практичну доцільність та реалізовано ряд способів та алгоритмів щодо застосування теорії кватерніонів до моделювання ізотропних кривих та конструювання мінімальних поверхонь, що дозволило розширити можливості керування формоутворенням поверхонь.

7. Створено програмний інструментарій для розрахунків та візуалізації проведених експериментів, що дає змогу проводити дослідження в інтерактивному режимі користувача, змінюючи основні геометричні властивості.

8. Результати дисертаційної роботи впроваджено: при розробці програмного забезпечення для моделювання й візуалізації сіток та поверхонь, у процес моделювання геометричних форм на прикладі моделювання геометричних структур у трикотажній, швейній промисловості; при згинанні поверхонь для тонкостінних конструкцій.

Перспективи подальшого розвитку досліджень вбачаються за такими напрямками:

- дослідження нових ізотропних геометричних груп об'єктів;
- розширення досліджень щодо застосування гіперкомплексних чисел для формоутворення об'єктів дійсного простору;
- створення наскрізного інформаційного забезпечення для візуалізації формоутворення геометричних об'єктів;
- впровадження даних теоретичних досліджень у проектування інших виробів промисловості.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Основні публікації:

Статті в міжнародних виданнях та у виданнях, які включено до науково-метричних баз:

1. Аушева Н. Н. Оптимизация рендеринга трехмерных сцен [Текст] / Н. Н. Аушева, А. А. Демчишин // Известия Белорусской инженерной академии. – 2005. – № 1 (19)/1.– С. 247–250.

Особисто здобувачем проведено постановку мети і конкретних завдань дослідження, обґрунтовано оцінку результатів методики оптимізації швидкості етапів візуалізації сцени.

2. Аушева Н. М. Моделювання плоских сіток на основі дробово-раціональних ізотропних кривих [Текст] / Н. М. Аушева // Технологічний аудит та резерви виробництва. – 2013. – Т. 6, № 4 (14). – Редакція «Східно-Європейського журналу передових технологій». – С. 41–43.

3. Ausheva N. Geometric representations features of textile yarn in the 3D modeling systems [Text] / N. Ausheva, L. Galavska, T. Ielina. – Gabrovo : Technical university of Gabrovo, 2013.– Vol. III. – P. 199–202.

Особисто здобувачем запропоновано спосіб формування тривимірної моделі пряжи.

4. Аушева Н. Н. Применение графического процессора для определения минимальных поверхностей с направляющей кривой Безье [Текст] / Н. Н. Аушева, А. А. Демчишин // Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике : сб. – СПб. : Изд-во политех. ун-та, Россия, 2013. – С. 85–91.

Особисто здобувачем обґрунтовано вибір методу проведення досліджень мінімальних поверхонь з напрямною кривою Без'є з використанням графічного процесору.

5. Ausheva N. Modeling of minimal surfaces based on isotropic curves and quasiconformal change of parameter [Text] / N. Ausheva // Science and Education a New Dimension: Natural and Technical Sciences. – Budapest, 2013. – Vol. I (2), Issue 15. – P. 67–70.

Фахові публікації:

6. Аушева Н. М. Конструювання криволінійних обводів сегментами кривих п'ятого порядку [Текст] / Н. М. Аушева, Р. Б. Берлінський // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К. : КНУБА, 2001. – Вип. 69. – С. 131–134.

Особисто здобувачем знайдені умови для гладкості за кривиною для криволінійних обводів на основі кривих Без'є п'ятого порядку.

7. Аушева Н. М. Інтерактивне конструювання криволінійних обводів та гладких поверхонь [Текст] / Н. М. Аушева, Р. Б. Берлінський // Збірник наукових праць Київської державної академії водного транспорту. – К. : КДАВТ, 2001. – № 2. – С. 155–159.

Особисто здобувачем виконано розрахунок умов для гладких поверхонь.

8. Аушева Н. М. Застосування кривих четвертого порядку в полікоор-динатному представленні для опису складних об'єктів [Текст] / Ю. І. Бадаєв, Н. М. Аушева, О. П. Задорожная // Вісник ВПІ. – 2003. – № 6. – С. 368–374.

Особисто здобувачем запропоновано дослідження кривих на основі полікоординатної форми подання та розроблено алгоритми для визначення властивостей кривих.

9. Аушева Н. М. Особливі точки кривих четвертого порядку в полікоординатному представленні [Текст] / Н. М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – Мелітополь : ТДАТА, 2004. – Т. 25, вип. 4. – С. 71–73.

10. Аушева Н. М. Дослідження особливостей раціональних кривих четвертого порядку в полікоординатному поданні [Текст] / Ю. І. Бадаєв, Н. М. Аушева // Геометричне та комп'ютерне моделювання : зб. наук. праць / Харк. держ. університет харчування та торгівлі. – Харків, 2005. – Вип. 12. – С. 55–58.

Особисто здобувачем запропоновано для формоутворення кривих четвертого порядку застосовувати квадратичні перетворення; досліджена форма кривих поблизу подвійних точок.

11. Аушева Н. М. Постпроцесінг ділянки зображення тривимірної сцени [Текст] / Н. М. Аушева, А. А. Демчишин // Системні технології : рег. межв. зб. наук. праць. – Дніпропетровськ, 2006. – Вип. 2 (43). – С. 14–19.

Особисто здобувачем обґрунтовано актуальність вдосконалення методів створення спеціальних ефектів у комп'ютерній графіці, здійснено вибір методу проведення дослідження постпроцесінгу зображення за функцією змішання..

12. Аушева Н. М. Проекції чотиривимірних об'єктів [Текст] / Н. М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнічний університет. – Мелітополь : ТДАТА, 2008. – Т. 38, вип. 4. – С. 87–91.

13. Аушева Н. М. Перетворення чотиривимірного простору на основі кватерніонів [Текст] / Н. М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь : ТДАТА, 2008. – Т. 41, вип. 4. – С. 55–59.

14. Аушева Н. М. Визначення параметричних кривих на основі кватерніонів з колінеарною векторною частиною [Текст] / Н. М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь : ТДАТУ, 2009. – Т. 43, вип. 4. – С. 67–71.

15. Аушева Н. М. Моделювання неявних кривих функціями радіального базису [Текст] / Н. М. Аушева, Е. К. Бондарев // Прикладна геометрія та інженерна графіка : межв. наук.-техн. збірник. – К. : КНУБА, 2009. – Вип. 81. – С. 125–129.

Особисто здобувачем запропоновано формувати криві на основі спільних дотичних з елементарними функціями.

16. Аушева Н. М. Сферичні та гіперсферичні криві на основі кватерніонів [Текст] / Н. М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь : ТДАТУ, 2009. – Т. 45, вип. 4. – С. 39–43.

17. Аушева Н. М. Моделювання ізотропних кривих на основі кватерніонів з колінеарною векторною частиною [Текст] / Н. М. Аушева // Прикладна геометрія та

інженерна графіка : міжв. наук.-техн. збірник. – К. :КНУБА, 2010. – Вип. 86. – С. 137–140.

18. Геометричне моделювання лекала рукава у дослідженні процесу обробки вузла рукав-пройма [Текст] / О. І. Водзинська, О. В. Кардаш, Н. М. Аушева, О. В. Владіміров // Вісник КНУТД. – К. : КНУТД, 2010. – № 3. – С. 215–222.

Особисто здобувачем запропоновано метод для конструювання лекала рукава.

19. Аушева Н. М. Моделювання мінімальних поверхонь на основі теорії кватерніонів / Н. М. Аушева, Г. А. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка : міжв. наук.-техн. зб. – К. : КНУБА, 2011. – Вип. 87.– С. 56–60.

Особисто здобувачем розроблено підхід щодо моделювання мінімальних поверхонь на основі кватерніонів з колінеарною векторною частиною.

20. Аушева Н. М. Моделювання мінімальних поверхонь Без'є [Текст] / Н. М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь : ТДАТУ, 2011. – Т. 50, вип. 4. – С. 105–109.

21. Аушева Н. М. Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без'є [Текст] / Н. М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка : міжв. наук.-техн. збірник. –К. : КНУБА, 2011.– Вип. 88. – С. 57–61.

22. Аушева Н. М. Ізотропні фрактальні просторові криві [Текст] / Н. М. Аушева, А. А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка : міжв. наук.-техн. збірник. – К. : КНУБА, 2012. – Вип. 89.– С. 45–49.

Особисто здобувачем розроблено теоретичну та практичну базу побудови ізотропних фрактальних кривих у просторі.

23. Аушева Н. М. Ізотропні дробово-раціональні криві третього порядку [Текст] / Н. М. Аушева, Г. А. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь : ТДАТУ, 2012. – Т. 53, вип. 4. – С. 3–6.

Особисто здобувачем розроблено спосіб моделювання ізотропних дробово-раціональних кривих.

24. Аушева Н. М. Згинання мінімальних поверхонь в комплексному просторі деформацією напрямної кривої Без'є [Текст] / Н. М. Аушева, А. А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка : міжв. наук.-техн. збірник. – К. : КНУБА, 2012. – Вип. 90.– С.15–19.

Особисто здобувачем розроблено спосіб моделювання ізотропної кривої на основі деформації у комплексному просторі.

25. Аушева Н. М. Моделювання сіток з напрямними дробово-раціональними кривими [Текст] / Н. М. Аушева // Сучасні проблеми архітектури та містобудування : наук.-техн. зб. – К. : КНУБА, 2013. – Вип. 34. – С. 393–399.

26. Аушева Н. М. Геометрія просторової конфігурації осьової лінії нитки в петлі кулірного трикотажу [Текст] / Н. М. Аушева, Т. В. Єліна // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь : ТДАТУ, 2013. – Т. 56, вип. 4. – С.3–9.

Особисто здобувачем розроблено спосіб моделювання просторової осьової лінії нитки.

27. Аушева Н. М. Визначення сім'ї мінімальних поверхонь з напрямною кривою Без'є на базі процесора SIMD-архітектури [Текст] / Н. М. Аушева, А. А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь : ТДАТУ, 2013. – Т. 57, вип. 4. – С. 10–16.

Особисто здобувачем проведено формулювання проблеми та обґрунтовано актуальність візуалізації сім'ї мінімальних поверхонь з напрямною кривою Без'є у просторі $2R^3$.

28. Аушева Н. М. Побудова поверхонь з ортогональними координатними сітками на основі ізотропних кривих [Текст] / Н. М. Аушева, А. А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка : міжв. наук.-техн. збірник. – К. : КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 2–7.

Особисто здобувачем запропоновано спосіб формування ортогональних сіток на основі ізотропних кривих.

29. Аушева Н. М. Конструювання плоскої ізотропної кривої на основі рівняння кривої за годографом Піфагора [Текст] / Н. М. Аушева // Технічна естетика і дизайн : міжв. наук.-техн. зб. – К. : КНУБА, 2013. – Вип. 12. – С. 7–11.

30. Аушева Н. М. Конструювання мінімальних поверхонь за геодезичною лінією Без'є [Текст] / Н. М. Аушева // Містобудування та територіальне планування : наук.-техн. зб. – К. : КНУБА, 2013. – Вип. 49. – С. 43–49.

Додаткові публікації

31. Интерактивное моделирование сопряженных поверхностей для повышения надежности роторных компрессоров [Текст] / В. П. Юрчук, Н. Н. Аушева, И. Н. Кузьменко, В. А. Рудый // Малая энергетика в системе обеспечения экономической безопасности государства : монографія / под общ. ред.: Г. К. Вороновского, И. В. Недина. – К. : Знання України, 2006. – С. 302–307.

Особисто здобувачем запропоновано спосіб побудови поверхонь

32. Аушева Н. М. Методи чисельного моделювання високоградієнтних процесів в об'єктах з розподіленими параметрами [Текст] / С. О. Лук'яненко, Д. С. Смаковський, Н. М. Аушева // Лазерні технології та комп'ютерне моделювання : монографія. – К. : Вістка, 2009. – С. 70–78.

Особисто здобувачем запропоновано спосіб візуалізації поверхонь з розподіленими параметрами

Матеріали конференцій

33. Аушева Н. Н. Деформация геометрических моделей при столкновениях [Текст] / Н. Н. Аушева, А. А. Демчишин // Инженерный вестник. – Минск, 2006. – № 1 (21)/2. – С. 199–202.

Особисто здобувачем запропоновано спосіб деформації моделей

34. Ausheva N. Fractal Modeling of Vacuum Arc Cathode Spots [Text] / N. Ausheva, A. Demchyshyn // WSCG'2007 Short Communications Proceedings. The

15th International Conference in central Europe on Computer Graphics, Visualisation and Computer Vision 2007. – Plzen (Czech Republic), 2007. – P. 111–116.

Особисто здобувачем запропоновано спосіб моделювання фракталу

35. Аушева Н. М. Застосування кривих четвертого порядку в полікоординатному представленні для опису складних об'єктів [Текст] / Ю. І. Бадаєв, Н. М. Аушева, О. П. Задорожная // Тези доп. сьомої міжн. наук.-техн. конф. «Контроль і управління в складних системах». – Вінниця : УНІВЕРСУМ–Вінниця, 2003. – С. 23.

Особисто здобувачем запропоновано спосіб дослідження кривих

36. Аушева Н. М. Особливості раціональних кривих четвертого порядку в полікоординатному поданні [Текст] / Ю. І. Бадаєв, Н. М. Аушева // Тези доп. наук.-практ. конф. «Сучасні проблеми геометричного моделювання». – Харків, 2005. – С. 5.

Особисто здобувачем досліджені раціональні криві четвертого порядку

37. Современные подходы к проблеме прочности и износостойкости [Текст] / В. Г. Назаренко, Е. Г. Дидык, В. А. Жовтянский, Н. Н. Аушева, С. А. Дидык // Экологические и ресурсосбережение. – 2005. – № 3. – С. 60–74.

Особисто здобувачем запропоновано спосіб дослідження матеріалів на основі фракталів

38. Аушева Н. М. Візуалізація ділянки зображення тривимірної сцени [Текст] / Н. М. Аушева, А.А. Демчишин // Тези доп. наук.-практ. конф. «Сучасні проблеми геометричного моделювання». – Дніпропетровськ, 2006. – С.6.

Особисто здобувачем розроблено спосіб візуалізації ділянки зображення

39. Аушева Н. М. Відображення чотиривимірних об'єктів [Текст] / Н. М. Аушева // Тези доп. X Міжнар. наук.-практ. конф. «Сучасні проблеми геометричного моделювання». – Мелітополь : ТДАТУ, 2008. – С. 4.

40. Аушева Н. М. Фрактальний аналіз курсу валют в період економічної кризи [Текст] / Т. О. Стеблова, Н. М. Аушева // Матеріали VIII Міжн. наук.-практ. конф. «Розвиток підприємництва як фактор росту національної економіки». – К. : ІВЦ Вид-во «Політехніка», 2009. – С. 224.

Особисто здобувачем реалізовано спосіб аналізу курсу валют на основі теорії фракталів

41. Аушева Н. М. Параметричні криві на основі кватерніонів з колінеарною векторною частиною [Текст] / Н. М. Аушева // Тези доп. XI Міжнар. наук.-практ. конф. «Сучасні проблеми геометричного моделювання». – Мелітополь : ТДАТУ, 2009. – С. 10–11.

42. Аушева Н. М. Моделювання поверхонь на основі чотиривимірних функцій радіального базису [Текст] / Н. М. Аушева, А. А. Демчишин // Тези доп. Міжнар. наук.-практ. конф. «Моделювання об'єктів, процесів та систем». – К. : КДАВТ, 2011. – С. 62–64.

Особисто здобувачем проведено моделювання поверхонь

43. Аушева Н. М. Просторова конфігурація осьової лінії нитки в петлі [Текст] / Н. М. Аушева, Т. В. Єліна // Тези доп. XIII Міжнар. наук.-практ. конф. «Сучасні проблеми геометричного моделювання». – Мелітополь : ТДАТУ, 2011. – С. 3.

Особисто здобувачем розроблено модель конфігурації нитки

44. Аушева Н. М. Ізотропні фрактальні просторові криві [Текст] / Н. М. Аушева, А. А. Демчишин // Тези доп. VIII всеукр. наук.-практ. конф. «Прикладна геометрія, графічні технології та дизайн». – Полтава : ПНТУ, 2012. – С. 8–9.

Особисто здобувачем розроблено спосіб побудови кривих

45. Аушева Н. М. Ізотропні криві Без'є [Текст] / Н. М. Аушева // Науково-практичний семінар ім. Обухової В. С. : тези доп. – К. : НУБіП України, 2012. – С. 23–25.

46. Аушева Н. М. Ізотропні дробово-раціональні криві третього порядку [Текст] / Н. М. Аушева, Г. А. Аушева // Тези доп. XIV Міжнар. наук.-практ. конф. «Сучасні проблеми геометричного моделювання». – Мелітополь : ТДАТУ, 2012. – С. 3.

Особисто здобувачем розроблено умови ізотропності для просторових кривих у дробово-раціональному вигляді

47. Ausheva N. Modeling of minimal surfaces based on isotropic curves and quasiconformal change of parameter [Text] / N. Ausheva // Scientific and Professional Conference Natural, Mathematical and Technical science – NaMaTech. – Budapest, 2013. – 3 p.

48. Аушева Н. М. Визначення сім'ї мінімальних поверхонь з напрямною кривою Без'є на базі процесора SIMD-архітектури [Текст] / Н. М. Аушева, А. А. Демчишин // Тези доп. XV Міжнар. наук.-практ. конф. «Сучасні проблеми геометричного моделювання». – Мелітополь : ТДАТУ, 2013. – С. 3.

Особисто здобувачем запропоновано спосіб визначення сім'ї поверхонь на основі ізотропних напрямних кривих.

АНОТАЦІЯ

Аушева Н. М. Геометричне моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.01.01 – прикладна геометрія, інженерна графіка. – Київський національний університет будівництва і архітектури. – Київ, 2014.

Робота присвячена вирішенню науково-прикладної проблеми розробки та формалізації основ моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик.

Розроблено теоретичні основи моделювання дійсних об'єктів на основі ізотропних характеристик. Узагальнено способи побудови основних геометричних ізотропних примітивів: прямої, кривої, сітки на площині, поверхні у тривимірному просторі, що дало змогу систематизувати методи та алгоритми конструювання ізотропних об'єктів і моделювання на їх основі об'єктів дійсного простору.

Розроблено ряд оригінальних способів та методів формоутворення кривих та поверхонь на основі ізотропних характеристик, а саме: плоских ізотропних кривих Без'є, ізотропних дробово-раціональних кривих, фундаментального сплайну, кривих

на основі годографа Піфагора, кривих у полікоординатному вигляді, просторових ізотропних кривих, геометричних фрактальних кривих, плоских ізотропних сіток, мінімальних поверхонь, поверхонь за плоскими ортогональними та ізотермічними сітками. Було запропоновано для завдання ізотропних кривих та поверхонь застосовувати алгебру кватерніонів.

В трикутажній промисловості запропоновано спосіб формоутворення тривимірної геометричної моделі багатокомпонентної крученої нитки методом кватерніонів. Удосконалено методику формоутворення мінімальних поверхонь на основі ізотропних кривих.

Ключові слова: об'єкти дійсного простору, ізотропні характеристики, ізотропні криві та поверхні, криві Без'є, дробово-раціональні криві, криві на основі годографа Піфагора, плоскі ізотропні сітки, мінімальні поверхні, кватерніони.

АННОТАЦІЯ

Аушева Н. Н. Геометрическое моделирование объектов реального пространства на основе изотропных характеристик. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.01.01 – прикладная геометрия, инженерная графика. – Киевский национальный университет строительства и архитектуры. – Киев, 2014.

Диссертационные исследования посвящены решению научно-прикладной проблемы разработки и формализации основ моделирования объектов действительного пространства на основе изотропных характеристик.

Выполнен анализ методов моделирования уже существующих изотропных объектов. Этот анализ не выявил общих подходов к решению задач формообразования кривых и поверхностей действительного пространства на основе изотропных характеристик, что дало основания для создания теоретических основ построения объектов с нулевыми характеристиками.

Сформирован системный подход для построения основных геометрических изотропных примитивов: прямой, кривой, сетки на плоскости, поверхности в трехмерном пространстве, что позволило систематизировать методы конструирования изотропных объектов и моделирования на их основе объектов действительного пространства.

Предложено и реализовано ряд моделей, методов и способов по построению изотропных объектов на плоскости и в пространстве, с помощью которых были проведены вычислительные эксперименты по выявлению новых или визуализации известных свойств. А именно: а) разработаны способы формирования плоских изотропных кривых Безье и дробно-рациональных кривых n -го порядка, исследованы характеристики мнимых кривых на основе изотропных, комплексных и действительных значений сторон многоугольника, раскрыто влияние значений веса точек на форму кривой; проведено конструирование изотропных кривых на основе параметрического многочлена Лагранжа и кривой на основе годографа Пифагора; предложено моделировать кривые в поликоординатной форме и на основе функций

радиального базиса с помощью изотропных прямых; б) предложен ряд способов для моделирования пространственных изотропных кривых Безье, рассмотрены способы управления формой кривой; разработаны подходы по моделированию изотропных пространственных дробно-рациональных кривых, фундаментальных сплайнов и самоподобных фрактальных линий; в) проведено конструирование плоских сеток с помощью изотропных кривых, доказаны условия ортогональности и изотермичности для конформной замены параметра, предложено формировать ортогональные сетки на основе квазиконформной замены параметра; г) разработаны способы моделирования минимальных поверхностей на основе изотропных пространственных кривых с конформной и квазиконформной заменой параметра; разработаны способы моделирования минимальных поверхностей с асимптотическими линиями или линиями кривизны; найдены условия для гладкого склеивания минимальных поверхностей; д) плоские сетки, построенные на основе изотропных кривых, использованы для моделирования поверхностей с определенными геометрическими условиями.

Реализован ряд способов и алгоритмов на основе теории кватернионов для моделирования изотропных кривых и конструирования минимальных поверхностей, что позволило расширить возможности управления формообразованием поверхностей. Создано программное обеспечение для визуализации проведенных экспериментов, что позволяет проводить исследования в интерактивном режиме, изменяя основные геометрические свойства. Выполнено внедрение разработанных моделей при разработке программного обеспечения для моделирования и визуализации сеток и поверхностей, в процесс моделирования геометрических форм на примере моделирования геометрических структур в трикотажной, швейной промышленности и наведено примеры для возможности применения при изгибании поверхностей для тонкостенных конструкций.

Ключевые слова: объекты действительного пространства, изотропные характеристики, изотропные кривые и поверхности, кривые Безье, дробно-рациональные кривые, кривые на основе годографа Пифагора, плоские изотропные сетки, минимальные поверхности, кватернионы.

ABSTRACT

Ausheva N. Geometric modeling of real-space objects based on isotropic characteristics. – Manuscript.

A thesis for competition of higher doctoral degree of Doctor of Science in speciality 05.01.01 – applied geometry, engineering graphics. – Kyiv National University of Construction and Architecture. – Kyiv, 2014.

The paper presents solution of scientific and applied problem concentrated in development and formalization of fundamentals of real-space objects modeling based on isotropic characteristics.

The modeling of real-space objects based on isotropic characteristics is substantiated to be the novel distinctive way of curves and surfaces generation using provided differential properties.

The comprehensive approach covering construction of the basic isotropic primitives: line, curve, grid on a plane, surface in 3D space, is introduced.

A number of novel methods and techniques of curves and surfaces generation basing on isotropic characteristics is developed, in this list: flat isotropic Bezier curves, isotropic rational curves, cardinal splines, Pythagorean-hodograph curves, curves in poly-coordinate representation, spatial isotropic curves, geometrical fractal curves, flat isotropic grids, minimal surfaces, surfaces originating from flat orthogonal and isometric grids. Usage of quaternion calculus for representation of isotropic curves and surfaces is suggested.

Particular attention is paid to the new technique of 3D geometric model creation of a multi-ply yarn in knitwear industry. The suggested technique utilizes quaternions. Further improvement is made to the method of minimal surfaces formation by virtue of isotropic curves.

Keywords: real-space objects, isotropic characteristics, isotropic curves and surfaces, Bezier curves, rational curves, Pythagorean-hodograph curves, flat isotropic grids, minimal surfaces, quaternions.