УДК 514.18

**С.Ф. Пилипака**, д.т.н., професор
**М.М. Муквич**, к.т.н., доцент
**Н.В. Козаченко**, асистент

# АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

*Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут»*

*У даній статті здійснено аналітичний опис ізотропних ліній нульової довжини та мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної. Використано інтегральні залежності для побудови уявних ізотропних ліній, отримані із умови рівності нулю диференціала дуги просторової лінії. Аналітичний опис ізотропних ліній знайдено на основі функцій комплексної змінної* $u(s)$, $v(s)$, *отриманих при диференціюванні виразів параметричних рівнянь від натурального параметра уявної плоскої лінії із сталою комплексною величиною кривини* $k(s)=a+bi$.

*Аналітичний опис мінімальних поверхонь та приєднаних мінімальних поверхонь здійснено у комплексному просторі з ізотропними лініями у ролі ліній сітки переносу. Наведено вирази коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм утворених мінімальних поверхонь. Проведено порівняльний аналіз диференціальних властивостей мінімальних поверхонь, побудованих на основі ізотропних ліній за різних інтегральних залежностей.*

*Досліджено, що для вказаних функцій* $u=u(s); v=v(s)$, *які задовольняють умову* $u^2+v^2=1$, *можна знайти аналітичний опис двох різних просторових ізотропних ліній нульової довжини за допомогою функцій комплексної змінної. Кожній ізотропній лінії відповідає мінімальна поверхня та приєднана мінімальна поверхня, які мають подібні властивості гауссової кривини поверхні. Показано, що параметричні рівняння утворених мінімальних поверхонь та вирази їх квадратичних форм, побудованих на основі ізотропних ліній за різних інтегральних залежностей, відрізняються тільки знаками. Мінімальні поверхні, побудовані на основі аналітичного опису ізотропної лінії за протилежних знаків виразів аплікат, є конгруентними.*

*Запропонована авторами статті методика неперервного геометричного моделювання ізотропних ліній засобами комплексного аналізу має переваги, зумовлені знаходженням параметричних рівнянь відповідних мінімальних поверхонь у вигляді елементарних функцій.*

*Ключові слова: ізотропна лінія, мінімальна поверхня, середня кривина поверхні, кривина плоскої лінії, функція комплексної змінної.*

**Постановка проблеми**. Геометричні моделі, описані мінімальними поверхнями нульової середньої кривини, володіють перевагами практичного змісту при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій. Напруженість у кожній точці мінімальної поверхні є сталою величиною, тому її форма залежить тільки від форми контуру, через який проведено мінімальну поверхню [1, с. 43]. Оболонки, які мають геометричну форму мінімальних поверхонь, володіють архітектурною виразністю, можуть перекривати складні плани без утворення розривів геометрії з джерелами виникнення напружень [2, с. 152]. Умова рівності нулю величини середньої кривини $H$ мінімальної поверхні у всіх її точках є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром) на цій поверхні. Знаходження аналітичного опису мінімальної поверхні, яка проходить через замкнену лінію, зводиться до розв'язування нелінійного диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа у частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується [3, с. 683].

Аналітичний опис мінімальних поверхонь та приєднаних мінімальних поверхонь здійснюють у комплексному просторі з ізотропними лініями у ролі ліній сітки переносу.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У роботах [1, 2] побудова мінімальних поверхонь здійснювалася наближеними графо-аналітичними методами і аналітичний опис поверхонь, близьких до мінімальних, було знайдено у вигляді функцій, які не є елементарними.

У прикладних дослідженнях Н.М. Аушевої [4] створено геометричну модель викройки мембрани тентової конструкції, представленої у вигляді мінімальної поверхні на основі ізотропної кривої Без'є.

Ряд робіт авторів даної статті присвячено проблемі аналітичного опису ізотропних ліній та мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної. Зокрема, у роботах [5, 6, 7] знайдено аналітичні залежності для утворення ізотропних ліній за допомогою функцій $u = u(t)$; $v = v(t)$, які задовольняють умову $u^2 + v^2 = 1$, та побудовано мінімальні поверхні на основі тригонометричних та гіперболічних функцій. При цьому потребує дослідження проблема аналітичного опису ізотропних ліній засобами комплексного аналізу.

**Формулювання цілей та завдання статті.** Знайти аналітичний опис просторових ізотропних ліній за допомогою параметричних рівнянь від натурального параметра уявної плоскої лінії із сталою комплексною величиною кривини. Використовуючи аналітичний опис ізотропних ліній, визначити параметричні рівняння відповідних мінімальних поверхонь та коефіцієнти їх квадратичних форм.

**Основна частина.** У роботі [5] авторів даної статті визначено аналітичні залежності утворення просторових ізотропних ліній нульової довжини за допомогою функцій комплексної змінної $u = u(s);\ v = v(s)$, які задовольняють умову $u^2 + v^2 = 1$. Параметричні рівняння ізотропних ліній мають вигляд [5]:

$$x_1(s) = \int\left(u - \frac{1}{2(u-v)}\right)ds;\ y_1(s) = \int\left(v + \frac{1}{2(u-v)}\right)ds;\ z_1(s) = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}\int\frac{ds}{u-v}, \qquad (1)$$

$$x_2(s) = \int\left(u - \frac{1}{2(u+v)}\right)ds;\ y_2(s) = \int\left(v - \frac{1}{2(u+v)}\right)ds;\ z_2(s) = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}\int\frac{ds}{u+v}, \qquad (2)$$

де $i -$ уявна одиниця.

Інтегрування виразів (1, 2) для заданих функцій $u = u(s);\ v = v(s)$, які задовольняють умову $u^2 + v^2 = 1$, можливе тільки в окремих випадках.

Параметричні рівняння у функціях довжини дуги $s$ плоскої кривої, заданої натуральним рівнянням $k = k(s)$, мають вигляд:

$$x(s) = x(0) + \int_0^s \cos\left[\int_0^s k(s)ds\right]\cdot ds; \quad y(s) = y(0) + \int_0^s \sin\left[\int_0^s k(s)ds\right]\cdot ds; \qquad (3)$$

Розглянемо уявну плоску криву із сталою комплексною величиною кривини $k(s) = a + bi$, де $a \in R$, $b \in R$, $i -$ уявна одиниця.

Підставивши вираз $k(s) = a + bi$ у (3), отримаємо параметричні рівняння уявної плоскої лінії у функціях довжини дуги:

$$x(s) = x(0) + \int_0^s \cos[(a+bi)s]\cdot ds; \quad y(s) = y(0) + \int_0^s \sin[(a+bi)s]\cdot ds. \qquad (4)$$

Диференціюючи вирази (4), отримаємо функції комплексної змінної, які задовольняють умову $u^2 + v^2 = 1$:

$$u(s) = \frac{dx}{ds} = \cos[(a+bi)s]; \quad v(s) = \frac{dy}{ds} = \sin[(a+bi)s]. \qquad (5)$$

При підстановці виразів (5) у залежності (1) після інтегрування отримаємо параметричні рівняння уявної просторової ізотропної лінії:

$$x(s)=\frac{\sqrt{2}\,i\,\mathrm{Arth}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\cdot\sqrt[4]{-1}\cdot\left(\mathrm{tg}\left(\frac{s}{2}(a+bi)\right)+1\right)\right]+2\sin(a+bi)s}{2(a+bi)};$$

$$y(s)=\frac{\sqrt{2}\,i\,\mathrm{Arth}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\cdot\sqrt[4]{-1}\cdot\left(\mathrm{tg}\left(\frac{s}{2}(a+bi)\right)+1\right)\right]+2\cos(a+bi)s}{-2(a+bi)};\qquad(6)$$

$$z(s)=\frac{\mathrm{Arth}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\cdot\sqrt[4]{-1}\cdot\left(\mathrm{tg}\left(\frac{s}{2}(a+bi)\right)+1\right)\right]}{a+bi}.$$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні у рівняннях (6) уведемо заміну: $s=u+i\cdot v$.

Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (6), отримаємо рівняння мінімальної поверхні:

$$X(u,v)=\frac{b}{2\sqrt{2}(a^2+b^2)}(\mathrm{arctg}m-\mathrm{arctg}n)+\frac{a}{4\sqrt{2}(a^2+b^2)}\times$$
$$\times\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\right)^2+w\right)-\ln\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\right)^2+w\right)\right)+\frac{a\cdot\mathrm{ch}(bu+av)\sin(au-bv)}{a^2+b^2}+$$
$$+\frac{b\cdot\mathrm{sh}(bu+av)\cos(au-bv)}{a^2+b^2};$$

$$Y(u,v)=\frac{\sqrt{2}b}{4(a^2+b^2)}(\mathrm{arctg}m-\mathrm{arctg}n)+\frac{a}{4\sqrt{2}(a^2+b^2)}\times$$
$$\times\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\right)^2+w\right)-\ln\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\right)^2+w\right)\right)-\frac{4a\cdot\mathrm{ch}(bu+av)\cos(au-bv)}{a^2+b^2}+\qquad(7)$$
$$+\frac{4b\cdot\mathrm{sh}(bu+av)\sin(au-bv)}{a^2+b^2};$$

$$Z(u,v)=\frac{a}{2(a^2+b^2)}(\mathrm{arctg}m-\mathrm{arctg}n)-\frac{b}{4(a^2+b^2)}\times$$
$$\times\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}-j\right)^2+w\right)+\ln\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\right)^2+w\right)\right);$$

У параметричних рівняннях (7) функції $m(u;\,v)$, $n(u;\,v)$, $j(u;\,v)$, $w(u;\,v)$ визначаються із наступних рівностей:

$$m = m(u;\, v) = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(bu + av)}{\left(\sqrt{2} - 2\right)\left(\cos(au - bv) + \mathrm{ch}(bu + av)\right) + \sqrt{2}\sin(au - bv)};$$

$$n = n(u;\, v) = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(bu + av)}{\left(\sqrt{2} + 2\right)\left(\cos(au - bv) + \mathrm{ch}(bu + av)\right) + \sqrt{2}\sin(au - bv)};$$

$$j = j(u; v) = \frac{\sin(au - bv)}{\sqrt{2}\left(\cos(au - bv) + \mathrm{ch}(bu + av)\right)};$$

$$w = w(u; v) = \frac{\mathrm{sh}^2(bu + av)}{2\left(\cos(au - bv) + \mathrm{ch}(bu + av)\right)^2}.$$

Параметричні рівняння приєднаної мінімальної поверхні мають подібну будову із рівняннями (7), тому у даній статті не наводяться.

Слід зазначити, що вирази параметричних рівнянь ізотропних ліній та відповідних мінімальних поверхонь, побудованих за залежностями (1) або (2), мають подібну будову і відрізняються тільки знаками арифметичних дій.

Вирази першої квадратичної форми утворених мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою залежностей (1), мають вигляд:

$$E = G = \frac{ch^2\left[2(bu + av)\right]}{2\left(-\sin\left[2(au - bv)\right] + \mathrm{ch}\left[2(bu + av)\right]\right)};\; F = 0. \tag{8}$$

Вирази другої квадратичної форми мінімальної поверхні (7), побудованої за допомогою залежності (1), мають вигляд:

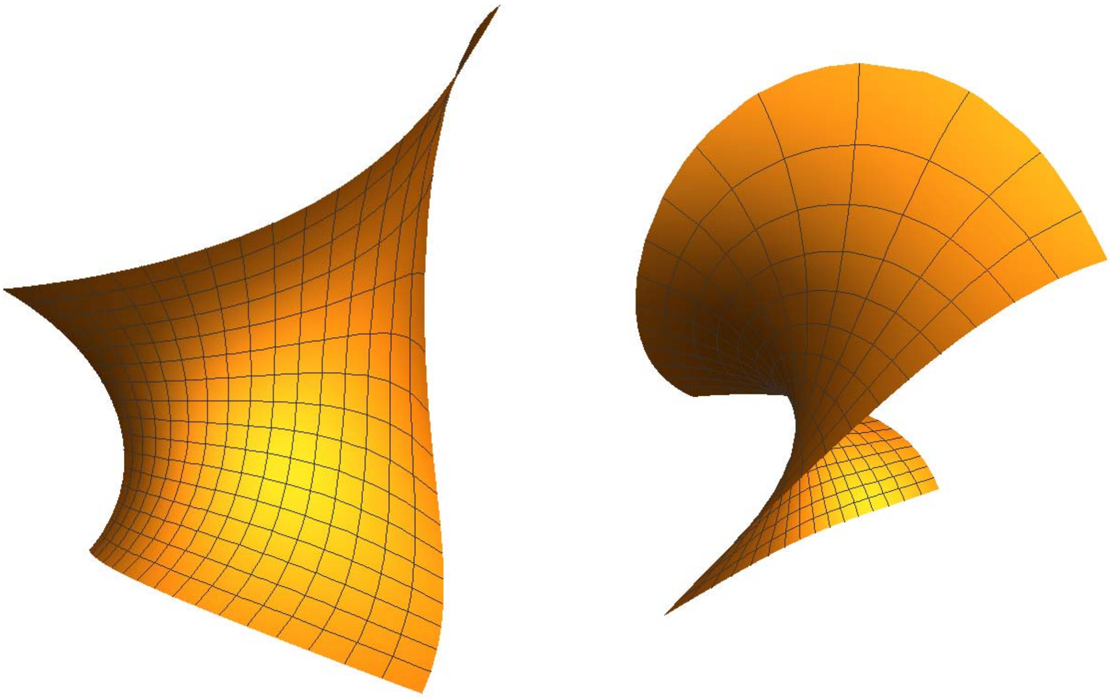
$$\begin{gathered}
L = -N = \frac{\sqrt{2}}{-\sin\left[2(au - bv)\right] + \mathrm{ch}\left[2(bu + av)\right]} \cdot \left[a \cdot \mathrm{ch}[bu + av] \times \right. \\
\left. \times \left(\cos(au - bv) - \sin(au - bv)\right) - b \cdot \mathrm{sh}[bu + av]\left(\cos(au - bv) + \sin(au - bv)\right)\right]; \\
M = \frac{\sqrt{2}}{\sin\left[2(au - bv)\right] - \mathrm{ch}\left[2(bu + av)\right]} \cdot \left[a \cdot \mathrm{sh}[bu + av] \times \right. \\
\left. \times \left(\cos(au - bv) + \sin(au - bv)\right) + b \cdot \mathrm{ch}[bu + av]\left(\cos(au - bv) - \sin(au - bv)\right)\right];
\end{gathered} \tag{9}$$

Вирази другої квадратичної форми приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за допомогою залежності (1), задовольняють рівності:

$$L^* = -N^* = -M;\; M^* = L,$$

де $L$, $M$ – вирази коефіцієнтів, отримані у (9).

На рис. 1, а зображено мінімальну поверхню, побудовану за рівняннями (7) за умов $a = 2;\; b = 1;\; u \in [-0{,}3;\ldots 0{,}3];\;\; v \in [-0{,}3;\ldots 0{,}3]$.



а б

Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих на основі ізотропної лінії (6)

На рис. 1, б зображено приєднану мінімальну поверхню. Мінімальні поверхні, побудовані на основі аналітичного опису ізотропної лінії (1) за протилежних знаків виразів аплікат, є конгруентними.

Слід зазначити, що вирази відповідних коефіцієнтів квадратичних форм мінімальних поверхонь, побудованих на основі ізотропної лінії за залежностями (2), мають подібну будову і відрізняються тільки знаками арифметичних дій.

**Висновки.** Для вказаних функцій комплексної змінної $u = u(s); v = v(s)$, які задовольняють умову $u^2 + v^2 = 1$, можна знайти аналітичний опис двох різних просторових ізотропних ліній нульової довжини. Кожній ізотропній лінії відповідає мінімальна поверхня та приєднана мінімальна поверхня, які мають подібні властивості гауссової кривини поверхні. Параметричні рівняння мінімальних поверхонь отримано у вигляді елементарних функцій, що дозволяє створювати на їх основі геометричні моделі при розв’язуванні практичних задач.

**Перспективи подальших досліджень.** Перспективами подальших досліджень є використання аналітичного опису утворених мінімальних поверхонь для оптимізації інженерних методів проектування поверхонь технічних форм.

## Література


1. *Михайленко В.Е., Ковалёв С.Н.* Конструирование форм современных архитектурных конструкций. – К.: Будівельник, 1978. 112 с.

2. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдайчук В.В.* Расчёт оболочек сложной формы. К.: Будівельник, 1990. 192 с.

3. *Математическая энциклопедия* / гл. ред. И.М. Виноградов. Москва: Изд–во «Советская энциклопедия», 1982. Т.3. С.683–690.

4. *Аушева Н. М.* Побудова викройки поверхні тентової конструкції. *Сучасні проблеми моделювання.* 2019. №14. С. 3–16.

5. *Пилипака С.Ф., Муквич М.М.* Дослідження аналітичних залежностей для утворення ізотропних ліній та конструювання мінімальних поверхонь. Енергетика та автоматика: електрон. наук. фахове вид. 2017. Вип. 4. С. 133–143.
URL: http://journals.nubip.edu.ua/index.php/Energiya/issue/view/375

6. *Пилипака С.Ф., Муквич М.М.* Аналітичний опис ізотропних ліній та мінімальних поверхонь за допомогою тригонометричних функцій. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2018. № 94. С.77–81.

7. *Пилипака С.Ф., Муквич М.М.* Знаходження параметричних рівнянь ізотропних ліній за допомогою гіперболічних функцій та утворення мінімальних поверхонь. Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія «Техніка та енергетика АПК». 2018. № 283. С. 141–148.


## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВАНИИ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ


*С.Ф. Пилипака, Н.Н. Муквич, Н.В. Козаченко*



В данной статье осуществлено аналитическое описание изотропной линии нулевой длины и минимальных поверхностей с помощью функций комплексного переменного. Использованы интегральные зависимости образования параметрических уравнений мнимых изотропных линий, полученные из равенства нулю дифференциала дуги пространственной линии. Аналитическое описание изотропных линий осуществлено на основе функций комплексного переменного $u(s)$, $v(s)$, полученных при дифференцировании выражений параметрических уравнений от натурального параметра мнимой плоской линии с постоянной комплексной величиной кривизны $k(s) = a + bi$.

Аналитическое описание минимальных поверхностей и присоединенных минимальных поверхностей осуществляется в комплексном пространстве с изотропными линиями в качестве линий сети переноса. Приведены выражения коэффициентов первой и второй

квадратичных форм образованных минимальных поверхностей. Осуществлен сравнительный анализ дифференциальных свойств минимальных поверхностей, построенных на основании изотропных линий с помощью различных интегральных зависимостей.

Доказано, что для указанных функций $u = u(s); v = v(s)$, удовлетворяющих условию $u^2 + v^2 = 1$, можно найти аналитическое описание двух разных пространственных изотропных линий нулевой длины с помощью функций комплексного переменного. Каждой изотропной линии соответствует минимальная поверхность и присоединённая минимальная поверхность, имеющие общие свойства гауссовой кривизны поверхности. Показано, что параметрические уравнения образованных минимальных поверхностей и выражения их квадратичных форм, построенных на основании изотропных линий с помощью различных интегральных зависимостей, отличаются только знаками. Минимальные поверхности, построенные на основании аналитического описания изотропной линии с противоположными знаками аппликат, являются конгруэнтными.

Предложенная авторами статьи методика непрерывного геометрического моделирования изотропных линий средствами комплексного анализа имеет преимущества, обусловленные нахождением параметрических уравнений соответствующих минимальных поверхностей в виде элементарных функций.

*Ключевые слова: изотропная линия, минимальная поверхность, средняя кривизна поверхности, кривизна плоской кривой, функция комплексного переменного.*

## ANALYTICAL DESCRIPTION MINIMAL SURFACES ON THE BASIS OF ISOTROPIC LINES WITH THE HELP OF INTEGRAL DEPENDENCIES

*S. Pylypaka, M. Mukvich, N. Kozachenko*

*In this article, an analytical description of isotropic zero-length lines and minimal surfaces is made using the functions of a complex variable. The integral dependences of the formation of parametric equations of imaginary isotropic lines are used, obtained from the equality of the differential of the arc of the spatial line to zero. Analytical description of isotropic lines is made on the basis of the functions of the complex variable $u(s)$, $v(s)$, obtained by differentiating the expressions of parametric equations from the natural parameter of an imaginary flat line with a constant complex value of curvature $k(s) = a + bi$.*

*The analytical description of the minimal surfaces and the associated minimal surfaces is made in a complex space with isotropic lines as the lines of* *a transfer grid. The expressions of the coefficients of the first and second quadratic forms of the formed minimal surfaces are given. A comparative analysis of the differential properties of minimal surfaces constructed on the basis of isotropic lines with different integral dependences is carried out.*

*It has been investigated that for specified functions* $u = u(s)$; $v = v(s)$ *that satisfy the condition* $u^2 + v^2 = 1$, *one can find an analytical description of two different spatial isotropic lines of zero length using the functions of a complex variable. Each isotropic line corresponds to the minimal surface and the associated minimal surface, which have similar properties to the Gaussian curvature of the surface. It is shown that the parametric equations of the formed minimal surfaces and the expressions of their quadratic forms, constructed on the basis of isotropic lines with different integral dependences, differ only in signs. The minimal surfaces constructed on the basis of the analytical description of the isotropic line with opposite signs of the aplicate expressions are congruent.*

*The method of continuous geometric modeling of isotropic lines proposed by the authors of the article by means of complex analysis has the advantages caused by finding parametric equations of the corresponding minimal surfaces in the form of elementary functions.*

*Key words: isotropic line, minimal surface, main surface curvature, curvature of a flat curve, function of a complex variable.*