УДК 539.3

Гоцуляк Є.О., д-р техн.наук,
Дехтярюк Є.С., д-р техн.наук,
Лук'янченко О.О., канд. техн. наук,
Пошивач Д.В., асп.

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПЛОСКОЇ ФОРМИ ЗГИНУ ПРУЖНИХ СИСТЕМ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ РЕЗОНАНСІ

На основі чисельної методики побудовані редуковані дискретні моделі. Досліджена стійкість динамічних станів пружних систем при параметричному навантаженні. Визначенні області нестійкості плоскої форми згину двотаврової балки та плоскої ферми при комбінованому резонансі.

Досліджена динамічна стійкість плоскої форми згину пружних систем: двотаврової балки та плоскої ферми. Побудова редукованих моделей для чисельного визначення границь областей нестійкості виконана за допомогою методики, що наведена в статтях [1,2].

Дискретна математична модель динамічної стійкості пружної системи з кінцевим числом степенів вільності при дії параметричного навантаження записується у вигляді звичайних диференціальних рівнянь

$$M\ddot{\bar{u}}(t) + C\dot{\bar{u}}(t) + K\bar{u}(t) + \varphi(t)K_G\bar{u}(t) = 0\,, \qquad (1)$$

де $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t))$ - вектор вузлових переміщень, M, C, K, K_G - матриці мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, $\varphi(t)$ - параметричне навантаження.

Пряме застосування дискретних моделей пов'язане з великими обчислювальними труднощами, тому для адекватного описання динамічної поведінки пружних систем виконується її редукція. В роботі побудова редукованої дискретної моделі виконується за допомогою методу скінченних елементів та методу узагальнених координат. Нетривіальний розв'язок системи (1) апроксимується виразом

$$\bar{u}(t) = V\bar{y}(t)\,, \qquad (2)$$

де $V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m)^T$ - матриця розмірністю $n \times m$, що визначається системою базисних векторів $\{\bar{v}_k\}_{k=1}^m$; $\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_m(t))^T$ - вектор узагальнених координат.

Редукована дискретна модель динамічної стійкості пружної системи з урахуванням формул (1) та (2) набуває вигляду системи m звичайних диференціальних рівнянь

$$V^T MV\ddot{y}(t)+V^T CV\dot{y}(t)+V^T KV\bar{y}(t)+\varphi(t)V^T K_G V\bar{y}(t)=0\,. \qquad (3)$$

Якщо представити редуковані матриці мас M^*, демпфірування C^*, жорсткості K^* та геометричної жорсткості K_G^* розмірністю $m\times m$ відповідно виразами

$$M^*=V^T MV\,,\ C^*=V^T CV\,, K^*=V^T KV\,, K_G^*=V^T K_G V\,, \qquad (4)$$

система (3) запишеться у вигляді

$$M^*\ddot{\bar{y}}(t)+C^*\dot{\bar{y}}(t)+K^*\bar{y}(t)+\varphi(t)K_G^*\bar{y}(t)=0\,. \qquad (5)$$

Формування дискретних моделей двотаврової балки та плоскої ферми виконується чисельно за допомогою процедур сучасного обчислювального комплексу скінченноелементного аналізу NASTRAN [3].

Двотаврова балка, яка навантажена періодичними в часі зосередженими силами $P(t)$ в площині найбільшої жорсткості, представлена на рис. 1.

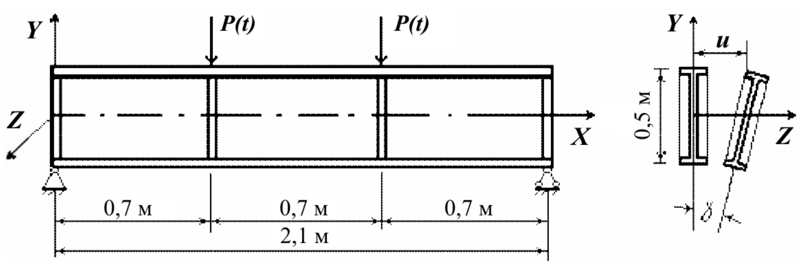

Рис. 1. Конструкція двотаврової балки

Геометричні та механічні характеристики балки приймалися такими: $h=0.5$ м, $\delta_{ст}=6$ мм, $\delta_{пл}=\delta_{реб}=9$ мм, $b_{пл}=0.21$ м, $E=206$ ГПа, $G=79.2$ ГПа, $\eta=0.3$, $\rho=7800$ кг/м^3.

Балка шарнірно спирається на кінцях. Навантаження приймається у вигляді $P(t)=P_0\cos\omega t$ ($P_0=10^2$ кН). Таке періодичне навантаження є параметричним навантаженням по відношенню до згинально-крутильних деформацій із площини її дії.

Скінченноелементна модель двотаврової балки формується таким чином: полки і ребра моделюються балочними елементами; стінка - плоскими прямокутними елементами. По висоті стінка розбивається на 8 частин, по довжині на 42.

Задача динамічної стійкості плоскої форми згину балки (5) без врахування дисипативних сил набуває вигляду

$$\ddot{\bar{y}}(t) + K^{*}\bar{y}(t) + \varphi(t)K_{G}^{*}\bar{y}(t) = 0\,, \tag{6}$$

тут $\bar{y}(t) = [u_1(t), \gamma_1(t)]^T$ - вектор узагальнених координат, $K^{*} = \begin{bmatrix} \omega_{1u}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{2\gamma}^2 \end{bmatrix}$ - редукована матриця жорсткості, $K_G^{*} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ - редукована матриця геометричної жорсткості.

Базисні вектори $\{\bar{v}_k\}_{k=1}^{m}$ приймаються у вигляді векторів матриці власних форм коливань $\Phi = \{\bar{\varphi}_k\}_{k=1}^{m} = \{\bar{\varphi}_{1u}, \bar{\varphi}_{1\gamma}\}$, тут $\bar{\varphi}_{1u}, \bar{\varphi}_{1\gamma}$ - вектори першої згинальної та крутильної форм коливань, що визначаються при розв'язанні задачі на вільні коливання

$$(K - \omega^2 M)\varphi = 0\,, \tag{7}$$

де ω_k $(k = 1,2,...,m)$ - частоти власних коливань дискретної моделі. Система векторів $\{\bar{\varphi}_k\}_{k=1}^{m}$ ортогональна. Матриця власних форм нормована по матриці мас, тобто $\bar{\varphi}_i^{\,T} M \bar{\varphi}_i = E$, де $E = diag(1,1)$.

Перші крутильна та згинальна форми коливань представлені на рис. 2, 3.

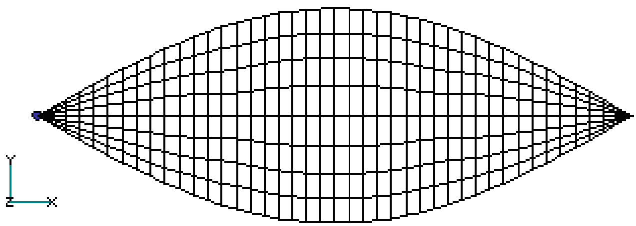

Рис. 2. Перша крутильна форма коливань двотаврової балки ($\omega_{1\gamma}$=580.748 рад/с)

Рис. 3. Перша згинальна форма коливань двотаврової балки (ω_{1u}=451.798 рад/с)

Редукована матриця жорсткості набуває вигляду діагональної матриці і обчислюється за формулою

$$K^* = diag(\omega_{1u}^2,\ \omega_{1\gamma}^2) = diag(451.798^2, 580.748^2). \qquad (8)$$

Для вірності результатів процедури редукування матриця K^* визначена за формулою (4), яка в нашому випадку набуває вигляду

$$K^* = diag(\overline{\varphi}_{1u}^T K \overline{\varphi}_{1u}, \overline{\varphi}_{1\gamma}^T K \overline{\varphi}_{1\gamma}) . \qquad (9)$$

За допомогою розв'язання лінійної задачі статики визначена реакція системи R_L на задане поле переміщень $\{\overline{\varphi}_k\}_{k=1}^m = (\overline{\varphi}_{1u}, \overline{\varphi}_{1\gamma})$ у вигляді

$$R_L = diag(K\overline{\varphi}_{1u}, K\overline{\varphi}_{1\gamma}) , \qquad (10)$$

Члени редукованої матриці жорсткості, що отримана за формулою (9), мають значення майже однакові з членами матриці (8)

$$K^* = \begin{bmatrix} 204121.336 & 0 \\ 0 & 337268.628 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Редукована матриця геометричної жорсткості, згідно чисельної методики [2], обчислюється за формулою

$$(K^* + K_G^*) - (K^*) = K_G^* . \qquad (12)$$

Якщо позначити компоненти вектора переміщень через $x = u + \Delta v$, де u - переміщення, що відповідають вихідній конфігурації стану рівноваги; Δv - приріст переміщення при дії малого віртуального збудження, нелінійна задача статики запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} &K \cdot (u + \Delta v) + (S \cdot (u + \Delta v)) \cdot (u + \Delta v) + \\ &+ ((D \cdot (u + \Delta v)) \cdot (u + \Delta v)) \cdot (u + \Delta v) = P + R_N . \end{aligned} \qquad (13)$$

Тут S, D - квадратичний та кубічний нелінійні оператори відповідно; P - матриця вузлових навантажень, R - матриця реакцій пружної системи на задане поле переміщень; знак • означає процедуру згортання операторів.

При розв'язанні плоскої задачі теорії пружності в докритичному стані квадратичні та кубічні нелінійні оператори відсутні. До того ж, якщо значно зменшити поле переміщень Δv, вираз (13) набуває вигляду

$$K \cdot u + K \cdot \Delta v + 2(S \cdot u) \cdot \Delta v = P + R_N , \tag{14}$$

де

$$K \cdot u = P , \; 2(S \cdot u) = K_G . \tag{15}$$

З урахуванням (15) формула (14) запишеться у вигляді

$$(K + K_G) \cdot \Delta v = R_N . \tag{16}$$

При розв'язанні нелінійної задачі статики (16) поле переміщень Δv приймається у вигляді векторів матриці власних форм коливань. Визначені реакції пружної системи у вигляді $(K + K_G)\overline{\varphi}_{1u}, (K + K_G)\overline{\varphi}_{1\gamma}$. Редукована сума матриць жорсткості та геометричної жорсткості обчислена з урахуванням амплітуди навантаження $P_0 = 10^5$ Н за формулою

$$(K^* + K_G^* \times 10^5) = \begin{bmatrix} \overline{\varphi}_{1u}^T (K + K_G)\overline{\varphi}_{1u} & \overline{\varphi}_{1u}^T (K + K_G)\overline{\varphi}_{1\gamma} \\ \overline{\varphi}_{1\gamma}^T (K + K_G)\overline{\varphi}_{1u} & \overline{\varphi}_{1\gamma}^T (K + K_G)\overline{\varphi}_{1\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 204121.336 & -7016.278 \\ -7030.580 & 337268.628 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Згідно формули (10) визначена редукована матриця геометричної жорсткості

$$K_G^* \times 10^5 = \begin{bmatrix} 0 & -7016.278 \\ -7030.580 & 0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Редукована модель, що описує динамічну стійкість плоскої форми згину двотаврової балки при амплітуді зовнішнього навантаження $P_0 = 1$Н, набуває вигляду системи зв'язних звичайних диференціальних рівнянь другого ступеня

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 451.798^2 \left[u_k - 0.034373 \times 10^{-5} \varphi(t) \gamma_k \right] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 580.748^2 \left[\gamma_k - 0.0208456 \times 10^{-5} \varphi(t)\, u_k \right] = 0, \end{cases} \quad (k = 1,2,3...). \tag{19}$$

Для побудови областей нестійкості двотаврової балки при комбінованому резонансі застосована методика, що наведена в статті [3]. Рівняння динамічної стійкості двотаврової балки в матричному вигляді описується формулою

$$C_2 \frac{d^2 f}{dt^2} + \left[I - \varphi_0(t) A \right] f = 0, \qquad (20)$$

де
$$C_2 = \begin{bmatrix} \omega_1^{-2} & 0 \\ 0 & \omega_2^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 451.798^{-2} & 0 \\ 0 & 580.748^{-2} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.034373 \times 10^{-5} \\ 0.0208456 \times 10^{-5} & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметричне навантаження має вигляд $\varphi_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 \cos \omega t$, де α_0 та β_0 - відповідно статична та динамічна складові навантаження, ω - частота параметричного навантаження.

Необхідно, щоб виконувалися такі умови:

$$\omega_2 > \omega_1 > 0, \;\; a_{12}\omega_1^2 = a_{21}\omega_2^2 = \delta > 0. \qquad (21)$$

У нашому випадку: 580.748рад/с>451.798рад/с>0 та $0.034373 \times 10^{5} \times 451.798^{2} = 0.0208456 \times 10^{-5} \times 580.748^{2} = 0{,}07 > 0$.

Помножимо (20) на C_2^{-1}:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \left[B_0 - \varphi(t) N \right] f = 0. \qquad (22)$$

Тут матриці

$$B_0 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 451.798^2 & 0 \\ 0 & 580.748^2 \end{bmatrix}, \; N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметричне навантаження набуває вигляду

$$\varphi(t) = \alpha + \beta(t) \cos \omega t, \; \alpha = \alpha_0 \delta, \; \beta(t) = \beta_0 \delta, \qquad (23)$$

тут коефіцієнт δ=0,07.

Побудова областей динамічної стійкості виконується для двотаврової балки при значеннях статичної складової параметричного навантаження $\alpha_0 = \left[0 \div 0{,}404 P_{кр} \right]$ і діапазону динамічної складової $\beta_0 = \left[1 \div 0.5 P_{кр} \right]$.

Значення критичного навантаження $P_{\text{кр}} = 807{,}8$ кН визначено за допомогою процедури розв'язання задачі стійкості.

Границі областей нестійкості при комбінованому резонансі обчислюється за формулою:

$$\omega_1 + \omega_2 - \frac{\beta}{2\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}} - \frac{(\alpha^2 + \frac{1}{8}\beta^2)}{2(\omega_1 + \omega_2)\omega_1 \cdot \omega_2} < \omega <$$
$$< \omega_1 + \omega_2 + \frac{\beta}{2\sqrt{\omega_{1u} \cdot \omega_{1\gamma}}} - \frac{(\alpha^2 + \frac{1}{8}\beta^2)}{2(\omega_1 + \omega_2)\omega_1 \cdot \omega_2} \quad (24)$$

На рис. 4 представлена діаграма областей нестійкості для двотаврової балки при комбінованому резонансі.

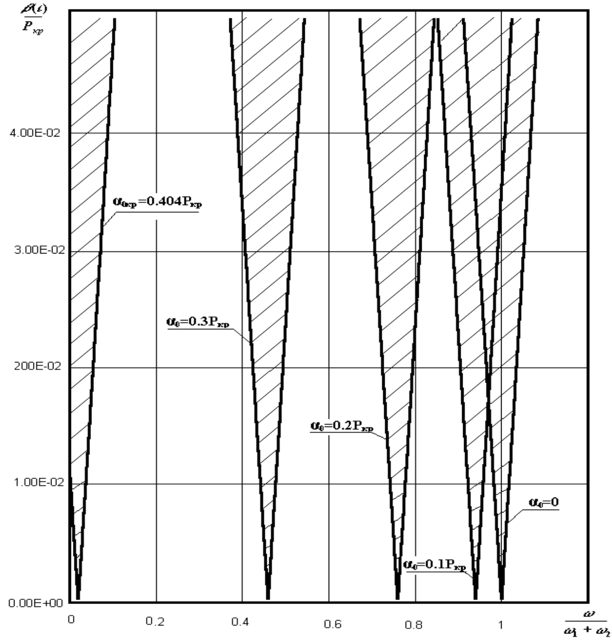

Рис. 4. Діаграма областей нестійкості плоскої форми згину двотаврової балки при комбінованому резонансі

По осі абсцис відкладене відносна частоти збудження, по осі ординат – відношення динамічної складової параметричного навантаження β_0 до критичного значення цього навантаження $P_{кр}$. Області нестійкості обмежені похилими лініями і відповідають різним значенням статичної складової параметричного навантаження α_0. Видно, що при збільшенні статичної складової α_0 області нестійкості зміщуються вліво і комбінаційний резонанс для однакових значень β_0 наступає при меншому значенні ω. При збільшенні динамічної складової параметричного навантаження β_0 при різних значеннях статичної складової α_0 спектр критичних значень частот збудження збільшується.

Досліджується динамічна стійкість плоскої форми згину ферми. Конструкція ферми наведена на рис. 5.

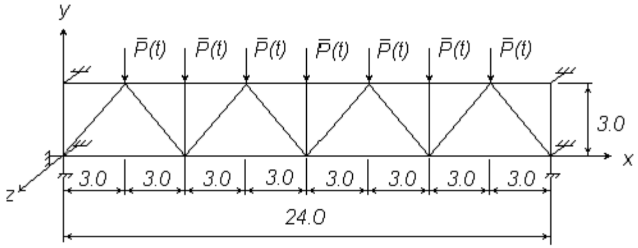

Рис. 5. Конструкція ферми

Геометричні та механічні характеристики ферми і побудова редукованих рівнянь наведена авторами у статті [2]. За допомогою обчислювального комплексу розв'язана задача на вільні коливання і визначенні перші форми згинальних та крутильних коливань плоскої ферми (рис. 6).

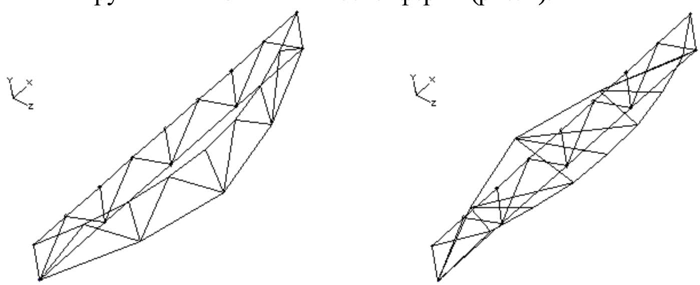

Рис. 6. Перші згинальна та крутильна форми коливань ферми
(ω_{1u}=4.174 рад/с, $\omega_{1\gamma}$=9.013 рад/с)

Періодичне навантаження, що діє у площині найбільшої жорсткості ферми, є параметричним навантаженням по відношенню до згинально-крутильних деформацій із площини її дії. Навантаження приймалося у вигляді $P(t) = P_0 \cos \omega t$, де $P_0 = 1$ Н. Редуковані матриці жорсткості та геометричної жорсткості в результаті розрахунків набули вигляду

$$K^* = \begin{bmatrix} 17.42405 & 0 \\ 0 & 81.26646 \end{bmatrix},\ K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & -1.854436 \times 10^{-3} \\ -1.854916 \times 10^{-3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Рівняння динамічної стійкості плоского згину ферми мають вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 4.174^2 \left[u_k - 1.061 \times 10^{-4} \varphi(t) \gamma_k \right] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 9.013^2 \left[\gamma_k - 0.221 \times 10^{-4} \varphi(\mathrm{t}) u_k \right] = 0, \end{cases} \quad (k = 1,2,3...). \quad (26)$$

Для дослідженні динамічної стійкості плоскої форми згину ферми визначені матриці рівняння (20):

$$C_2 = \begin{bmatrix} \omega_1^{-2} & 0 \\ 0 & \omega_2^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.147^{-2} & 0 \\ 0 & 9.013^{-2} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.061 \times 10^{-4} \\ 0.221 \times 10^{-4} & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Перевірені необхідні умови (21): 9.013 рад/с>4.147 рад/с>0; $1.061 \times 10^{-4} \times 4.147^2 = 0.221 \times 10^{-4} \times 9.013^2 = 0.00178 > 0$.

Матриця B_0 рівняння (22) має вигляд

$$B_0 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.147^2 & 0 \\ 0 & 9.013^2 \end{bmatrix}.$$

Параметричне навантаження приймається у вигляді (23), тут δ=0.00178. Побудова областей динамічної нестійкості виконується для ферми при значеннях статичної складової параметричного навантаження $\alpha_0 = \lfloor 0 \div 0.66 P_{\text{кр}} \rfloor$ і діапазону динамічної складової $\beta_0 = \lfloor 1 \div P_{\text{кр}} \rfloor$, де $P_{\text{кр}} = 96$ кН значення критичного навантаження, яке отримане при розв'язанні задачі стійкості. Області нестійкості плоскої форми згину ферми при комбінованому резонансі визначені за формулою (24) і представлені на рис. 7.

З діаграми видно, що при збільшені статичної складової α_0 області нестійкості плоскої форми згину ферми зміщуються вліво, тобто комбінаційний резонанс наступає при меншому значенні ω . При збільшені динамічної складової параметричного навантаження β_0 спектр частот збудження збільшуються.

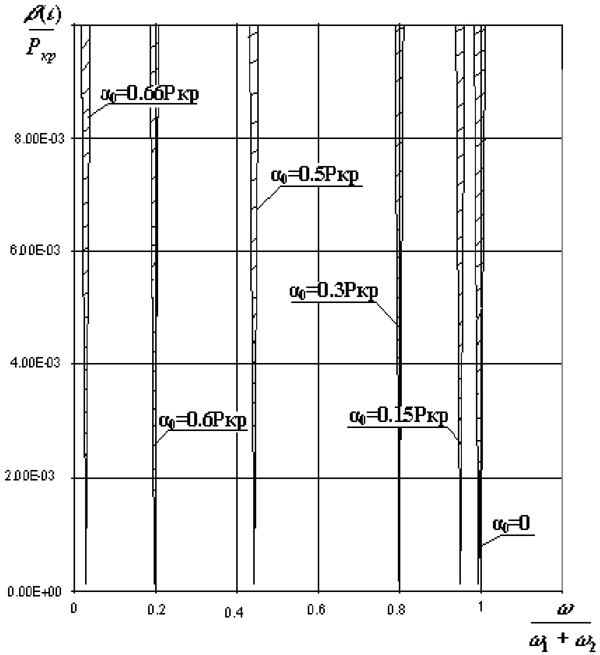

Рис. 7. Діаграма областей нестійкості плоскої форми згину ферми при комбінованому резонансі

Таким чином, визначені області нестійкості, що відповідають комбінаційному резонансу, дають змогу оцінити динамічну стійкість пружних систем та визначити спектр частот збудження, що є критичним, при різних значеннях статичної та динамічної складових параметричного навантаження.

1. *Гоцуляк Є*.О., *Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.* Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій. //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2004. -№74.
2. *Гоцуляк Є*.О., *Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.* Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем. //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2005. -№77.
3. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.
4. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972 - 718 с.