

С.І. КРІЛЬ, доктор технічних наук
Інститут гідромеханіки НАН України

ГІДРАВЛІЧНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ УСТАЛЕНОГО ІЗОТЕРМІЧНОГО РУХУ ГАЗОРІДИННИХ СУМІШЕЙ В ТРУБАХ

На основі осереднених по імовірності диференціальних рівнянь гідродинаміки двофазного середовища побудовано гідравлічні рівняння нерозривності та Бернуллі для усталеного ізотермічного напірного руху суміші рідини і газових бульбашок. Одержані рівняння є ефективним теоретичним підґрунтям для побудови математичних моделей висхідних напірних газорідинних потоків в різного роду технологічних процесах, особливо при ерліфтному транспортуванні рідини по вертикальних трубах.

Ключові слова: газорідинна суміш; усталений ізотермічний рух; гідравлічні рівняння.

На основе осредненных по вероятности дифференциальных уравнений гидродинамики двухфазной среды построены гидравлические уравнения неразрывности и Бернулли для установившегося изотермического напорного движения смеси жидкости и газовых пузырей. Полученные уравнения являются эффективной теоретической основой для построения математических моделей газожидкостных потоков в разного рода технологических процессах, особенно при эрлифтном транспортировании жидкости по вертикальным трубам.

Ключевые слова: газожидкостная смесь; установившееся изотермическое движение; гидравлические уравнения.

The hydraulic continuity equations and the Bernoulli equation are derived for steady dynamics of isothermal pressure mixture of liquid and gas bubbles. These equations are built by averaging of hydrodynamic differential equations of two-phase medium over the probability distribution of basic parameters. The resulting equations represent an effective theoretical basis for the construction of mathematical models of gas-liquid flows in various industrial processes, especially in the air-lift transportation of liquid in vertical pipes.

Keywords: gas-liquid mixture; isothermal steady motion; hydraulic equations.

Турбулентні напірні потоки газорідинних сумішей, зокрема сумішей рідини і бульбашок повітря, спостерігаються у різного роду технологічних

процесах, зокрема, у підймальних трубах ерліфтних установок, які знаходять широке застосування при видобуванні нафти чи води із бурових свердловин на поверхню землі. Такі потоки, як правило, нерівномірні і носять складний характер. Внаслідок пониження тиску уздовж потоку змінюються у цьому ж напрямку об'єм і густина газової фази, а отже, і гідродинамічні характеристики суміші.

В основу відомих математичних моделей одновимірних усталених течій газорідинних сумішей покладено осереднені диференціальні рівняння збереження маси і кількості руху суміші як двофазного середовища [1-6]. Однак, при розв'язанні системи цих рівнянь і формулюванні граничних умов для осереднених швидкостей і концентрацій фаз виникають, як відомо, певні труднощі. У зв'язку з цим є підстави вважати, що в основу математичного моделювання такого роду двофазних течій доцільно покласти більш прості рівняння – гідравлічні рівняння нерозривності і енергобалансу (рівняння Бернуллі). Побудові цих рівнянь для потоку газорідинної суміші і присвячена дана робота.

Нехай рух газорідинної суміші здійснюється в прямій круглоциліндричній трубі. Припускається, що просторова орієнтація труби довільна, рух суміші усталений, фазові переходи відсутні. Оскільки рух суміші здійснюється при перепаді тиску, уздовж потоку відбувається розширення об'єму газової фази, яке, звичайно, супроводжується виділенням теплової енергії. Однак, зважаючи на те, що газова фаза суміші знаходиться в тісному контакті з рідиною, теплоємність якої значно перевищує теплоємність газу, можна вважати, що у даному випадку процес розширення газової фази близький до ізотермічного процесу [8].

Виберемо систему декартових прямокутних координат Ox_α ($\alpha = 1, 2, 3$), осі Ox_1 та Ox_2 якої розташовані в горизонтальній площині, а вісь Ox_3 спрямована уверх. В якості вихідних рівнянь динаміки газорідинної суміші використаємо осереднені диференціальні рівняння нерозривності і руху газової і рідинної фаз. Припускається спочатку, що газорідинна суміш – «ідеальне» (без тертя) двофазне середовище. У даному випадку названі вище диференціальні рівняння для усталеного ізотермічного руху газорідинної суміші, написані у системі координат Ox_α , мають вигляд [7]:

рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial \rho_g \bar{C}_g \bar{u}_{g,\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_w (1 - \bar{C}_g) \bar{u}_{w,\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0; \quad (2)$$

рівняння руху в проекціях на осі координат:

$$\rho_g \bar{C}_g \bar{u}_{g,\alpha} \frac{\partial \bar{u}_{g,i}}{\partial x_\alpha} = \rho_g \bar{C}_g g_i - \bar{C}_g \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}, \quad (3)$$

$$\rho_w(1 - \bar{C}_r)\bar{u}_{w,\alpha} \frac{\partial \bar{u}_{w,i}}{\partial x_\alpha} = \rho_w(1 - \bar{C}_r)g_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \bar{C}_r \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}; \quad (4)$$

$$(\alpha = 1, 2, 3).$$

До цих рівнянь приєднуються рівняння стану для газової і рідинної фаз при $T = const$

$$\bar{P}_r V_r = const, \quad (5)$$

$$\rho_w = const. \quad (6)$$

У рівняннях (1) – (5) верхня риска означає середньостатистичне значення відповідної величини в точках потоку. Нижні значки «г» і «w» відносяться до газової і рідинної фаз відповідно. Окрім цього, використано наступні позначення: ρ_r , ρ_w – густина газової і рідинної фаз; $\bar{C}_r$ – істинна локальна концентрація газової фази в сенсі імовірності того, що дана точка потоку належить області, зайнятій газовою фазою; $\bar{u}_{r,\alpha}$, $\bar{u}_{w,\alpha}$ – компонента вектора середньостатистичної істинної швидкості газової і рідинної фаз; g_i – компонента вектора прискорення вільного падіння; $\bar{P}$, $\bar{P}_r$ – тиск в рідинній та газовій фазах; V_r – питомий, віднесений до одиниці маси, об'єм тобто $V_r = \frac{1}{\rho_r}$.

По індексу α , який двічі повторюється в одночленних виразах, проводиться підсумовування від одиниці до трьох. Величина $\bar{C} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}$, яка входить з протилежними знаками до рівнянь (3) і (4), виражає силу міжфазної взаємодії, обумовлену градієнтом тиску.

Оскільки осереднені за імовірністю гідродинамічні величини в рівняннях (1)-(5) є неперервними функціями координат, ці рівняння описують гідродинаміку відповідної фази як деякого континуума у статистичному розумінні. Метод імовірнісного осереднення гідродинамічних величин турбулентного двофазного потоку розвинуто в [7]. На відміну від просторового методу осереднення, метод імовірнісного осереднення, як відомо, є більш універсальним і не накладає будь-яких умов на співвідношення лінійних масштабів частинок дисперсної фази і двофазного потоку в цілому.

Перетворимо диференціальні рівняння (1) і (2) до гідравлічних рівнянь нерозривності, а рівняння (3) і (4) – до інтеграла Бернуллі.

Спочатку розглянемо рівняння нерозривності фаз. Намітимо додатково координатну вісь S , яка збігається з віссю труби і спрямована уздовж ліній осередненої течії суміші. Позначимо через $\cos \varphi_\alpha$ спрямовуючі косинуси цієї осі S , тобто косинуси кута між напрямком S і відповідною віссю координат Ox_α .

Зважаючи на те, що напрям векторів осереднених істинних швидкостей фаз збігається з напрямком S , представимо компоненти швидкостей $\bar{u}_{r,\alpha}$ і $\bar{u}_{w,\alpha}$ відповідно у вигляді:

$$\bar{u}_{\Gamma,\alpha} = \bar{u}_{\Gamma} \cos \varphi_{\alpha}, \quad (7)$$

$$\bar{u}_{w,\alpha} = \bar{u}_w \cos \varphi_{\alpha}, \quad (8)$$

де $\bar{u}_{\Gamma}$, $\bar{u}_w$ – абсолютна величина вектора осередненої істинної швидкості газової і рідинної фаз.

В результаті підстановки виразів (7) і (8) у відповідні рівняння (1) і (2), одержимо, враховуючи, що $\cos \varphi_{\alpha} = \text{const}$ при русі суміші в прямій трубі,

$$\frac{\partial \rho_{\Gamma} \bar{C} \bar{u}_{\Gamma}}{\partial x_{\alpha}} \cos \varphi_{\alpha} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho_w (1 - \bar{C}) \bar{u}_w}{\partial x_{\alpha}} \cos \varphi_{\alpha} = 0. \quad (10)$$

Оскільки оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \cos \varphi_{\alpha}$$

є похідною за напрямком S , тобто

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \cos \varphi_{\alpha} = \frac{d}{ds},$$

рівняння (9) і (10) перепишемо у вигляді

$$\frac{d}{ds} (\rho_{\Gamma} \bar{C} \bar{u}_{\Gamma}) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d}{ds} (\rho_w (1 - \bar{C}) \bar{u}_w) = 0. \quad (12)$$

Проінтегруємо ці рівняння по площі живого перерізу потоку F , яка не залежить від координати S . В результаті інтегрування та введення позначень Q_{Γ} і Q_w :

$$Q_{\Gamma} = \int_F \bar{C} \bar{u}_{\Gamma} dF;$$

$$Q_w = \int_F (1 - \bar{C}) \bar{u}_w dF,$$

рівняння (11) і (12) набувають наступного вигляду відповідно

$$\frac{d}{ds} (\rho_{\Gamma} Q_{\Gamma}) = 0; \quad (13)$$

$$\frac{d}{ds} (\rho_w Q_w) = 0, \quad (14)$$

де Q_{Γ} , Q_w – об'ємна витрата газової і рідинної фаз. Із (13) і (14) випливає, що

$$\rho_{\Gamma} Q_{\Gamma} = \text{const} \quad (15)$$

$$\rho_w Q_w = \text{const} \quad (16)$$

Це і є гідравлічні рівняння нерозривності для усталеного руху газової та рідинної фаз. Ці рівняння можемо переписати, відповідно, у вигляді

$$\rho_{\Gamma} u_{\Gamma} C F = \text{const}, \quad (17)$$

$$\rho_w u_w (1 - C) F = \text{const}, \quad (18)$$

де C – середня по усій площі живого перерізу потоку істинна концентрація газової фази; u_Γ , u_w – середня по площі живого перерізу, зайнятій відповідною фазою, істинна швидкість газової і рідинної фаз, тобто

$$u_\Gamma = \frac{Q_\Gamma}{CF}, \quad (19)$$

$$u_w = \frac{Q_w}{(1-C)F}. \quad (20)$$

Тепер розглянемо гідравлічне рівняння нерозривності для потоку газорідинної суміші. Якщо помножити та водночас поділити праву частину кожного із рівнянь (19) і (20) на об'ємну витрату суміші Q , а потім виконати деякі елементарні перетворення цих рівнянь, то в результаті одержимо

$$u_\Gamma = \frac{C_p}{C} u, \quad (21)$$

$$u_w = \frac{(1-C_p)}{(1-C)} u, \quad (22)$$

де u – середня по живого перерізу потоку швидкість суміші, $u = \frac{Q}{F}$; а C_p – витратна концентрація газової фази, $C_p = \frac{Q_\Gamma}{Q}$.

Після підстановки виразів (21) і (22) у відповідні рівняння (17) і (18) та подальшого складання одержаних рівнянь, будемо мати

$$\rho_p u F = \text{const}, \quad (23)$$

або

$$\rho_p Q = \text{const}, \quad (24)$$

де ρ_p – витратна густина газорідинної суміші

$$\rho_p = \rho_\Gamma C_p + \rho_w (1 - C_p). \quad (25)$$

Гідравлічні рівняння (23) і (24) виражають нерозривність потоку газорідинної суміші.

Переходимо до побудови інтеграла Бернуллі для потоку ідеальної газорідинної суміші.

Спочатку розглянемо диференціальне рівняння руху газової фази (3), попередньо виконавши певні допоміжні перетворення, а саме:

$$\bar{u}_{\Gamma,\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \bar{u}_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \cos \varphi_\alpha = \bar{u}_\Gamma \frac{d}{ds}, \quad (26)$$

$$\bar{u}_{\Gamma,i} \frac{\partial \bar{u}_{\Gamma,i}}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_{\Gamma,i} \bar{u}_{\Gamma,i}}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_\Gamma^2}{\partial x_\alpha}, \quad (27)$$

$$\bar{u}_{\Gamma,\alpha} \bar{u}_{\Gamma,i} \frac{\partial \bar{u}_{\Gamma,i}}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2} \bar{u}_\Gamma \frac{d \bar{u}_\Gamma^2}{ds}, \quad (28)$$

$$g_i \bar{u}_{\Gamma,i} = -g \bar{u}_\Gamma \frac{dx_3}{ds}, \quad (29)$$

де по індексу i проводиться, аналогічно як і по індексу α , підсумовування від одиниці до трьох.

Помноживши рівняння (3) на $\bar{u}_{\Gamma,i}$, одержимо

$$\rho_r \bar{C}_r \bar{u}_{r,\alpha} \bar{u}_{r,i} \frac{\partial \bar{u}_{r,i}}{\partial x_\alpha} = \rho_r \bar{C}_r g_i \bar{u}_{r,i} - \bar{C}_r \bar{u}_{r,i} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i},$$

або, враховуючи (26) – (29),

$$\rho_r \bar{C}_r \bar{u}_r \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}_r^2}{ds} = -\rho_r \bar{C}_r g \bar{u}_r \frac{dx_3}{ds} - \bar{C}_r \bar{u}_r \frac{d\bar{P}}{ds}. \quad (30)$$

Після аналогічного перетворення рівняння (4), будемо мати

$$\rho_w (1 - \bar{C}_r) \bar{u}_w \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}_w^2}{ds} = -\rho_w (1 - \bar{C}_r) g \bar{u}_w \frac{dx_3}{ds} - (1 - \bar{C}_r) \bar{u}_w \frac{d\bar{P}}{ds}. \quad (31)$$

Тепер складемо почленно рівняння (30) і (31). В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho_r \bar{C}_r \bar{u}_r \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}_r^2}{ds} + \rho_w (1 - \bar{C}_r) \bar{u}_w \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}_w^2}{ds} \\ = -(\rho_r \bar{C}_r \bar{u}_r + \rho_w (1 - \bar{C}_r) \bar{u}_w) g \frac{dx_3}{ds} - \\ -(\bar{C}_r \bar{u}_r + (1 - \bar{C}_r) \bar{u}_w) \frac{d\bar{P}}{ds}. \end{aligned} \quad (32)$$

Рівняння (32) відноситься до елементарної струминки ідеальної газорідинної суміші. Для можливого розповсюдження його на цілий потік цієї суміші необхідно врахувати неоднаковість осереднених швидкостей окремих елементарних струминок по всьому живому перерізу потоку, тобто необхідно проінтегрувати по площі живого перерізу F усі доданки рівняння (32). В результаті інтегрування та подальших елементарних перетворень, рівняння (32) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \rho_r C_r u_r F \frac{1}{2} \frac{d\beta_r u_r^2}{dS} + \rho_w (1 - C_r) u_w F \frac{1}{2} \frac{d\beta_w u_w^2}{dS} = \\ = -(\rho_r C_r u_r F + \rho_w (1 - C_r) u_w F) g \frac{dx_3}{ds} - (C_r u_r F + (1 - C_r) u_w F) \frac{d\bar{P}}{ds}, \end{aligned} \quad (33)$$

де C_r – середня по живому перерізу потоку імовірнісна концентрація газової фази; $\beta_r \beta_w$ – коефіцієнт Коріоліса для потоку газової і рідинної фаз:

$$\beta_r = \int_F \bar{C}_r \bar{u}_r^3 dF / C_r u_r^3 F;$$

$$\beta_w = \int_F (1 - \bar{C}_r) \bar{u}_w^3 dF / (1 - C_r) u_w^3 F.$$

Введемо наступні позначення:

$$Q_{m,r} = \rho_r C_r u_r F, \quad (34)$$

$$Q_{m,w} = \rho_w (1 - C_r) u_w F, \quad (35)$$

$$Q_m = Q_{m,r} + Q_{m,w}, \quad (36)$$

$$Q = C_r u_r F + (1 - C_r) u_w F, \quad (37)$$

де $Q_{m,r}$, $Q_{m,w}$, Q_m – масова витрата газової фази, рідинної фази і газосуміші.

Врахувавши в рівнянні (33) позначення (34)-(37), спочатку поділимо рівняння на незмінну уздовж потоку величину $Q_m g$, а потім помножимо його на ds і перенесемо усі доданки правої частини рівняння в ліву. В результаті одержимо:

$$d \left(C_m \frac{u_r^2}{2g} + (1 - C_m) \frac{u_w^2}{2g} + x_3 \right) + \frac{dP}{\rho_p g} = 0, \quad (38)$$

$$C_m = \frac{Q_{m,r}}{Q_m}; \quad (39)$$

$$\rho_p = \frac{Q_m}{Q} = \rho_r C_p + \rho_w (1 - C_p), \quad (40)$$

де C_m – масова концентрація газової фази. Величини C_p , а отже і ρ_p , змінні уздовж потоку із-за розширення газової фази. Тому введемо функцію P_* від тиску P , яка задовольняє умові

$$dP_* = \frac{dP}{\rho_p g}. \quad (41)$$

Звідси

$$P_* = \int \frac{dP}{\rho_p g} + const. \quad (42)$$

Враховуючи (41) і (42), перепишемо рівняння (38) у вигляді:

$$d \left(C_m \frac{u_r^2}{2g} + (1 - C_m) \frac{u_w^2}{2g} + \int \frac{dP}{\rho_p g} + x_3 \right) = 0. \quad (43)$$

Із рівняння (43) випливає

$$C_m \frac{u_r^2}{2g} + (1 - C_m) \frac{u_w^2}{2g} + \int \frac{dP}{\rho_p g} + x_3 = const \quad (\text{уздовж потоку}). \quad (44)$$

Це і є інтеграл Бернуллі для усталеного руху ідеальної газорідинної суміші.

У випадку усталеного руху реальної газорідинної суміші частина гідродинамічного напору, який виражається лівою частиною рівняння (44), втрачається на подолання гідравлічного опору тертя h_T і місцевих гідравлічних опорів h_M . Тому у лівій частині рівняння (44) потрібно додатково урахувати доданок $h = h_T + h_M$, який виражає повну втрату гідродинамічного напору на гідравлічний опір. У даному випадку рівняння (44) набуває вигляду

$$C_m \frac{u_r^2}{2g} + (1 - C_m) \frac{u_w^2}{2g} + \int \frac{dP}{\rho_p g} + x_3 + h = const \quad (\text{уздовж потоку}). \quad (45)$$

Враховуючи рівняння стану газової фази (5) та вираз (40), інтеграл, який входить до рівняння (44), дорівнює:

$$\int \frac{dP}{\rho_p g} = (1 - C_m) \frac{P}{\rho_w g} + C_m \frac{P_0}{\rho_0 g} \ln \frac{P}{P_0}, \quad (46)$$

де P_0 і ρ_0 – тиск і густина повітря для стандартних фізичних умов.

Отже, в результаті підстановки рівняння (46) в (45), одержуємо остаточно

$$C_m \frac{u_r^2}{2g} + (1 - C_m) \frac{u_w^2}{2g} + (1 - C_m) \frac{P}{\rho_w g} + C_m \frac{P_0}{\rho_0 g} \ln \frac{P}{P_0} + x_3 + h = const. \quad (47)$$

Висновки

В даній роботі запропоновано дещо новий метод побудови гідравлічних рівнянь – рівняння нерозривності і інтеграла Бернуллі – для усталеного ізотермічного газорідинного потоку. Одержані рівняння науково обґрунтовані,

в повній мірі відображують специфіку двофазного потоку і є ефективним теоретичним підґрунтям для побудови математичних моделей висхідних газорідинних потоків в різного роду технологічних процесах, особливо при ерліфтному транспортуванні рідини по вертикальних трубах.

Список літератури

1. *Мамаев В.А., Одишария Г.Э., Семенов Н.И., Точигин А.А.* Гидродинамика газожидкостных смесей в трубах. – М.: «Недра», 1969. – 208 с.
2. *Уоллис Г.* Одномерные двухфазные течения. – М.: «Мир», 1972. – 304с.
3. *Кутателадзе С.С., Стырикович М.А.* Гидродинамика газожидкостных смесей в трубах. – М.: «Энергия», 1976. – 249с.
4. *Приходько М.А.* Гідродинаміка бульбашкових газо-паро-рідинних систем. ІГМ НАН України.– 2007. – 437с.
5. *Кононенко А.П.* Уравнения сохранения массы и импульса вертикально восходящего водовоздушного потока в подъемной трубе эрлифта // Промышленная гидравлика и пневматика, №3(13).– 2006. – С.44-48.
6. *Кононенко А.П.* Моделирование рабочего процесса эрлифта // Наукові праці ДонНТУ, вип.17(157). – 2009. – С.184.
7. *Криль С.И.* Напорные взвесенесущие потоки. – К.: Наукова думка, 1990. – 160с.
8. *Пороло Л.В.* Воздушно-газовые подъемники жидкости. – М.: Изд-во «Машиностроение», 1969. – 160 с.