

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛО- І МАСОПЕРЕНОСУ
ПРИ ДВОВИМІРНІЙ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ**

Питанню побудови нестационарних полів температури та концентрації і розподілу їх в пласті при нагнітанні в нього рідини з температурою або концентрацією забруднень відмінних від фонових присвячено ряд робіт. Але у більшості з них розглядаються в основному одновимірні (лінійні чи радіальні) течії рідини. В реальних умовах мають місце двовимірні течії рідини, що обумовлено геометрією розміщення контурів нагнітання та розвантаження (нагнітальні та експлуатаційні свердловини, водозабори і басейни забруднень в природній течії тощо).

Аналіз математичних моделей переносу тепла і маси в умовах двовимірної фільтрації рідини показує, що основною проблемою є врахування конвективних складових $\vec{v} \text{ grad} T$ або $\vec{v} \text{ grad} C$, де вектор швидкості руху рідини $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$, T і C – відповідно температура і концентрація забруднень.

Як показано в розробках [1, 2] в такому випадку можна використати метод зведення двовимірної течії до одновимірної по лініях (стрічках, трубках) течії. Таке зведення можна здійснювати по-різному: використовувати гідродинамічні сітки течії, побудованих графічно, моделюванням течії рідини на суцільному середовищі чи на основі чисельно-різницевих методів, або використовувати рівняння ліній течії (векторних ліній), розв'язок яких можна одержати аналітично або наближеними методами, а також функції комплексного потенціалу течії $\omega = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ та конформні відображення. Основним припущенням в таких моделях є незалежність гідродинамічного поля від полів концентрації і температури – принцип недеформованості ліній течії. При суттєвому впливі цих факторів на гідродинаміку системи можна застосовувати метод деформованих ліній течії.

Нехай розв'язком задачі гідродинаміки в двовимірній області Ω

$$\text{div } \vec{v} = 0; \quad \vec{v} = -k \text{ grad} H, \quad x, y \in \Omega, \quad \text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$$

$$\vec{v} = (v_x; v_y) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}.$$

Припустимо, що розв'язок рівняння ліній течії

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

одержано у вигляді функції $C = f(x, \hat{z})$, для якої існує обернена $f^{-1}(C, \hat{z})$.

Причому $\hat{z} = y/x$; $v_{\hat{z}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{v_y - \hat{z}v_x}{f^{-1}(C, \hat{z})}$ – координата лінії течії і швидкість вздовж лінії течії.

Через те що

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{d\hat{z}}{v_{\hat{z}}},$$

для визначення часу t досягнення заданого рівня температури чи концентрації в заданій точці поля можна користуватись як складовими швидкостями v_x і v_y , так і повною швидкістю $V_{\hat{z}}$ за напрямом, який збігається з напрямом дотичної до лінії течії. Оскільки в цьому випадку рівняння конвективного теплопереносу і міграції забруднень набувають вигляду рівняння Кельвіна-Ламба [3], яке описує рух частинки разом з течією підземних вод

$$v_x^* \frac{\partial u}{\partial x} + v_y^* \frac{\partial u}{\partial y} + n_e \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

то

$$\frac{dx}{v_x^*} = \frac{dy}{v_y^*} = \frac{d\hat{z}}{v_{\hat{z}}^*} = -\frac{dt}{n_e}. \quad (2)$$

В наведених рівняннях $u(x, y, t) = 0$ рівняння фронту мічених частинок (йому відповідає значення $n_e = n$ – активна пористість пласта), рівняння фронту забруднень (йому відповідає значення $n_e = n + N/C$, N – сорбційна ємність породи; C – концентрація забруднень), рівняння теплового фронту (йому відповідає значення $n_e = n + (1-n)C_{ck}/C_p$, C_{ck} , C_p – теплоємності відповідно до скелета порід і рідини). Отже, рівняння (1) можна записати так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{v} \text{grad} u = 0,$$

характеристичний вид якого

$$du = 0 \text{ вздовж } t - \int_{z_0}^z \frac{dz}{v(\eta)} = \text{const.}$$

Нехай відомий комплексний потенціал течії $\omega(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$; тоді

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Вводячи нові незалежні змінні $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ і враховуючи ортогональність ліній течії та функції течії, одержимо

$$\begin{aligned} \bar{v} \text{grad} u &= v_x(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + v_y(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla \phi \nabla u = \nabla \phi \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \nabla \phi + \frac{\partial u}{\partial \psi} \nabla \psi \right) = \\ &= (\nabla \phi)^2 \frac{\partial u}{\partial \phi} + \nabla \phi \nabla \psi \frac{\partial u}{\partial \psi} = v^2(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} \end{aligned}$$

($\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y}$, $\nabla \phi \nabla \psi = 0$ в силу ортогональності ліній і функцій течії).

Отже, рівняння (1) можна записати так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v^2(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

яке в характеристичному виді можна подати так:

$$dt = 0 \text{ вздовж } t - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi^*}{v^2(\xi^*, \eta)} = \text{const.}$$

Запропонований метод ліній течії дає можливість досліджувати поля температури і концентрації забруднень при двовимірній течії рідини на основі залежностей, одержаних для випадку лінійного потоку рідини простим введенням узагальнених змінних Больцмана. Якщо для лінійного потоку узагальнені змінні довжини ξ і часу τ мали вигляд

$$\xi = \frac{\alpha x}{C_p v}; \quad \xi = \frac{\alpha}{C_p} \int_{x_0}^x \frac{dz}{v(z)}; \quad \tau = \frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)} \left(t - n \frac{x}{v} \right); \quad \tau = \frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)} \left(t - n \int_{x_0}^x \frac{dz}{v(z)} \right)$$

то для двовимірної течії –

$$\xi = \frac{\alpha}{C_p} \int_{\hat{z}_0}^{\hat{z}} \frac{dz_1}{v(z_1)}; \quad \xi = \frac{\alpha}{C_p} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi_1}{v^2(\xi_1, \eta)}; \quad \tau = \frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)} \left(t - n \int_{\hat{z}_0}^{\hat{z}} \frac{dz_1}{v(z_1)} \right)$$

$$\tau = \frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)} \left(t - n \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi_1}{v^2(\xi_1, \eta)} \right),$$

де $x_0, \hat{z}_0, \xi_0$ – координати контура нагнітання (живлення); α – коефіцієнт міжфазового теплообміну.

Вирази для визначення узагальнених змінних ξ і τ можна одержати і для стрічки течії. Нехай в стрічці (трубці) течії з поперечним перерізом $f(s)$ і параметром $q = \psi_{i+1} - \psi_i$ протікає конвективний теплоперенос з міжфазовим теплообміном. Рівняння збереження теплової енергії для скелета породи пласта і рідини мають вигляд:

$$nC_p \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = - \frac{C_p q}{f(s)} \frac{\partial \theta_1}{\partial s} - \alpha(\theta_1 - \theta_2); \quad (3)$$

$$C_{ck}(1-n) \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \alpha(\theta_1 - \theta_2), \quad (4)$$

де s – дугова координата трубки течії.

Будемо розглядати змінний об'єм трубки течії вздовж дугової координати

$$V_i = \int_{s_0}^s f(\lambda) d\lambda$$

і перепишемо рівняння (3) у вигляді

$$nC_p \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + C_p q \frac{\partial \theta_1}{\partial V_i} + \alpha(\theta_1 - \theta_2) = 0. \quad (5)$$

Ввівши у рівняння (4) і (5) узагальнені змінні

$$\xi = \frac{\alpha}{C_p q} \int_0^{V_i} dV = \frac{\alpha}{C_p} \frac{V_i}{q}; \quad \tau = \frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)} \left(t - \frac{n}{q} \int_0^{V_i} dV \right) = \frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)} \left(t - n \frac{V_i}{q} \right),$$

одержимо відомі рівняння

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \theta_2 - \theta_1; \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = \theta_1 - \theta_2,$$

розв'язання яких розглянуто в роботі [2].

Література

1. Кононенко Г. М. Аналитические и численные решения одно- и двумерных краевых задач конвективного теплопереноса: Препринт 81.4. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1981. — 64 с.
2. Кононенко Г. М., Вознюк Л. Ф. Приближенные методы исследования тепло- и массопереноса в системах извлечения тепла Земли. — К.: Наукова думка, 1975. — 139 с.
3. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. — М.: Гостоптехиздат, 1949. — 625 с.