УДК 539.03

Гоцуляк Є.О., д-р техн. наук.
Пасічник Р.В.

СТІЙКІСТЬ ЧОТИРЬОХПЕЛЮСТКОВОГО ГІПАРА

У будівництві в якості жорстких просторових покриттів промислових та громадських будівель поряд з круглими і прямокутними в плані випуклими оболонками, що мають додатну гаусову кривину використовуються також гіперболічні параболоїди, увігнуто-випукла поверхня яких має від'ємну гаусову кривину. Удосконалення конструктивних елементів покриття в промислових спорудах шляхом заміни лінійних конструкцій покриття просторовою системою-оболонкою дозволяє знизити витрату бетону і металу на одиницю площі споруди і зменшити вартість покриття. Крім цього, в багатьох випадках будівництва споруд громадського призначення великих прольотів оболонка являється єдино можливою конструкцією покриття.

Архітектурна виразність, простота утворення лінійної поверхні і висока технологічність, можливість комбінувати різноманітні типи покриттів в поєднанні з загальними перевагами оболонок дозволяє виділити оболонки типу гіперболічного параболоїда як конструкції, що являють собою велику практичну цінність.

Композиційні та архітектурні переваги гіпарів випливають з самої форми оболонки, яка, завдяки прямолінійним краям, добре спрягається з іншими контурними елементами покриття.

Статичні переваги гіпарів перед випуклими оболонками полягають в тому, що вони добре протистоять втраті стійкості завдяки взаємодії розтягуючих і стискуючих напружень, що виникають відповідно вздовж увігнутої та випуклої парабол.

Поряд з перевагами гіпари мають ряд недоліків порівняно з випуклими оболонками. Найбільш суттєвим недоліком залізобетонних оболонок в формі гіперболічних параболоїдів є розтягуючі напруження, що виникають в напрямку увігнутих парабол. Такі напруження можуть привести до виникнення тріщин в бетоні і до подальшої корозії арматури. Проте лінійна поверхня гіпарів зручна для надання бетону попереднього напруження.

Іншою статичною особливістю являється необхідність закріплення двох протилежних кутів, оскільки під дією рівномірно розподіленого навантаження прямокутний контур може зазнати перекосу в плані. Фіксація досягається влаштуванням розтягнутого елементу між нижніми кутами, або влаштуванням в цих місцях контрфорсів. На практиці для сприйняття розпору в більшості випадків використовують затяжку.

Для дискретизації континуальної задачі теорії оболонок використовується метод криволінійних сіток. На серединній поверхні оболонки будуються координатні лінії недеформованої системи координат i, j. Визначаючи вектор внутрішніх зусиль на лініях між вузлами різницевої сітки, рівняння рівноваги у вузлі (i, j) перетворюється до різницевого вигляду.

Враховуючи специфіку деформування тонких оболонок, що проявляється в суттєвій зміні зовнішньої метрики при незначній зміні внутрішньої, подається вираз базисних векторів точок деформованої поверхні у вигляді

$$\vec{e}_{\alpha}^{\,*} = \vec{e}_{\alpha} + \Delta\vec{e}_{\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,3). \tag{1}$$

Вирази приросту векторів основного локального базису будуть мати вигляд

$$\Delta\vec{e}_{\alpha} = \left[\vec{\Omega} \times \vec{e}_{\alpha}\right] \quad (\alpha = 1,2,3),$$

або

$$\Delta\vec{e}_1 = -\vartheta_1\vec{e}_3,\ \Delta\vec{e}_2 = -\vartheta_2\vec{e}_3, \quad \Delta\vec{e}_3 = \vartheta_2\vec{e}^{\,2} + \vartheta_1\vec{e}^{\,1}. \tag{2}$$

Виходячи з рівнянь рівноваги і вводячи в розглянуті прирости базових векторів (2) та накопичених зусиль $\overset{*}{T}{}^{\alpha t}\,(\alpha = 1,\ 2;\ t = 1,\ 2,\ ,3)$, лінеаризовані рівняння рівноваги тонкої оболонки представляються в вигляді

$$0.5\Big\{\Big(\sqrt{a_{i+0.5;\,j+0.5}} + \sqrt{a_{i+0.5;\,j-0.5}}\Big)\times$$

$$\times\left[T^{11}\vec{e}_1^{\,*} - \overset{*}{T}{}^{11}\,\vartheta_1\vec{e}_3 + T^{12}\vec{e}_2^{\,*} - \overset{*}{T}{}^{12}\,\vartheta_2\vec{e}_3 + T^{13}\vec{e}_3^{\,*} + \overset{*}{T}{}^{13}\left(\vartheta_1\vec{e}^{\,1} + \vartheta_2\vec{e}^{\,2}\right)\right]_{i+0.5;\,j} -$$

$$-\Big(\sqrt{a_{i-0.5;\,j+0.5}} + \sqrt{a_{i-0.5;\,j-0.5}}\Big)\times$$

$$\times\left[T^{11}\vec{e}_1^{\,*} - \overset{*}{T}{}^{11}\,\vartheta_1\vec{e}_3 + T^{12}\vec{e}_2^{\,*} - \overset{*}{T}{}^{12}\,\vartheta_2\vec{e}_3 + T^{13}\vec{e}_3^{\,*} + \overset{*}{T}{}^{13}\left(\vartheta_1\vec{e}^{\,1} + \vartheta_2\vec{e}^{\,2}\right)\right]_{i-0.5;\,j} +$$

$$+\Big(\sqrt{a_{i+0.5;\,j+0.5}} + \sqrt{a_{i-0.5;\,j+0.5}}\Big)\times$$

$$\times\left[T^{21}\vec{e}_1^{\,*} - \overset{*}{T}{}^{21}\vartheta_1\vec{e}_3 + T^{22}\vec{e}_2^{\,*} - \overset{*}{T}{}^{22}\,\vartheta_2\vec{e}_3 + T^{23}\vec{e}_3^{\,*} + \overset{*}{T}{}^{23}\left(\vartheta_1\vec{e}^{\,1} + \vartheta_2\vec{e}^{\,2}\right)\right]_{i;\,j+0.5} -$$

$$-\left(\sqrt{a_{i+0.5;\,j-0.5}}+\sqrt{a_{i-0.5;\,j-0.5}}\right)\times \tag{3}$$

$$\times\left[T^{21}\vec{e}_1^{\,*}-\overset{*}{T}{}^{21}\vartheta_1\vec{e}_3+T^{22}\vec{e}_2^{\,*}-\overset{*}{T}{}^{22}\,\vartheta_2\vec{e}_3+T^{23}\vec{e}_3^{\,*}+\overset{*}{T}{}^{23}\left(\vartheta_1\vec{e}^{\,1}+\vartheta_2\vec{e}^{\,2}\right)\right]_{i;\,j-0.5}+$$

$$+0.5\left[\sqrt{a}\left(q^1\vec{e}_1+q^2\vec{e}_2+q^3\vec{e}_3\right)\right]_{i+0.5;\,j+0.5}+0.5\left[\sqrt{a}\left(q^1\vec{e}_1+q^2\vec{e}_2+q^3\vec{e}_3\right)\right]_{i+0.5;\,j-0.5}+$$

$$+0.5\left[\sqrt{a}\left(q^1\vec{e}_1+q^2\vec{e}_2+q^3\vec{e}_3\right)\right]_{i-0.5;\,j+0.5}+$$

$$\left.+0.5\left[\sqrt{a}\left(q^1\vec{e}_1+q^2\vec{e}_2+q^3\vec{e}_3\right)\right]_{i-0.5;\,j-0.5}\right\}\cdot\vec{e}^{\,t}_{i;\,j}=0,$$

де t=1, 2, 3 визначає номер рівняння.

Нехтуючи членами, що містять накопичене значення поперечних зусиль $\overset{*}{T}{}^{\alpha 3}$, як це прийнято в теорії стійкості тонких оболонок, лінеаризовані рівняння подаються в кінцевому вигляді

$$0.5\left\{\left(\sqrt{a_{i+0.5;\,j+0.5}}+\sqrt{a_{i+0.5;\,j-0.5}}\right)\times\right.$$

$$\times\left[T^{11}\vec{e}_1^{\,*}+T^{12}\vec{e}_2^{\,*}+T^{13}\vec{e}_3^{\,*}-\overset{*}{T}{}^{11}\,\vartheta_1\vec{e}_3-\overset{*}{T}{}^{12}\,\vartheta_2\vec{e}_3\right]_{i+0.5;\,j}-$$

$$-\left(\sqrt{a_{i-0.5;\,j+0.5}}+\sqrt{a_{i-0.5;\,j-0.5}}\right)\times$$

$$\times\left[T^{11}\vec{e}_1^{\,*}+T^{12}\vec{e}_2^{\,*}+T^{13}\vec{e}_3^{\,*}-\overset{*}{T}{}^{11}\,\vartheta_1\vec{e}_3-\overset{*}{T}{}^{12}\,\vartheta_2\vec{e}_3\right]_{i-0.5;\,j}+$$

$$+\left(\sqrt{a_{i+0.5;\,j+0.5}}+\sqrt{a_{i-0.5;\,j+0.5}}\right)\times$$

$$\times\left[T^{21}\vec{e}_1^{\,*}+T^{22}\vec{e}_2^{\,*}+T^{23}\vec{e}_3^{\,*}-\overset{*}{T}{}^{21}\,\vartheta_1\vec{e}_3-\overset{*}{T}{}^{23}\,\vartheta_2\vec{e}_3\right]_{i;\,j+0.5}- \tag{4}$$

$$-\left(\sqrt{a_{i+0.5;\,j-0.5}}+\sqrt{a_{i-0.5;\,j-0.5}}\right)\times$$

$$\times\left[T^{21}\vec{e}_1^{\,*}+T^{22}\vec{e}_2^{\,*}+T^{23}\vec{e}_3^{\,*}-\overset{*}{T}{}^{21}\,\vartheta_1\vec{e}_3-\overset{*}{T}{}^{22}\,\vartheta_2\vec{e}_3\right]_{i;\,j-0.5}+$$

$$+0.5\left[\sqrt{a}\left(q^1\vec{e}_1+q^2\vec{e}_2+q^3\vec{e}_3\right)\right]_{i+0.5;\,j+0.5}+0.5\left[\sqrt{a}\left(q^1\vec{e}_1+q^2\vec{e}_2+q^3\vec{e}_3\right)\right]_{i-0.5;\,j+0.5}+$$
$$+0.5\left[\sqrt{a}\left(q^1\vec{e}_1+q^2\vec{e}_2+q^3\vec{e}_3\right)\right]_{i+0.5;\,j-0.5}+$$
$$+0.5\left[\sqrt{a}\left(q^1\vec{e}_1+q^2\vec{e}_2+q^3\vec{e}_3\right)\right]_{i-0.5;\,j-0.5}\Big\}\cdot\vec{e}^{\,t}_{i;\,j}=0,$$

В рівнянні (4) доданки, що задають зовнішній вплив, визначені для сил, котрі в процесі деформування не змінюють свого напрямку. У випадках, коли в процесі деформування оболонки зовнішні сили змінюють свою початкову орієнтацію, члени рівняння рівноваги, що характеризують навантаження, є нелінійними, тому в (4) враховується додаток

В рівняннях введені позначення для величин, що являються коефіцієнтами перетворення координат базису в точці $(i\pm0{,}5;\ j\pm0{,}5)$ з координатами базису в точці (i,j)

$$\breve{a}^{\,t_{i;\,j}}_{S_{i\pm0,5;\,j\pm0,5}}=\vec{e}^{\,*}_{S_{i\pm0,5;\,j\pm0,5}}\cdot\vec{e}^{\,t_{i;\,j}}\qquad (S,\ t=1,\ 2,\ 3). \tag{7}$$

Вирази поперечних зусиль $T^{\alpha 3}$, що входять до рівнянь рівноваги (36), отримуються з (30) та (31)

$$T^{13}_{i+0,5;\,j}=\Big[\left(aM^{11}\right)_{i+1;\,j}a^{2_{i+1;\,j}}_{2_{i+0,5;\,j}}-\left(aM^{11}\right)_{i;\,j}a^{2_{i;\,j}}_{2_{i+0,5;\,j}}+\left(aM^{12}\right)_{i;\,j}a^{1_{i;\,j}}_{2_{i+0,5;\,j}}-$$
$$-\left(aM^{12}\right)_{i+1;\,j}a^{1_{i;\,j}}_{2_{i+0,5;\,j}}+\left(aM^{21}\right)_{i+0,5;\,j+0,5}a^{2_{i+0,5;\,j+0,5}}_{2_{i+0,5;\,j}}-\left(aM^{21}\right)_{i+0,5;\,j-0,5}a^{2_{i+0,5;\,j-0,5}}_{2_{i+0,5;\,j}}+$$
$$+\left(aM^{22}\right)_{i+0,5;\,j-0,5}a^{1_{i+0,5;\,j-0,5}}_{2_{i+0,5;\,j}}-\left(aM^{22}\right)_{i+0,5;\,j+0,5}a^{1_{i+0,5;\,j+0,5}}_{2_{i+0,5;\,j}}\Big]\Big/a_{i+0,5;\,j},$$

$$T^{23}_{i;\,j+0,5}=\Big[\left(aM^{11}\right)_{i-0,5;\,j+0,5}a^{2_{i-0,5;\,j+0,5}}_{1_{i;\,j+0,5}}-\left(aM^{11}\right)_{i+0,5;\,j+0,5}a^{2_{i+0,5;\,j+0,5}}_{1_{i;\,j+0,5}}+$$
$$+\left(aM^{12}\right)_{i+0,5;\,j+0,5}a^{1_{i+0,5;\,j+0,5}}_{1_{i;\,j+0,5}}-\left(aM^{12}\right)_{i-0,5;\,j+0,5}a^{1_{i-0,5;\,j+0,5}}_{1_{i;\,j+0,5}}+\left(aM^{21}\right)_{i;\,j}a^{2_{i;\,j}}_{1_{i;\,j+0,5}}- \tag{8}$$
$$-\left(aM^{21}\right)_{i;\,j+1}a^{2_{i;\,j+1}}_{1_{i;\,j+0,5}}+\left(aM^{22}\right)_{i;\,j+1}a^{1_{i;\,j+1}}_{2_{i;\,j+0,5}}-\left(aM^{22}\right)_{i;\,j}a^{1_{i;\,j}}_{1_{i;\,j+0,5}}\Big]\Big/a_{i;\,j+0,5}.$$

В різницевому рівнянні рівноваги мембранні зусилля $T^{1\alpha}$ потрібні в точках між вузлами на лініях x^1, а $T^{2\alpha}$ - між вузлами координатних ліній x^2. У відповідності з цим для застосування співвідношень (18) необхідно мати усі компоненти мембранних деформацій між вузлами на координатних лініях.

В результаті дискретизації диференціальних співвідношень (14) різницеві вирази компонент тензора мембранних деформацій набули вигляду:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11_{i+0,5;j}} &= U_{1_{i+1;j}} a^{1_{i+1;j}}_{1_{i+0,5;j}} + U_{2_{i+1;j}} a^{2_{i+1;j}}_{1_{i+0,5;j}} + U_{3_{i+1;j}} a^{3_{i+1;j}}_{1_{i+0,5;j}} - \\
&- U_{1_{i;j}} a^{1_{i;j}}_{1_{i+0,5;j}} + U_{2_{i;j}} a^{2_{i;j}}_{1_{i+0,5;j}} - U_{3_{i;j}} a^{3_{i;j}}_{1_{i+0,5;j}} + 0,5\left(\vartheta_1 \vartheta_1\right)_{i+0,5;j}, \\
\varepsilon_{22_{i;j+0,5}} &= U_{1_{i;j+1}} a^{1_{i;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} + U_{2_{i;j+1}} a^{2_{i;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} + U_{3_{i;j+1}} a^{3_{i;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} - \\
&- U_{1_{i;j}} a^{1_{i;j}}_{2_{i;j+0,5}} + U_{2_{i;j}} a^{2_{i;j}}_{2_{i;j+0,5}} - U_{3_{i;j}} a^{3_{i;j}}_{2_{i;j+0,5}} + 0,5\left(\vartheta_2 \vartheta_2\right)_{i;j+0,5}, \\
\varepsilon_{12_{i+0,5;j}} &= 0,5\Big(U_{1_{i+1;j}} a^{1_{i+1;j}}_{2_{i+0,5;j}} + U_{2_{i+1;j}} a^{2_{i+1;j}}_{2_{i+0,5;j}} + U_{3_{i+1;j}} a^{3_{i+1;j}}_{2_{i+0,5;j}} - \\
&- U_{1_{i;j}} a^{1_{i;j}}_{2_{i+0,5;j}} - U_{2_{i;j}} a^{2_{i;j}}_{2_{i+0,5;j}} - U_{3_{i;j}} a^{3_{i;j}}_{2_{i+0,5;j}}\Big) + 0,25\Big(U_{1_{i+1;j+1}} a^{1_{i+1;j+1}}_{2_{i+0,5;j}} + \\
&+ U_{2_{i+1;j+1}} a^{2_{i+1;j+1}}_{1_{i+0,5;j}} + U_{3_{i+1;j+1}} a^{3_{i+1;j+1}}_{1_{i+0,5;j}} + U_{1_{i;j+1}} a^{1_{i;j+1}}_{1_{i+0,5;j}} + U_{2_{i;j+1}} a^{2_{i;j+1}}_{1_{i+0,5;j}} + \\
&+ U_{3_{i;j+1}} a^{3_{i;j+1}}_{1_{i+0,5;j}} - U_{1_{i+1;j-1}} a^{1_{i+1;j-1}}_{1_{i+0,5;j}} - U_{2_{i+1;j-1}} a^{2_{i+1;j-1}}_{1_{i+0,5;j}} - U_{3_{i+1;j-1}} a^{3_{i+1;j-1}}_{1_{i+0,5;j}} - \\
&- U_{1_{i;j-1}} a^{1_{i;j-1}}_{1_{i+0,5;j}} - U_{2_{i;j-1}} a^{2_{i;j-1}}_{1_{i+0,5;j}} - U_{3_{i;j-1}} a^{3_{i;j-1}}_{1_{i+0,5;j}}\Big) + 0,5\left(\vartheta_1 \vartheta_2\right)_{i+0,5;j} \\
\varepsilon_{21_{i;j+0,5}} &= 0,25\Big(U_{1_{i+1;j+1}} a^{1_{i+1;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} + U_{2_{i+1;j+1}} a^{2_{i+1;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} + U_{3_{i+1;j+1}} a^{3_{i+1;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} + \\
&+ U_{1_{i+1;j}} a^{1_{i+1;j}}_{2_{i;j+0,5}} + U_{2_{i+1;j}} a^{2_{i+1;j}}_{2_{i;j+0,5}} + U_{3_{i+1;j}} a^{3_{i+1;j}}_{2_{i;j+0,5}} - U_{1_{i-1;j+1}} a^{1_{i-1;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} - \\
&- U_{2_{i-1;j+1}} a^{2_{i-1;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} - U_{3_{i-1;j+1}} a^{3_{i-1;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} - U_{1_{i-1;j}} a^{1_{i-1;j}}_{2_{i;j+0,5}} - U_{2_{i-1;j}} a^{2_{i-1;j}}_{2_{i;j+0,5}} - \\
&- U_{3_{i-1;j}} a^{3_{i-1;j}}_{2_{i;j+0,5}}\Big) + 0,5\Big(U_{1_{i;j+1}} a^{1_{i;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} + U_{2_{i;j+1}} a^{2_{i;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} + U_{3_{i;j+1}} a^{3_{i;j+1}}_{2_{i;j+0,5}} - \qquad (9) \\
&- U_{1_{i;j}} a^{1_{i;j}}_{2_{i;j+0,5}} - U_{2_{i;j}} a^{2_{i;j}}_{2_{i;j+0,5}} - U_{3_{i;j}} a^{3_{i;j}}_{2_{i;j+0,5}}\Big) + 0,5\left(\vartheta_1 \vartheta_2\right)_{i;j+0,5}, \\
\varepsilon_{11_{i;j+0,5}} &= 0,25\Big(U_{1_{i+1;j+1}} a^{1_{i+1;j+1}}_{1_{i;j+0,5}} + U_{2_{i+1;j+1}} a^{2_{i+1;j+1}}_{1_{i;j+0,5}} + U_{3_{i+1;j+1}} a^{3_{i+1;j+1}}_{1_{i;j+0,5}} + \\
&+ U_{1_{i+1;j}} a^{1_{i+1;j}}_{1_{i;j+0,5}} + U_{2_{i+1;j}} a^{2_{i+1;j}}_{1_{i;j+0,5}} + U_{3_{i+1;j}} a^{3_{i+1;j}}_{1_{i;j+0,5}} - U_{1_{i-1;j}} a^{1_{i-1;j}}_{1_{i;j+0,5}} - \\
&- U_{2_{i-1;j}} a^{2_{i-1;j}}_{1_{i;j+0,5}} - U_{3_{i-1;j}} a^{3_{i-1;j}}_{1_{i;j+0,5}} - U_{1_{i-1;j+1}} a^{1_{i-1;j+1}}_{1_{i;j+0,5}} - U_{2_{i-1;j+1}} a^{2_{i-1;j+1}}_{1_{i;j+0,5}} - \\
&- U_{3_{i-1;j+1}} a^{3_{i-1;j+1}}_{1_{i;j+0,5}}\Big) + 0,5\left(\vartheta_1 \vartheta_1\right)_{i;j+0,5},
\end{aligned}
$$

$$\varepsilon_{22_{i+0,5;\,j}} = 0{,}25\Big(U_{1_{i+1;\,j+1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{1_{i+1;\,j+1}} + U_{2_{i+1;\,j+1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{2_{i+1;\,j+1}} + U_{3_{i+1;\,j+1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{3_{i+1;\,j+1}} +$$
$$+ U_{1_{i;\,j+1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{1_{i;\,j+1}} + U_{2_{i;\,j+1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{2_{i;\,j+1}} + U_{3_{i;\,j+1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{3_{i;\,j+1}} - U_{1_{i+1;\,j-1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{1_{i+1;\,j-1}} -$$
$$- U_{2_{i+1;\,j-1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{2_{i+1;\,j-1}} - U_{3_{i+1;\,j-1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{3_{i+1;\,j-1}} - U_{1_{i;\,j-1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{1_{i;\,j-1}} -$$
$$- U_{2_{i;\,j-1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{2_{i;\,j-1}} - U_{3_{i;\,j-1}} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{3_{i;\,j-1}}\Big) + 0{,}5\left(\vartheta_2 \vartheta_2\right)_{i+0,5;\,j},$$

Внутрішні моменти, що входять у вираз поперечних сил (8), визначаються як у вузлах, так і в центрах чарунок різницевої сітки, тому для застосування залежностей (8) необхідно мати компоненти тензора згинальних деформацій у вузлах і центрах різницевої сітки, дискретні вирази яких мають вигляд

$$\mu_{11_{i;\,j}} = \sqrt{a_{i;\,j}}\Big[\left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{2_{i;\,j}} - \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j} a_{1_{i+0,5;\,j}}^{2_{i;\,j}} +$$
$$+ \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i-0,5;\,j} a_{1_{i-0,5;\,j}}^{2_{i;\,j}} - \left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i-0,5;\,j} a_{2_{i;\,j+0,5}}^{2_{i;\,j}}\Big],$$
$$\mu_{22_{i;\,j}} = \sqrt{a_{i;\,j}}\Big[\left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i;\,j-0,5} a_{2_{i;\,j-0,5}}^{1_{i;\,j}} - \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i;\,j+0,5} a_{1_{i;\,j+0,5}}^{1_{i;\,j}} +$$
$$+ \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i;\,j+0,5} a_{1_{i;\,j+0,5}}^{1_{i;\,j}} - \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i;\,j-0,5} a_{1_{i;\,j-0,5}}^{1_{i;\,j}}\Big],$$
$$\mu_{12_{i;\,j}} = 0{,}5\sqrt{a_{i;\,j}}\Big[\left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i-0,5;\,j} a_{2_{i-0,5;\,j}}^{1_{i;\,j}} - \left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{1_{i;\,j}} +$$
$$+ \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j} a_{1_{i+0,5;\,j}}^{1_{i;\,j}} - \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i-0,5;\,j} a_{1_{i-0,5;\,j}}^{1_{i;\,j}} +$$
$$+ \left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i;\,j+0,5} a_{2_{i;\,j+0,5}}^{2_{i;\,j}} - \left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i;\,j-0,5} a_{2_{i;\,j-0,5}}^{2_{i;\,j}} +$$
$$+ \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i;\,j-0,5} a_{1_{i;\,j-0,5}}^{2_{i;\,j}} - \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i;\,j+0,5} a_{1_{i;\,j+0,5}}^{2_{i;\,j}}\Big],$$
$$\mu_{11_{i+0,5;\,j+0,5}} = \sqrt{a_{i+0,5;\,j+0,5}} \times$$
$$\times\Big[\left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i+1;\,j+0,5} a_{2_{i+1;\,j+0,5}}^{2_{i+0,5;\,j+0,5}} - \left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i;\,j+0,5} a_{2_{i;\,j+0,5}}^{2_{i+0,5;\,j+0,5}} +$$
$$+ \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i;\,j+0,5} a_{1_{i;\,j+0,5}}^{2_{i+0,5;\,j+0,5}} - \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i+1;\,j+0,5} a_{1_{i+1;\,j+0,5}}^{2_{i+0,5;\,j+0,5}}\Big],$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_{22_{i+0,5;\,j+0,5}} = \sqrt{a_{i+0,5;\,j+0,5}}\times \\
&\times\Big[\left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{1_{i+0,5;\,j+0,5}} - \left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j+1} a_{2_{i+0,5;\,j+1}}^{1_{i+0,5;\,j+0,5}} + \\
&+\left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j+1} a_{2_{i+0,5;\,j+1}}^{1_{i+0,5;\,j+0,5}} - \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j} a_{1_{i+0,5;\,j}}^{1_{i+0,5;\,j+0,5}}\Big], \\
&\mu_{12_{i+0,5;\,j+0,5}} = 0{,}5\sqrt{a_{i+0,5;\,j+0,5}}\times \\
&\times\Big[\left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i;\,j+0,5} a_{2_{i;\,j+0,5}}^{1_{i+0,5;\,j+0,5}} - \left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i+1;\,j+0,5} a_{2_{i+1;\,j+0,5}}^{1_{i+0,5;\,j+0,5}} + \\
&+\left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i+1;\,j+0,5} a_{2_{i+1;\,j+0,5}}^{1_{i+0,5;\,j+0,5}} - \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i;\,j+0,5} a_{1_{i;\,j+0,5}}^{1_{i+0,5;\,j+0,5}} + \\
&+\left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j+1} a_{2_{i+0,5;\,j+1}}^{2_{i+0,5;\,j+0,5}} - \left(\vartheta_1/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j} a_{2_{i+0,5;\,j}}^{2_{i+0,5;\,j+0,5}} + \\
&+\left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j} a_{1_{i+0,5;\,j}}^{2_{i+0,5;\,j+0,5}} - \left(\vartheta_2/\sqrt{a}\right)_{i+0,5;\,j+1} a_{1_{i+0,5;\,j+1}}^{2_{i+0,5;\,j+0,5}}\Big].
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Компоненти вектора кутів повороту елемента оболонки, що входять в дискретний вираз мембранних і згинальних деформацій (9), (10) отримано між вузлами на лініях різницевої сітки

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_{1_{i+0,5;\,j}} = U_{1_{i;\,j}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{1_{i;\,j}} - U_{1_{i+1;\,j}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{1_{i+1;\,j}} + U_{2_{i;\,j}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{2_{i;\,j}} - U_{2_{i+1;\,j}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{2_{i+1;\,j}} + \\
&+U_{3_{i;\,j}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{3_{i;\,j}} - U_{3_{i+1;\,j}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{3_{i+1;\,j}} \\
&\vartheta_{2_{i;\,j+0,5}} = U_{1_{i;\,j}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{1_{i;\,j}} - U_{1_{i;\,j+1}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{1_{i;\,j+1}} + U_{2_{i;\,j}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{2_{i;\,j}} - U_{2_{i;\,j+1}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{2_{i;\,j+1}} + \\
&U_{3_{i;\,j}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{3_{i;\,j}} - U_{3_{i;\,j+1}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{3_{i;\,j+1}} \\
&\vartheta_{1_{i;\,j+0,5}} = 0{,}25\Big(U_{1_{i-1;\,j}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{1_{i-1;\,j}} + U_{1_{i-1;\,j+1}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{1_{i-1;\,j+1}} - U_{1_{i+1;\,j}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{1_{i+1;\,j}} - U_{1_{i+1;\,j+1}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{1_{i+1;\,j+1}} + \\
&+U_{2_{i-1;\,j}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{2_{i-1;\,j}} + U_{2_{i-1;\,j+1}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{2_{i-1;\,j+1}} - U_{2_{i+1;\,j}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{2_{i+1;\,j}} - U_{2_{i+1;\,j+1}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{2_{i+1;\,j+1}} + \\
&+U_{3_{i-1;\,j}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{3_{i-1;\,j}} + U_{3_{i-1;\,j+1}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{3_{i-1;\,j+1}} - U_{3_{i+1;\,j}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{3_{i+1;\,j}} - U_{3_{i+1;\,j+1}} a_{3_{i;\,j+0,5}}^{3_{i+1;\,j+1}}\Big), \\
&\vartheta_{2_{i+0,5;\,j}} = 0{,}25\Big(U_{1_{i;\,j-1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{1_{i;\,j-1}} + U_{1_{i+1;\,j-1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{1_{i+1;\,j-1}} - U_{1_{i;\,j+1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{1_{i;\,j+1}} - U_{1_{i+1;\,j+1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{1_{i+1;\,j+1}} + \\
&+U_{2_{i;\,j-1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{2_{i;\,j-1}} + U_{2_{i+1;\,j-1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{2_{i+1;\,j-1}} - U_{2_{i;\,j+1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{2_{i;\,j+1}} - U_{2_{i+1;\,j+1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{3_{i+1;\,j+1}} + \\
&+U_{3_{i;\,j-1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{3_{i;\,j-1}} + U_{3_{i+1;\,j-1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{3_{i+1;\,j-1}} - U_{3_{i;\,j+1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{3_{i;\,j+1}} - U_{3_{i+1;\,j+1}} a_{3_{i+0,5;\,j}}^{3_{i+1;\,j+1}}\Big).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Остання підстановка співвідношень (11), (10),(9),(18), (8) дозволяє перейти від розгляду диференціального векторного рівняння рівноваги до системи алгебраїчних рівнянь.

В розробленому алгоритмі реалізовані граничні умови вільного краю, рухомого і нерухомого шарнірного опирання, ковзаючого і жорсткого затиснення, симетричного і кососиметричного поля переміщень.

Наведемо граничні умови в контурних лініях сіткової області ($i_1 \le i \le i_m$; $j_1 \le j \le j_n$).

Для вільного краю, розміщеного вздовж лінії $i=i_1$ справедливе співвідношення

$$\begin{gathered}\Big\{\Big[\sqrt{a}\Big(T^{11}\vec{e}_1+T^{12}\vec{e}_2+T^{13}\vec{e}_3\Big)\Big]_{i_1-0,5;\,j}+\Big[\Big(aM^{11}\vec{e}^{\,2}-\\ -aM^{12}\vec{e}^{\,1}\Big)_{i_1-0,5;\,j+0,5}\cdot\Big(\vec{e}_1\big/\sqrt{a}\Big)_{i_1;\,j+0,5}\Big]\vec{e}_{3\;i_1;\,j+0,5}-\Big[\Big(aM^{11}\vec{e}^{\,2}-\\ -aM^{12}\vec{e}^{\,1}\Big)_{i_1-0,5;\,j-0,5}\cdot\Big(\vec{e}_1\big/\sqrt{a}\Big)_{i_1;\,j-0,5}\Big]\vec{e}_{3\;i_1;\,j-0,5}\Big\}\cdot\vec{e}^{\,S}_{i_1;\,j}=0\\ (S=1,\ 2,\ 3),\\ \Big[a\Big(M^{11}\vec{e}^{\,2}-M^{12}\vec{e}^{\,1}\Big)_{i_1;\,j}\cdot\big(\vec{e}_2/a\big)_{i_1+0,5;\,j}=0.\end{gathered}\tag{12}$$

На вільному краї вздовж лінії $i \le i_m$ в виразах (12) змінюються індекси i_1 на i_m , i_1 -0,5 на i_m +0,5 і i_1 +0,5 на i_m -0,5.

Для вільного краю, що розміщений вздовж лінії $j=j_1$ справедливі аналогічні рівності

$$\begin{gathered}\Big\{\Big[\sqrt{a}\Big(T^{21}\vec{e}_1+T^{22}\vec{e}_2+T^{23}\vec{e}_3\Big)\Big]_{i_1;\,j_1-0,5}+\Big[\Big(aM^{22}\vec{e}^{\,1}-\\ -aM^{21}\vec{e}^{\,2}\Big)_{i_1+0,5;\,j_1-0,5}\cdot\Big(\vec{e}_2\big/\sqrt{a}\Big)_{i_1+0,5;\,j_1}\Big]\vec{e}_{3\;i_1+0,5;\,j_1}-\Big[\Big(aM^{22}\vec{e}^{\,1}-\\ -aM^{21}\vec{e}^{\,2}\Big)_{i_1+0,5;\,j_1-0,5}\cdot\Big(\vec{e}_2\big/\sqrt{a}\Big)_{i_1-0,5;\,j_1}\Big]\vec{e}_{3\;i_1-0,5;\,j_1}\Big\}\cdot\vec{e}^{\,S}_{i;\,j_1}=0\\ (S=1,\ 2,\ 3),\\ \Big[a\Big(M^{22}\vec{e}^{\,1}-M^{21}\vec{e}^{\,2}\Big)_{i;\,j_1}\cdot\Big(\vec{e}_1\big/a\Big)\Big]_{i;\,j_1+0,5}=0.\end{gathered}\tag{13}$$

На вільному краї вздовж лінії j_n у виразах (13) змінюються індекси j_1 на j_n , j_1 -0,5 на j_n +0,5 і j_1 +0,5 на j_n -0,5.

Програмна реалізація умов на вільному краї здійснюється за допомогою виключення із різницевого рівняння тієї його частини, яка за умовами (12) або (13) дорівнює нулю, що призводить до виключення невідомих в законтурних вузлах сітки. Основою фізичної інтерпретації цих умов може бути закладена та обставина, що в місцях відсутності матеріалу оболонки є відсутнім і вплив внутрішніх зусиль. У випадку ортогональної сітки граничний перехід в співвідношеннях (12) і (13) призводить до класичного виду граничних умов вільного краю.

$$T^{11} = T^{12} = T^{13} - \frac{\partial M^{12}}{\partial x^2} = M^{11} = 0, \tag{14}$$

$$T^{21} = T^{22} = T^{23} - \frac{\partial M^{21}}{\partial x^1} = M^{22} = 0. \tag{15}$$

У вузлі (i_1 ,j_1), що розміщений на перетині двох контурних ліній з умовами вільного краю, із різницевого рівняння виключаються дві групи членів, які дорівнюють нулю згідно співвідношень (12) і (13). Таким чином, шаблон зменшується з двох сторін, що призводить до виключення усіх законтурних точок. Аналогічна операція виключення проводиться і в трьох інших вузлах (i_1 ,j_n) (i_m ,j_1) (i_m ,j_n).

Різні варіанти шарнірного опирання і затиснення реалізовані за допомогою заміни одного або декількох співвідношень виду

$$\left(U_S\right)_{i_1;j} = 0 \qquad \left(S = 1,\ 2,\ 3\right),$$

$$\left.\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\vartheta_1\vec{e}_2 - \vartheta_2\vec{e}_1\right)\right]_{i_1+0,5;\,j} + \left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\vartheta_1\vec{e}_2 - \vartheta_2\vec{e}_1\right)\right]_{i_1-0,5;\,j}\right\}\cdot \vec{e}^{\,2}_{i_1;j} = 0, \tag{16}$$

що виконуються для лінії $i=i_1$.Для контурної лінії $j=j_1$ аналогічна заміна виконується за допомогою використання рівностей

$$\left(U_S\right)_{i;j_1} = 0 \qquad \left(S = 1,\ 2,\ 3\right),$$

$$\left.\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\vartheta_2\vec{e}_1 - \vartheta_1\vec{e}_2\right)\right]_{i;\,j_1+0,5} + \left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\vartheta_2\vec{e}_1 - \vartheta_1\vec{e}_2\right)\right]_{i;\,j_1-0,5}\right\}\cdot \vec{e}^{\,1}_{i_1;j} = 0, \tag{17}$$

$$0.5\left\{\left[\sqrt{a}\vartheta_1\left(\overset{*}{q}{}^3\,\vec{e}^{\,1} - \overset{*}{q}{}^1\,\vec{e}_3\right)\right]_{i+0.5;\,j} + \left[\sqrt{a}\vartheta_1\left(\overset{*}{q}{}^3\,\vec{e}^{\,1} - \overset{*}{q}{}^1\,\vec{e}_3\right)\right]_{i-0.5;\,j} + \right.$$

$$\left. + 0.5\left\{\left[\sqrt{a}\vartheta_2\left(\overset{*}{q}{}^3\,\vec{e}^{\,2} - \overset{*}{q}{}^2\,\vec{e}_3\right)\right]_{i;\,j+0.5} + \right.\right.$$

$$+\left[\sqrt{a}\vartheta_2\left(\overset{*}{q}{}^3\,\vec{e}^{\,2}-\overset{*}{q}{}^2\,\vec{e}_3\right)\right]_{i-0.5;\,j}\Bigg\}\cdot\vec{e}^{\,t}_{i;\,j}\quad (t=1,\ 2,\ 3). \tag{18}$$

Лінеаризовані вирази мембранних деформацій (14) мають вигляд

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=0.5\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial x^{\alpha}}\vec{e}_{\beta}+\frac{\partial\vec{U}}{\partial x^{\beta}}\vec{e}_{\alpha}+\vartheta_{\alpha}\overset{*}{\vartheta}_{\beta}+\vartheta_{\beta}\overset{*}{\vartheta}_{\alpha}\right)\ (\alpha,\ \beta=1,\ 2). \tag{19}$$

У співвідношеннях (4)-(19) зірочками позначені значення накопичених величин, змінні без зірочок позначають приріст цих величин. Використовуючи (4), (18), а також різницеві представлення співвідношень (15)-(18), (19), (30), (31) в процедурі лінеаризації, отримуються лінеаризовані рівняння напружено-деформованого стану оболонок, коефіцієнти яких на *r+1* кроці алгоритму обчислюються з використанням характеристик стану попереднього стану на *r*–му кроці.

На основі вище наведених рівнянь виконано розрахунок на стійкість чотирьохпелюсткового гіпара з горизонтальним розміщенням коньків (рис.1). По контуру конструкції та в місцях з’єднання пелюсток між собою встановлено ребра жорсткості (на малюнку зображені потовщеними лініями). Розміри однієї пелюстки в плані 0,2×0,2м, стріла підйому 2F=0.12м. Конструкція закріплена шарнірно нерухомо в нижніх кутових точках. Конструкція розраховувалась на дію рівномірно розподіленого по поверхні навантаження. В дослідженні визначалася залежність критичної сили втрати стійкості від площі поперечного перерізу ребер жорсткості. Результати наведені на графіку (Рис.2).

Як видно з графіка при відсутності ребер конструкцію експлуатувати неможливо. $q_{kr}=0.38\times10^3$Н/м^2. Форма втрати стійкості в цьому випадку має вигляд рис.3.

При нульовій жорсткості контурних ребер збільшення жорсткості конькових ребер не приносить ніякого результату, конструкція втрачає стійкість при $q_{kr}=0.8\times10^3$Н/м^2, тобто в цьому випадку конструкцію теж не можна експлуатувати. Форма втрати стійкості має вигляд рис.4.

При рівності нулю жорсткості конькових ребер максимальне збільшення площі поперечного перерізу контурних ребер до $A1=4\times10^{-4}$м^2 дає значення $q_{kr}=5.7\times10^3$Н/м^2. Форма втрати стійкості в цьому випадку має вигляд рис. 5.

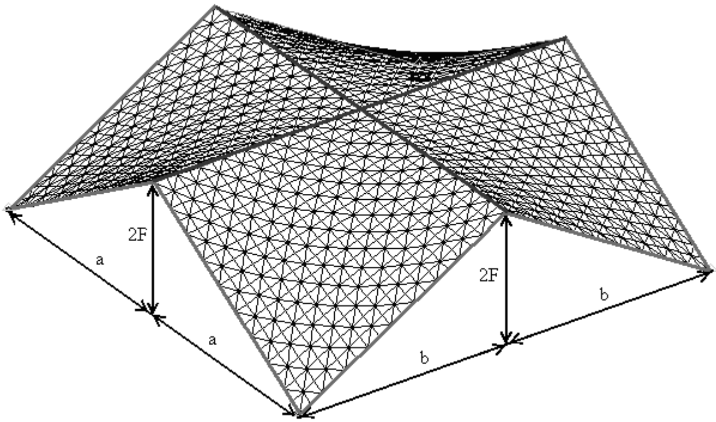

Рис. 1. Загальний вигляд конструкції чотирьохпелюсткового гіпара з горизонтальними коньковими ребрами.(Потовщеними лініями показані контурні та конькові ребра)

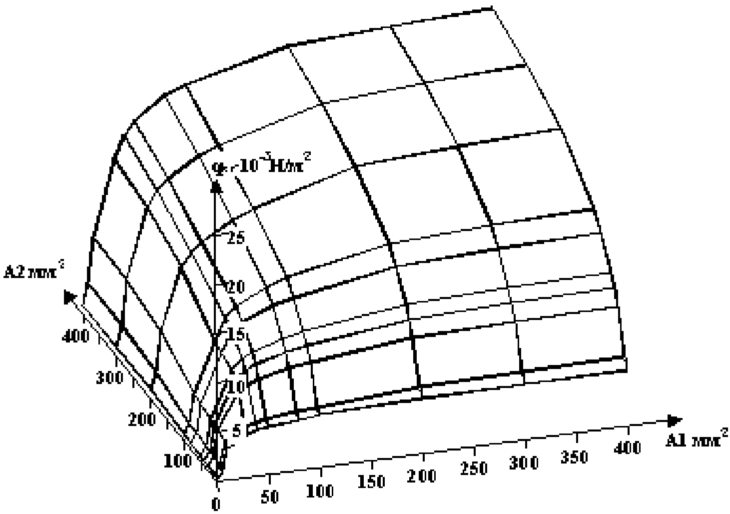

Рис. 2. Графік залежності критичного навантаження оболонки $\mathbf{q_{kr}}$ від площі поперечного перерізу ребер жорсткості розміщених по контуру (значення А1), та по горизонталі в місцях з'єднання пелюсток(значення А2)

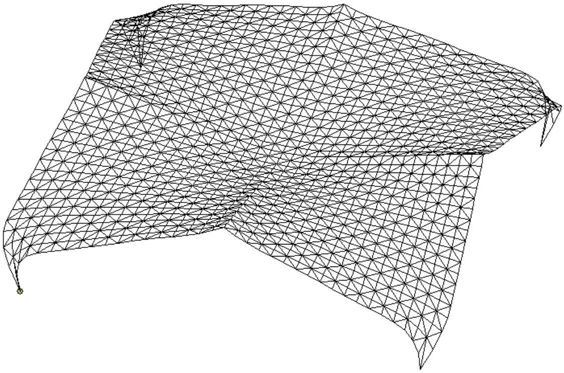

Рис. 3. Форма втрати стійкості при відсутності обох типів ребер жорсткості. $q_{kr}=0.38\times10^3$Н/м^2

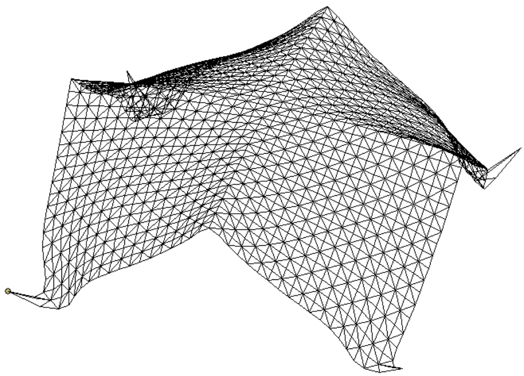

Рис. 4. Форма втрати стійкості при нульовій жорсткості контурних ребер. $q_{kr}=0.8\times10^3$Н/м^2

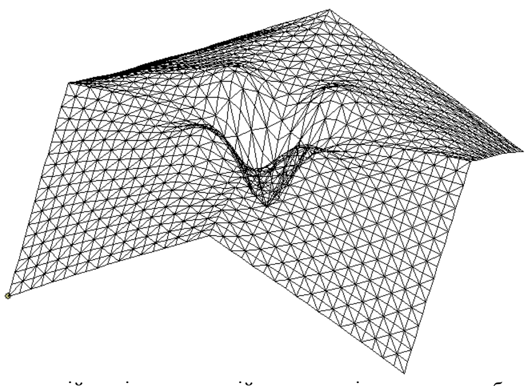

Рис. 5. Форма втрати стійкості при нульовій жорсткості конькових ребер. $q_{kr}=5.7\times10^3$Н/м^2.

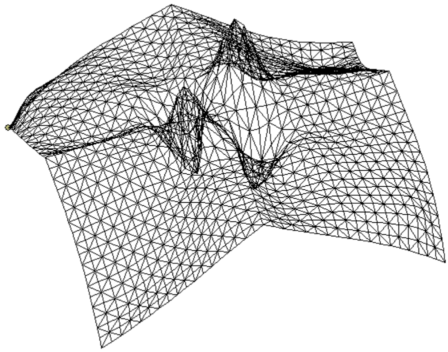

Рис. 6. Форма втрати стійкості при пропорційному збільшенні обох типів ребер. $q_{kr}=27\times10^3$Н/м^2

Найбільший ефект досягається при одночасному збільшенні жорсткості обох видів ребер.(рис. 6.) Однак слід зауважити, що для даного прикладу графік залежності q_{kr} від площі поперечного перерізу контурних ребер перетворюється на горизонтальну лінію при А1=2×10^4м^2. Для графіка q_{kr} від А2 значення q_{kr} перестають зростати при А2=$3{,}5\times10^{-4}$м^2. З неоднакової поведінки двох графіків можна зробити висновок, що жорсткість конькових ребер покращує стійкість конструкції лише при достатній жорсткості контурних ребер.

1. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. – Л.: Изд. Ленинград. ун-та, 1965, ч.2. – 395 с.
2. *Самольянов И.И.* Прочность, устойчивость и колебание гиперболического параболоида. Луцк. ЛИИ. 1992 – 318с.
3. *Рассказов А.О.* Расчет оболочек типа параболических параболоидов. Изд. Киевского Госуниверситета. Киев, 1972г.175с.
4. *Гоцуляк Е.А. Ермишев В.Н Жадрасинов Н.Т* Применение метода криволинейных сеток к расчету оболочек. – Киев. инж.-стр. ин-т. Киев, 1980. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, №2557-80) 23с.
5. *Гоцуляк Е.А. Ермишев В.Н* Нелинейный анализ устойчивости оболочек на основе трансформации собственных векторов и значений линеаризованного оператора. – Сб. Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып.54,-Киев: Будівельник, 1989.-С. 34
6. *Гоцуляк Е.А* О сеточной дискретизации векторных соотношений теории оболочек в криволинейной системе координат . – Прикладная механика: Междунар. научн. журнал. – 2001. – Т.37. - №6. – С.89-94.

Надійшло до редакції 11.12.2006 р.