

ПОШУК МІСТКІВ ХОЛОДУ У ВУЗЛАХ БУДІВЕЛЬНОЇ КОНСТРУКЦІЇ НА ОСНОВІ СПЕЦІАЛЬНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Київський Національний Університет Будівництва і Архітектури

В роботі розкрито основні принципи побудови спеціальних інтерполяційних функцій, застосування яких дозволяє уникнути залучення логічних операторів використовуваного програмного забезпечення в процесі побудови траєкторії найшвидшого зростання чи спадання температурного поля у вузлах будівельних конструкцій.

Постановка проблеми. Однією з найбільш відомих задач енергозбереження є аналіз вузлів будівельних конструкцій та споруд різного призначення на предмет втрат теплової енергії з внутрішніх опалювальних приміщень. Такий аналіз дає інженеру можливість мінімізувати тепловтрати у досліджуваному вузлі шляхом корегування його конструкції. Метою зазначених коректив є максимально можливе зменшення об'ємів тих ділянок даного вузла, які представляють собою містки холоду, тобто, зони найбільш інтенсивної теплопередачі від внутрішніх (робочих чи житлових) приміщень будівлі до зовнішнього середовища.

Відтак, постає необхідність в обранні найбільш раціонального способу визначення траєкторії містків холоду з метою запобігання їх утворенню.

Аналіз основних досліджень. Найбільш уживаними з усіх можливих шляхів вирішення окресленої вище проблеми є застосування так званих градієнтних методів спуску [1]. Градієнтні методи успішно застосовуються в багатьох алгоритмах оптимізації. Останні в більшості випадків можуть бути зведені до пошуку мінімуму або максимуму цільової функції $F = \zeta(x_1, x_2, \dots, x_q)$, якою описується досліджуваний процес у визначеній області континуума. Якщо розглядати систему з q одиничних векторів $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_q$, напрямлених вздовж координатних осей $x_1, x_2, \dots, x_q$, які водночас є проектними параметрами заданої цільової функції, то вектор градієнта має наступну форму:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_q} \cdot \mathbf{e}_q, \quad (1)$$

де часткові похідні розраховуються в поточній досліджуваній точці (∇ – оператор Гамільтона розмірності q). Цей вектор завжди вказує напрямок найшвидшого підйому, а відповідно обернений йому – напрямок найшвидшого спуску. Одиничний вектор градієнта $\mathbf{v}$ часто представляють у такому виді:

$$\mathbf{v} = v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + v_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + v_q \cdot \mathbf{e}_q, \quad (2)$$

де складові даного вектора визначаються за формулою:

$$v_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} / \sqrt{\sum_{j=1}^q \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)^2} \cdot (i = \overline{1, q}) \quad (3)$$

Інформацію про напрямок градієнта використовують при побудові різних

алгоритмів пошуку екстремумів цільових функцій. Найпростішим зі згаданих алгоритмів є алгоритм найшвидшого підйому (чи спуску) з використанням одновимірної пошуку. Останній виражається співвідношенням:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \chi \cdot v_i^{(k-1)}, \quad (i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, r}) \quad (4)$$

де k – номер поточного кроку пошуку, r – кількість кроків пошуку, а χ – одновимірний параметр, значення якого відраховуються в напрямку вектору градієнта на кожному кроці спуску (чи підйому). Фактично параметр χ являє собою швидкість руху пошуку вздовж напрямку найбільш інтенсивного поширення (зростання чи спадання) поля параметрів, яке визначається цільовою функцією F .

Існують і більш складні та ефективні методи пошуку екстремумів цільової функції, що дозволяють уникати (або успішно проходити) локальні мінімуми цільових функцій. До таких методів відносяться метод Флетчера-Рівса (належить до групи методів сполучених градієнтів) та метод Девідона-Флетчера-Пауелла (відноситься до групи методів сполучених напрямків), наприклад.

Однак однією з найбільших проблем, пов'язаних із реалізацією згаданих вище методів, є пошук самої цільової функції. Справа в тому, що більшість із досліджуваних фізичних явищ та процесів, а в тому числі й поширення температурного поля, описуються диференціальними рівняннями у часткових похідних. Тому, при відтворенні полів їх параметрів вдаються до дискретної апроксимації відповідних їм рівнянь [2]. Результатом розрахунку в такому випадку стає множина дискретних параметрів стану системи. Відтак, для пошуку проміжних значень досліджуваних показників, необхідно виконувати операції інтерполювання між наперед визначеною множиною шаблонних – базових – вузлів. При цьому слід пам'ятати, що, зазвичай, при локальній інтерполяції сама застосовувана функція найбільш вдало відображає проміжні шукані значення лише в умовних межах шаблону [3]. При переході до кожної іншої ділянки множина вузлів шаблону змінюється і інтерполяційну функцію слід будувати заново. Для ідентифікації меж поточного шаблону використовують логічні оператори, що у певній мірі ускладнює процес обчислення.

З іншого боку можливе застосування глобальної інтерполяції. Однак в цьому випадку можливе виникнення неочікуваних осциляцій, що в свою чергу знівелює достовірність проміжних шуканих даних [4].

Слід сказати, що при оцінці температурного поля у вузлах будівельних конструкцій найчастіше вдаються до постановки плоских – двовимірних задач. При цьому сама цільова функція залежить лише від трьох параметрів: від двох координат і температури. З геометричної точки зору графіком такої функції є поверхня в тривимірному просторі, що зводить задачу пошуку містку холоду до побудови лінії найбільшого ухилу поверхні деякого умовного схилу. Якщо дискретний каркас такої поверхні побудований на регулярній або ортогональній у плані сітці II-го типу, то в межах кожної з чарунок поле досліджуваних параметрів може бути досить успішно проінтерпольоване гіперболічним параболоїдом [4, 6]. Однак, якщо сітка в плані не ортогональна, то виникають розриви функції у місцях стикування чарунок, що недопустимо.

Окрім того, інколи зручно розбивати досліджувану область сіткою II-го

типу із чарунками у формі довільних опуклих чотирикутників [7]. В такому випадку інтерполяційні локальні функції можуть бути представлені лише параметрично [5] або дискретно [3], причому уникнути використання логічних операторів в процесі побудови траєкторії найшвидшого спуску чи підйому просто неможливо.

Основна частина. В контексті сказаного стає очевидним, що алгоритму оптимальної інтерполяції, необхідної для подолання порушеної проблеми, мають бути властиві прогнозованість характеру функцій локального інтерполювання та відсутність потреби у використанні логічних операторів. Тобто, інтерполяція має здійснюватись однією глобальною функцією, що забезпечуватиме відсутність осциляцій і буде визначеною в межах кожної з чарунок. Надалі обмежимося лише II-м типом регулярних сіток.

Розглянемо функцію F для локального інтерполювання між чотирма довільно розміщеними у просторі точками $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ та $D(x_D, y_D, z_D)$ (рис. 1). Формально перші дві координати кожної з точок (x та y) відповідатимуть їх фактичним координатам в плані розбиття на чарунки (на площині). Третя координата (z) відповідатиме значенню температури (t) у цих точок. Задамося умовою прямолінійності відрізків AB , BC , CD та AD .

Запишемо рівняння цієї поверхні у параметричній формі зі збереженням поставлених умов. Тоді кожна довільна точка $S(x_S, y_S, z_S)$ поверхні має лежати на відрізку прямої проведеної через такі дві точки $M(x_M, y_M, z_M)$ та $N(x_N, y_N, z_N)$ на відрізках AB та CD відповідно, що утворені цими точками пари відрізків AM і MB та CN і ND перебуватимуть завжди у сталому співвідношенні:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \lambda^{-1}. \quad (0 \leq \lambda \leq \infty) \quad (5)$$

В такому випадку координати точок M та N можуть бути виражені через координати точок A, B, C і D та параметр λ наступними залежностями:

$$x_M = (x_A + \lambda \cdot x_B) / (1 + \lambda), \quad (6)$$

$$y_M = (y_A + \lambda \cdot y_B) / (1 + \lambda), \quad (7)$$

$$z_M = (z_A + \lambda \cdot z_B) / (1 + \lambda), \quad (8)$$

$$x_N = (x_C + \lambda \cdot x_D) / (1 + \lambda), \quad (9)$$

$$y_N = (y_C + \lambda \cdot y_D) / (1 + \lambda), \quad (10)$$

$$z_N = (z_C + \lambda \cdot z_D) / (1 + \lambda). \quad (11)$$

Окрім цього, необхідно ввести додатковий параметр ζ положення точки S , який визначатиметься величиною відношення відрізків MS і SN .

Даний параметр визначатиметься зі співвідношення:

$$\frac{MS}{SN} = \frac{m}{n} = \zeta^{-1}. \quad (0 \leq \zeta \leq \infty) \quad (12)$$

Враховуючи вираз (12), можна записати формули, що визначають положення довільної точки S на основі координат точок M і N :

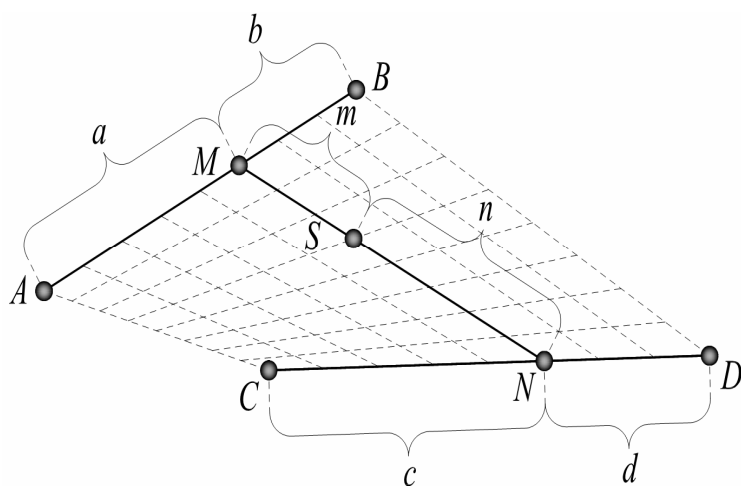


Рис. 1

$$x_S = (x_M + \zeta \cdot x_N) / (1 + \zeta), \quad (13)$$

$$y_S = (y_M + \zeta \cdot y_N) / (1 + \zeta), \quad (14)$$

$$z_S = (z_M + \zeta \cdot z_N) / (1 + \zeta). \quad (15)$$

Визначимо рівняння шуканої поверхні у неявній формі шляхом послідовного вилучення параметрів положення точок M, N і S .

Попарно підставивши координати точок M і N з рівнянь (6) – (8) та (9) – (11) до відповідних рівнянь (13) – (15), одержимо систему рівнянь даної поверхні у параметричній формі:

$$x_S = (x_A + \lambda \cdot x_B + \zeta \cdot x_C + \lambda \cdot \zeta \cdot x_D) / (1 + \lambda + \zeta + \lambda \cdot \zeta), \quad (16)$$

$$y_S = (y_A + \lambda \cdot y_B + \zeta \cdot y_C + \lambda \cdot \zeta \cdot y_D) / (1 + \lambda + \zeta + \lambda \cdot \zeta), \quad (17)$$

$$z_S = (z_A + \lambda \cdot z_B + \zeta \cdot z_C + \lambda \cdot \zeta \cdot z_D) / (1 + \lambda + \zeta + \lambda \cdot \zeta). \quad (18)$$

Очевидно, що звільнення від параметрів ζ та λ може здійснюватися багатьма шляхами. Розглянемо лише один із варіантів.

З рівнянь (17) та (18) виразимо параметр ζ (позначимо ці параметри нижніми індексами y та z відповідно):

$$\zeta_y = (y_A - y_S + \lambda \cdot (y_B - y_S)) / (y_S - y_C + \lambda \cdot (y_S - y_D)), \quad (19)$$

$$\zeta_z = (z_A - z_S + \lambda \cdot (z_B - z_S)) / (z_S - z_C + \lambda \cdot (z_S - z_D)), \quad (20)$$

та прирівняємо праві частини одержаних рівностей. В одержаному виразі відокремимо параметр λ у другому та першому ступенях, відмітивши цей параметр нижнім індексом yz . Отримаємо рівняння 2-го порядку:

$$\lambda_{yz}^2 \cdot \left[\begin{aligned} & (y_S - y_D) \cdot (z_B - z_S) - \\ & - (y_B - y_S) \cdot (z_S - z_D) \end{aligned} \right] + \lambda_{yz} \cdot \left[\begin{aligned} & (y_S - y_D) \cdot (z_A - z_S) + (y_S - y_C) \cdot (z_B - z_S) - \\ & - (y_B - y_S) \cdot (z_S - z_C) - (y_A - y_S) \cdot (z_S - z_D) \end{aligned} \right] + \quad (21)$$

$$+ [(y_S - y_C) \cdot (z_A - z_S) - (y_A - y_S) \cdot (z_S - z_C)] = 0,$$

або скорочено:

$$\lambda_{yz}^2 \cdot P_{yz} + \lambda_{yz} \cdot Q_{yz} + R_{yz} = 0, \quad (22)$$

де:

$$P_{yz} = [(y_S - y_D) \cdot (z_B - z_S) - (y_B - y_S) \cdot (z_S - z_D)], \quad (23)$$

$$Q_{yz} = \left[\begin{aligned} & (y_S - y_D) \cdot (z_A - z_S) + (y_S - y_C) \cdot (z_B - z_S) - \\ & - (y_B - y_S) \cdot (z_S - z_C) - (y_A - y_S) \cdot (z_S - z_D) \end{aligned} \right], \quad (24)$$

$$R_{yz} = [(y_S - y_C) \cdot (z_A - z_S) - (y_A - y_S) \cdot (z_S - z_C)]. \quad (25)$$

Розв'язки рівняння (22) можна записати наступним чином:

$$\lambda_{yz} = (-Q_{yz} \pm \sqrt{Q_{yz}^2 - 4 \cdot P_{yz} \cdot R_{yz}}) / (2 \cdot P_{yz}), \quad (26)$$

причому коренем може бути лише додатне число за визначенням (див. (5)).

Аналогічним чином на основі виразів (16) і (18) та (16) і (17) можуть бути складені й рівняння, коренями яких є параметри λ_{xz} та λ_{xy} відповідно:

$$\lambda_{xz}^2 \cdot P_{xz} + \lambda_{xz} \cdot Q_{xz} + R_{xz} = 0, \quad (27)$$

$$\lambda_{xy}^2 \cdot P_{xy} + \lambda_{xy} \cdot Q_{xy} + R_{xy} = 0. \quad (28)$$

Запишемо тепер функцію, область визначення якої відповідатиме лише координатам точок, що містяться на відрізку MN . В буквенній формі це рівняння матиме наступну форму, що відповідає еліпсоїду з нульовим ексцентриситетом:

$$MS + SN - MN = 0. \quad (29)$$

Або в розгорнутій формі у декартових координатах:

$$\begin{aligned} F = \zeta(x, y, z) = \\ = \sqrt{(x_S - x_M)^2 + (y_S - y_M)^2 + (z_S - z_M)^2} + \sqrt{(x_S - x_N)^2 + (y_S - y_N)^2 + (z_S - z_N)^2} - \\ - \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

де:

$$x_M = (x_A + \lambda_{yz} \cdot x_B) / (1 + \lambda_{yz}), \quad (31)$$

$$y_M = (y_A + \lambda_{xz} \cdot y_B) / (1 + \lambda_{xz}), \quad (32)$$

$$z_M = (z_A + \lambda_{xy} \cdot z_B) / (1 + \lambda_{xy}), \quad (33)$$

$$x_N = (x_C + \lambda_{yz} \cdot x_D) / (1 + \lambda_{yz}), \quad (34)$$

$$y_N = (y_C + \lambda_{xz} \cdot y_D) / (1 + \lambda_{xz}), \quad (35)$$

$$z_N = (z_C + \lambda_{xy} \cdot z_D) / (1 + \lambda_{xy}). \quad (36)$$

Вираз (30) представляє собою шукану локальну інтерполяційну функцію, що задовольняє сформульованим на початку вимогам.

На рисунку 2 представлено побудований за запропонованим принципом гіперболічний параболоїд, область визначення функції якого відповідає лише точкам, котрі лежать у межах контуру, представленого опуклим просторовим чотирикутником $A(0, 0, 13)$, $B(10, 0, 10)$, $C(0, 10, 12)$ та $D(10, 10, 11)$.

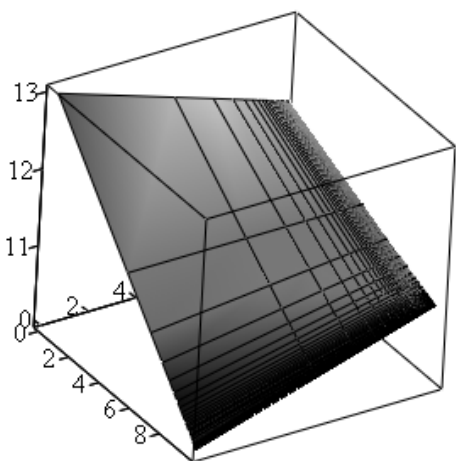


Рис. 2

Якщо область, у якій розвивається досліджуване температурне поле, представлена дискретно і складається з g чарунок, то глобальна інтерполяційна функція F представлятиме собою добуток локально-інтерполюючих функцій F_h типу (30) побудованих для кожної з чарунок:

$$F = \prod_{h=1}^g F_h = 0. \quad (37)$$

Одержане таким чином рівняння у неявній формі може бути без особливих ускладнень піддане аналізу щодо траєкторій найшвидшого спуску чи підйому на основі градієнтних методів без використання логічних операторів.

Висновки. Запропонований підхід до побудови інтерполяційних функцій може бути успішно застосований не лише при аналізі температурних полів, а й інших фізичних явищ та процесів, таких як розповсюдження вологи у тілі пористих матеріалів, або при оцінці формування потоку рідини по різних

поверхнях. Окрім того продемонстрований підхід до локального інтерполювання може бути відносно просто узагальнений для багатовимірних задач. Слід лише зауважити, що представлені функції потребують ретельних досліджень на предмет області їх визначення при різноманітних умовах взаємного розташування базових вершин чарунок у просторі, а також при різних варіантах звільнення від параметрів положення точок побудованих поверхонь.

Література

1. *Шуп Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. Пер. с англ. / *Т. Шуп.* – М.: Мир, 1982. – 238 с., ил.
2. *Самарский А. А.* Численные методы / *А. А. Самарский, А. В. Гулин.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с.
3. *Найдиш В. М.* Основи прикладної дискретної геометрії / *В. М. Найдиш, В. М. Верещага, А. В. Найдиш, В. М. Малкіна.* – Мелітополь: ВДП «Люкс», 2007. – 194 с.
4. *Найдиш В. М.* Дискретна інтерполяція / *В. М. Найдиш.* – Мелітополь: ВДП «Люкс», 2008. – 250 с.
5. *Найдыш В. М.* Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводов по заданным дифференциально-геометрическим условиям / *В. М. Найдыш* // Автореф. дисс. ... доктора техн. наук: 05.01.01. – М.: МАИ, 1983.
6. *Ковальов С. М.* Конструювання сітчастих каркасів поверхонь із горизонталей і ліній найбільшого схилу / *С. М. Ковальов, О. В. Воронцов* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 1993. – Вип. 54. – с. 13-16.
7. *Скочко В. І.* Спеціальні геометричні моделі процесів, що розвиваються в суцільному середовищі / *В. І. Скочко* // Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. – К.: КНУБА, 2012. – 269 с.

Аннотация

В работе раскрыто основные принципы построения специальных интерполяционных функций, использование которых позволяет избежать вовлечения логических операторов используемого программного обеспечения в процесс построения траекторий наискорейшего возрастания или снижения температурного поля в узлах строительных конструкций.

Annotation

This article describes the underlying principles of the special interpolation functions construction. Use of these functions allows avoiding involving of the logical operators of the software resources which are used in process of construction of the temperature field's fastest increase or decrease trajectory in building construction's junctions.