УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Солодей І.І., канд. техн. наук,
Приходько А.Ю., асп.

НАПІВАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ

Проектування будівель та споруд на сучасному етапі неможливо без урахування динамічних навантажень. Це пояснюється багатьма причинами. Найбільш очевидна – збільшення динамічних навантажень, які є наслідком роботи машин, кранів та іншого обладнання, широке застосування вібрацій, ударів та промислових вибухів як елементів технологічного процесу. Намагання задовольнитися статичним розрахунком та враховувати динамічне навантаження деякими, по суті, апріорними динамічними коефіцієнтами уже давно визнані недієздатними. Класифікація динамічних процесів, що виникають при деформуванні твердих тіл, базується на величині швидкості деформацій. Швидкості деформацій в діапазоні від 10^{-2} до 10^{0} c^{-1} з характерним часом протікання $10^{2}\div10^{-2}$ с визначаються як проміжні, або середні, між статичними та швидкістними процесами [4]. Саме в цьому діапазоні стають помітними ефекти швидкості деформації, хоча в деяких випадках їх впливом ще можна знехтувати.

Найбільш розповсюдженим динамічним навантаженням від машин і обладнання є періодичні коливання. Ці коливання можуть збуджуватися як при нормальному робочому режимі обладнання, так і при його запуску, остановці або аварії. При дії гармонічного навантаження задача зводиться до квазістатичної для амплітудних значень переміщень. У випадку періодичної дії виконується гармонічний аналіз навантаження, що дає можливість проводити вивчення періодичного руху суперпозицією гармонік. Якщо збуджуване періодичне навантаження має складний закон зміни у часі, тоді при розрахунку конструкції навантаження розкладають в ряд Фур'є та обмежуються декількома першими гармоніками.

Серед різноманіття просторових динамічних задач важливим частковим випадком, що має самостійне прикладне значення в області дорожнього будівництва, є проблема дослідження пружного деформування протяжних тіл призматичної форми під дією рухомих навантажень. Переміщення вантажу утворює нестаціонарний процес в направляючій конструкції, який залежить від швидкості руху вантажів та співвідношення їх мас і несучої конструкції. У випадку, коли один з вимірів тіла значно перевершує два інших і швидкість руху навантаження постійна, процес деформування можна розглядати як сталий. Клас конструкцій, що зазнають дію інерційних рухомих навантажень, вельми широкий, причому розвиток промисловості диктує необхідність збільшення швидкостей руху при максимальному використанні резервів міцності.

Постановка задачі. Розглянемо системи неоднорідних ізотропних тіл обертаня та призматичних тіл (рис. 1), що знаходяться під дією стаціонарних періодичних або рухомих навантажень, на інтервалі часу $[t_0, t_1]$.

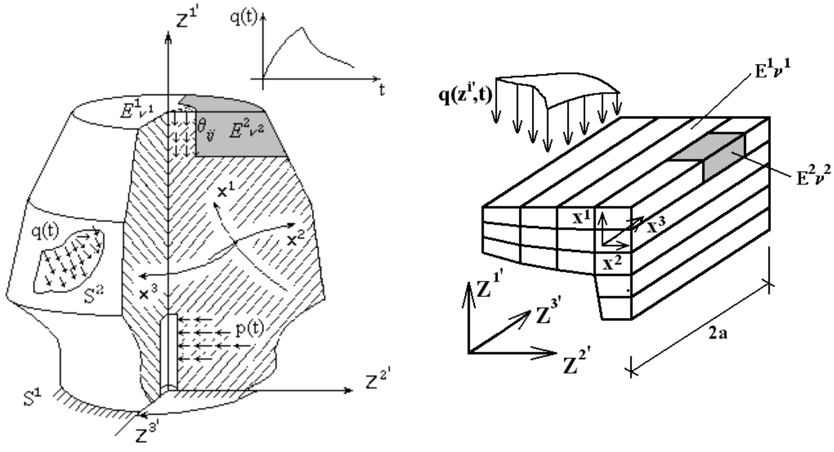


Рис. 1. Системи неоднорідних ізотропних тіл

Опис геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в ортогональній круговій циліндричній або декартовій системі координат $Z^{i'}$, що в подальшому називається базисною.

Для подання напружено-деформованого стану тіла із складною формою поперечного перетину запроваджується місцева криволінійна система координат x^i, яка пов'язана з геометрією тіла.

Переміщення будь-якої точки тіла визначається компонентами в базисній системі координат $u_{i'}$.

Компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат виражаються через компоненти переміщень в базисній [2] та мають вигляд:

- *в ортогональній циліндричній системі координат*:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(z^{\gamma'}_{,\alpha} u_{\gamma',\beta} + z^{\gamma'}_{,\beta} u_{\gamma',\alpha}\right),\ \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\left(u_{3',\alpha} + z^{\gamma'}_{,\alpha} u_{\gamma',3} - \frac{2 z^{2'}_{,\alpha} u_{3'}}{Z^{2'}}\right),$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3',3} + Z^{2'} u_{2'}, \tag{1}$$

- *в декартовій*:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(z^{\gamma'}_{,\alpha} u_{\gamma',\beta} + z^{\gamma'}_{,\beta} u_{\gamma',\alpha}\right),\ \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\left(a u_{3',\alpha} + z^{\gamma'}_{,\alpha} u_{\gamma',3}\right),$$

$$\varepsilon_{33} = a u_{3',3}, \tag{2}$$

де $z^{i'}_{,j} = \partial Z^{i'} / \partial x^{j}$ - прямий тензор перетворення координат; $u_{i',j} = \partial u^{i'} / \partial x^{j}$; α, β = 1, 2 .

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [2]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \tag{3}$$

В загальному випадку компоненти тензора пружних постійних є функціями часової координати $d^{ijkl} = d^{ijkl}(t)$.

Класичне рівняння руху неоднорідного ізотропного тіла об'ємом V обмеженого поверхнею S записується у вигляді [3, 4]:

$$\delta K + \delta W - \delta A = 0, \tag{4}$$

де $\delta W = \int\limits_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV$ - варіація потенційної енергії деформації записана в термінах фізичних компонент тензорів напружень та деформацій [2] $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big/ \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}$, $\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}$, $\tilde{d}^{ijkl} = d^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}}$ $\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{d}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}$, $\delta A = \int\limits_V f^{i'} \delta u_{i'} dV + \int\limits_S p^{i'} \delta u_{i'} dS$ - варіація роботи внутрішніх та зовнішніх сил; δK - варіація кінетичної енергії, яка в залежності від параметрів процесу руху, може бути записана як:

$$\delta K = \int\limits_V \rho \ddot{u}^{i'} \delta u_{i'} dV, \tag{5}$$

$$\delta K = \int_V \rho \dot{u}^{i'} \delta \dot{u}_{i'} dV . \tag{6}$$

Однозначність розв'язання (4) забезпечується запровадженням відповідних початкових і граничних умов. За початкові умови приймається відомий розподіл переміщеннь та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу t_0:

$$u(Z^{i'}, t_0) = u_0(Z^{i'}) , \ \dot{u}(Z^{i'}, t_0) = \dot{u}_0(Z^{i'}) , \ Z^{i'} \in V . \tag{7}$$

На частині поверхні S_u задані кінематичні граничні умови:

$$u(Z^{i'}, t) = \tilde{u}(Z^{i'}, t) , \ Z^{i'} \in S_u , \tag{8}$$

а на поверхні S_p з нормаллю $\vec{n} = n_j e^j$ - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z^{k'}_{,i} \sigma^{ij} n_j = \tilde{p}\left(Z^{k'}, t\right) , \ Z^{k'} \in S_p . \tag{9}$$

Періодичні коливання просторових тіл. Відповідно до процесу стаціонарних коливань неоднорідного ізотропного просторового (осесиметричного, циклічносиметричного чи призматичного) тіла під дією системи довільно розподілених у просторі періодичних зовнішніх навантажень:

$$f^{j'} = \sum_{r=1}^{R} f_r^{j'} \sin \omega_r t , \ p^{j'} = \sum_{r=1}^{R} p_r^{j'} \sin \omega_r t , \ \omega_r = \frac{r\pi}{T} , \tag{10}$$

де T - період дії навантаження; R - число гармонік, необхідне для опису розподілу навантаження в інтервалі $[t_0, t_1]$. Можна очікувати, що реакція системи також повинна задовольняти періодичному закону, аналогічному (10):

$$u_{i'} = \sum_{s=1}^{S} u_{i'}^{s} \sin \omega_s t \ \Rightarrow \ \tilde{\varepsilon}_{ij} = \sum_{s=1}^{S} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{s} \sin \omega_s t . \tag{11}$$

Представивши переміщення, зовнішні навантаження і деформації відомими періодичними функціями часової координати (10) і (11), та виконавши інтегрування (4) з урахуванням ортогональності тригонометричних функцій на інтервалі $[t_0, t_1]$, у випадку коливань пружних тіл, коли залежність між напруженнями і деформаціями описується лінійним законом, і як наслідок $\tilde{\sigma}_{ij} = \sum_{s=1}^{S} \tilde{\sigma}_{ij}^{s} \sin \omega_s t$, розв'язання просторової динамічної задачі зводиться до пошуку ряду квазістатичних періодичних рішень для кожної гармоніки в розкладі заданих і невідомих функцій по часовій координаті з урахуванням інерційних сил:

$$\sum_s \int_V \tilde{\sigma}_s^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}^{s} dV - \sum_s \omega_s^2 \int_V \rho u_s^{i'} \delta u_{i'}^{s} dV = \sum_s \left[\int_V f_s^{i'} \delta u_{i'}^{s} dV + \int_S p_s^{i'} \delta u_{i'}^{s} dS \right]. \quad (12)$$

Деформування тіл під дією рухомого навантаження. Розглядаються сталі процеси при постійній швидкості руху навантаження, з фронтом якого пов'язують рухому базисну систему координат $y^{i'}$ (рис. 2). Зв'язок між рухомою і нерухомою системами координат подається через співвідношення:

$$y^{3'} = z^{3'} - V_p t, \quad (13)$$
$$y^{\alpha'} = z^{\alpha'}, \ \alpha = 1, 2$$

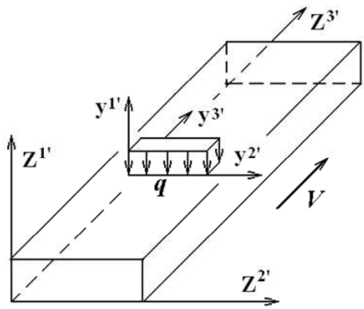


Рис. 2

Тоді на основі (13) запишемо:

$$\frac{\partial z^{i'}}{\partial y^{i'}} = \begin{cases} 0, \ i \ne j \\ 1, \ i = j \end{cases}, \ \frac{\partial z^{i'}}{\partial t_y} = \begin{cases} 0, \ i \ne 3 \\ V_p, \ i = 3 \end{cases}, \ \frac{\partial y^{i'}}{\partial t} = \begin{cases} 0, \ i \ne 3 \\ -V_p, \ i = 3 \end{cases}, \ \frac{\partial t}{\partial t_y} = 1. \quad (14)$$

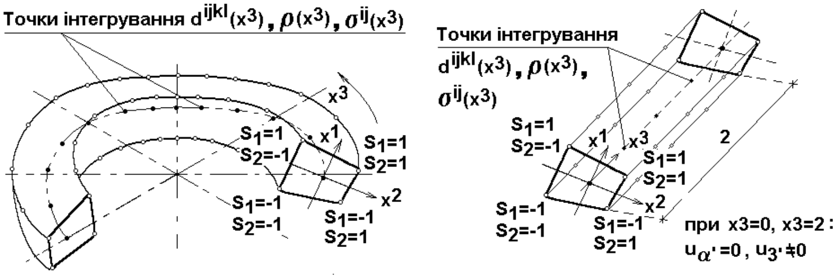
Виходячи з (14) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial z^{i'}} = \frac{\partial}{\partial y^{i'}}, \ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_y} - V_p \frac{\partial}{\partial y^{3'}}. \quad (15)$$

На основі положення про стаціонарність процесу в рухомій системі координат та використовуючи співвідношення (6), як вихідне для варіації кінетичної енергії, отримаємо:

$$\int_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV + V_p^2 \int_V \rho \frac{\partial u^{i'}}{\partial y^{3'}} \frac{\partial \delta u_{i'}}{\partial y^{3'}} dV = \int_V f^{i'} \delta u_{i'} dV + \int_S p^{i'} \delta u_{i'} dS = 0. \quad (16)$$

Скінченноелементна модель. Для дискретизації неоднорідних пружнопластичних тіл при динамічному навантаженні застосовуються кільцевий та призматичний скінченні елементи (СЕ) (рис. 3).



а *б*

Рис. 3. Неоднорідні скінченні елементи:
а - замкнутий кільцевий, б – прямолінійний призматичний

Початок місцевої системи координат x^i знаходиться у геометричному центрі елемента, вісі x^1 і x^2 направлені паралельно сторонам поперечного перерізу, а x^3 суміщена із $Z^{3'}$.

Припускається, що щільність матеріалу ρ, компоненти тензора пружних постійних d^{ijkl} і визначник метричного тензора g незначно змінюються в області поперечного перерізу елемента і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі.

Невідомими задачі вважаються переміщення вузлів СЕ $u_{i'}$ при аналізі деформування тіл під дією рухомого навантаження та амплітуди коливань переміщень вузлів СЕ $u_{i'}^{s}$ по s гармоніці при дослідженні періодичних коливань просторових тіл. Надалі індекс s буде опущений з метою узагальнення співвідношень НМСЕ для задач стаціонарних коливань просторових неоднорідних тіл.

Якщо обмежитися білінійним розподілом невідомих в площині перетину елемента і описати їх через вузлові значення поліномами Лагранжа першого ступеня, тоді можна записати:

$$u_{k'} = \sum_{S_1}\sum_{S_2} P_{(S_1,S_2)} u_{k'(S_1,S_2)}, \quad \mathrm{P}_{(S_1,S_2)} = \prod_{n=1}^{2}\left(S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right), \qquad (17)$$

Індекси S_1 та S_2 визначають положення вузла відносно центру поперечного перерізу елемента і набувають значеннь ± 1 (рис. 3).

Для подання деформацій використовується моментна схема скінченних елементів (МССЕ) [7]:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \frac{1}{g_{(\alpha\alpha)}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\varepsilon}'_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \tag{18}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{33}}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\varepsilon}'_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}'_{33,\alpha} x^{\alpha} \right\},$$

де $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}\Big|_{x^\alpha = 0}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \left(\partial \varepsilon_{ij} \big/ \partial x^{\beta} \right)\Big|_{x^\alpha = 0}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}'_{ij,\beta} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} - \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}}{2} \left(h_{(ii),\beta} + h_{(jj),\beta} \right)$, $h_{(ii),\beta} = g_{(ii),\beta} \big/ g_{(ii)}$.

При заданому законі апроксимації невідомих (17), коефіцієнти ряду Маклорена обчислюються по формулам:

- *для кільцевого СЕ*:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[z^{\gamma'}_{,\alpha} u_{\gamma'(S_1,S_2)} S_\beta + z^{\gamma'}_{,\beta} u_{\gamma'(S_1,S_2)} S_\alpha \right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[u_{3'(S_1,S_2)} S_\alpha + \frac{1}{2} z^{\gamma'}_{,\alpha} u_{\gamma',3(S_1,S_2)} - \frac{z^{2'}_{,\alpha}}{Z^{2'}} u_{3'(S_1,S_2)} \right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[u_{3',3(S_1,S_2)} + Z^{2'} u_{2'(S_1,S_2)} \right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[z^{\gamma'}_{,\alpha(3-\alpha)} u_{\gamma'(S_1,S_2)} S_\alpha + 2 z^{\gamma'}_{,\alpha} u_{\gamma'(S_1,S_2)} S_\alpha S_{(3-\alpha)} \right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[u_{3'(S_1,S_2)} S_\alpha + \frac{z^{2'}_{,\alpha}}{2} u_{2'(S_1,S_2)} + Z^{2'} u_{2'(S_1,S_2)} S_\alpha \right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[2 u_{3'(S_1,S_2)} S_\alpha S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z^{\gamma'}_{,\alpha(3-\alpha)} u_{\gamma',3(S_1,S_2)} + \right.$$

$$+ z^{\gamma}_{,\alpha} u_{\gamma',3(S_1,S_2)} S_{(3-\alpha)} - \frac{z^{2'}_{,\alpha(3-\alpha)}}{Z^{2'}} u_{3'(S_1,S_2)} +$$

$$\left. + \frac{z^{2'}_{,\alpha} z^{2'}_{,(3-\alpha)}}{\left(Z^{2'}\right)^2} u_{3'(S_1,S_2)} - \frac{z^{2'}_{,\alpha}}{Z^{2'}} u_{3'(S_1,S_2)} S_{(3-\alpha)} \right];$$

- *для призматичного СЕ*: (19)

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[z^{\gamma}_{,\alpha} u_{\gamma'(S_1,S_2)} S_{\beta} + z^{\gamma}_{,\beta} u_{\gamma'(S_1,S_2)} S_{\alpha} \right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[u_{3'(S_1,S_2)} S_{\alpha} a + \frac{1}{2} z^{\gamma}_{,\alpha} u_{\gamma',3(S_1,S_2)} \right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} u_{3',3(S_1,S_2)} a,$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[z^{\gamma}_{,\alpha(3-\alpha)} u_{\gamma'(S_1,S_2)} S_{\alpha} + 2 z^{\gamma}_{,\alpha} u_{\gamma'(S_1,S_2)} S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} \right],$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} u_{3',3(S_1,S_2)} S_{\alpha} a,$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[a u_{3'(S_1,S_2)} S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z^{\gamma}_{,\alpha(3-\alpha)} u_{\gamma',3(S_1,S_2)} + \right.$$

$$\left. + z^{\gamma}_{,\alpha} u_{\gamma',3(S_1,S_2)} S_{(3-\alpha)} \right].$$

По аналогії з компонетами тензора деформацій, напруження записуються у вигляді:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} = g_{(\alpha\alpha)} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}{}'^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = \sqrt{g_{11} g_{22}}\, \overset{\circ}{\sigma}{}^{12}, \tag{20}$$

$$\tilde{\sigma}^{\alpha 3} = \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}{}'^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = g_{33} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}{}'^{33}_{,\alpha} x^{\alpha} \right\}.$$

Зв'язок між коефіцієнтами розкладів (18) і (20) в центрі меридіонального перетину СЕ на основі узагальненого закону Гука:

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} = d^{ijkl}\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{kl},\ \overset{\circ}{\sigma}{}'^{ij}_{,\alpha} = d_{\alpha}^{ijkl}\,\overset{\circ}{\varepsilon}{}'_{kl,\alpha},\ d_{\alpha}^{ijkl} = d^{ijkl} - \frac{d^{ij(\alpha)(\alpha)}d^{(\alpha)(\alpha)kl}}{d^{(\alpha)(\alpha)(\alpha)(\alpha)}}. \quad (21)$$

В силу замкнутості кільцевого СЕ, сталості його геометричних параметрів вздовж окружної координати та для забезпечення виконання граничних умов для шарнірно опертих призматичних тіл розподіл невідомих в напрямку x^3 проводиться 2π - періодичними функціями x^3 і їх значення представляються відрізками тригонометричних рядів Фур'є:

$$u_{k'(S_1,S_2)} = \sum_{l=l_0}^{L} u^l_{k'(S_1,S_2)}\psi^l_{(k')}, \quad (22)$$

$\psi^l_{1'} = \psi^l_{2'} = \cos lx^3$, $\psi^l_{3'} = \sin lx^3$, $l_0 = 0$, $0 \le x^3 \le 2\pi$ для кільцевого СЕ;

$\psi^l_{1'} = \psi^l_{2'} = \sin\dfrac{\pi l}{2}x^3$, $\psi^l_{3'} = \cos\dfrac{\pi l}{2}x^3$, $l_0 = 1$, $0 \le x^3 \le 2$ для призматичного.

Визначивши невідомі $u_{k'(S_1,S_2)}$ через амплітудні значення і підставивши їх в (18), після диференціювання по x^3 і перегрупування коефіцієнтів при *cos* і *sin* отримаємо:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \sum_{l=l_0}^{L} \overset{\circ}{\bar{\varepsilon}}{}^l_{ij}\psi^l_{1'} + \overset{\circ}{\bar{\bar{\varepsilon}}}{}^l_{ij}\psi^l_{3'},\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} = \sum_{l=l_0}^{L} \overset{\circ}{\bar{\varepsilon}}{}^l_{ij,\alpha}\psi^l_{1'} + \overset{\circ}{\bar{\bar{\varepsilon}}}{}^l_{ij,\alpha}\psi^l_{3'}, \quad (23)$$

Напруження і їх похідні незалежно подаються відрізками ряду Фур'є вздовж x^3:

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} = \sum_{l=l_0}^{L} \overset{\circ}{\bar{\sigma}}{}^{ij}_{l}\psi^l_{1'} + \overset{\circ}{\bar{\bar{\sigma}}}{}^{ij}_{l}\psi^l_{3'},\ \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_{,\alpha} = \sum_{l=l_0}^{L} \overset{\circ}{\bar{\sigma}}{}^{ij}_{,\alpha l}\psi^l_{1'} + \overset{\circ}{\bar{\bar{\sigma}}}{}^{ij}_{,\alpha l}\psi^l_{3'}. \quad (24)$$

Для однорідних вздовж x^3 тіл амплітудні значення напружень та їх похідних в центрі поперечних перерізів СЕ можуть бути отримані безпосередньо через амплітудні значення деформацій і їх похідних:

$$\overset{\circ}{\bar{\sigma}}{}^{ij}_{l} = d^{ijkm}\,\overset{\circ}{\bar{\varepsilon}}{}^l_{km},\ \overset{\circ}{\bar{\sigma}}{}^{ij}_{,\alpha l} = d_{\alpha}^{ijkm}\,\overset{\circ}{\bar{\varepsilon}}{}^l_{km,\alpha},\ \overset{\circ}{\bar{\bar{\sigma}}}{}^{ij}_{l} = d^{ijkm}\,\overset{\circ}{\bar{\bar{\varepsilon}}}{}^l_{km},\ \overset{\circ}{\bar{\bar{\sigma}}}{}^{ij}_{,\alpha l} = d_{\alpha}^{ijkm}\,\overset{\circ}{\bar{\bar{\varepsilon}}}{}^l_{km,\alpha}. \quad (25)$$

В загальному випадку, компоненти тензора пружних постійних залежать від координати x^3 і значення напружень неможливо отримати через амплітудні значення деформацій. Тому, амплітудні значення напружень визначаються чисельним інтегруванням:

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_{l} = \frac{1}{\theta N}\sum_{n=0}^{2N-1}\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_{n}\phi_1^l(n),\ \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_{,\alpha l} = \frac{1}{\theta N}\sum_{n=0}^{2N-1}\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_{,\alpha n}\phi_1^l(n),$$

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_{l} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{2N-1}\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_{n}\phi_2^l(n),\ \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_{,\alpha l} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{2N-1}\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_{,\alpha n}\phi_2^l(n), \qquad (26)$$

де $\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_{n}$ і $\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_{,\alpha n}$ - координатні значення напружень і їх похідні в центрі поперечних перерізів, що відповідають точкам інтегрування *n*; *2N* - загальне число точок інтегрування, розміщених вздовж координати x^3, необхідне для обчислення амплітудних значень аж до $l = L$ включно. Для кільцевого СЕ: $\phi_1^l(n) = \cos l\frac{\pi n}{N}$, $\phi_2^l(n) = \sin l\frac{\pi n}{N}$, $\theta = \begin{cases} 2, & l = 0 \\ 1, & l > 0 \end{cases}$, для призматичного: $\phi_1^l(n) = \sin l\frac{\pi n}{2N}$, $\phi_2^l(n) = \cos l\frac{\pi n}{2N}$, $\theta = 1$.

Запропоновані елементи призначені для розрахунку неоднорідних масивних, тонкостінних та комбінованих конструкцій. Оскільки в даному СЕ не накладається будь-яких обмежень на діапазони зміни модуля пружності і щільності матеріалу, при d^{ijkl}, $\rho \to 0$ з'являється можливість моделювання тіл з вирізами, що порушують суцільність матеріалу [6].

Розрахункові співвідношення НМСЕ. Варіація кінетичної енергії в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\delta K = -\omega_s^2\int_V \rho u_s^{i'}\delta u_{i'}^s dV \text{ - періодичні коливання,}$$

$$\delta K = V_p^2\int_V \rho\frac{\partial u^{i'}}{\partial y^{3'}}\frac{\partial \delta u_{i'}}{\partial y^{3'}}dV \text{ - рухоме навантаження.} \qquad (27)$$

Виразивши переміщення вузлів елемента вздовж окружної координати у вигляді відрізків ряду Фур'є (22), отримаємо:

$$\delta K = \hbar A\sum_{l=l_0}^{L}\sum_{m=m_0}^{L}\delta\left\{\left[u_{k'}\right]^l_{(S_1,S_2)}\right\}^T[m]_{lm}\left\{\left[u_{k'}\right]^m_{(S_1,S_2)}\right\}, \qquad (28)$$

де $[m]_{lm}$ - амплітудна матриця мас неоднорідного вздовж x^3 елемента, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$[m]_{lm} = \left[\left[m^{k'}\right]^{lm}_{(S_1,S_2)(S_1,S_2)}\right] = \sqrt{g}\,\rho^{k'}_{lm}\left[\left[g^{k'(k')}\right]_{(S_1,S_2)}\right]\mathrm{H}^l_M\mathrm{H}_I \tag{29}$$

$\mathrm{H}^l_M = 1$, $A = -\omega_s^2$, $\hbar = \pi$ для періодичних коливань; $\mathrm{H}^l_M = \left(\frac{\partial x^3}{\partial y^{3'}}\frac{l\pi}{2}\right)^2$,

$A = V_p^2$, $\hbar = 1$ - у випадку рухомого навантаження.

В загальному випадку при обчисленні інтеграла по площині поперечного перерізу СЕ:

$$\mathrm{H}_I = \prod_{n=1}^{2}\left[\left(S_n P_n + 3\right)/144\right]. \tag{30}$$

Так як при формуванні коефіцієнтів матриці жорсткості беруть участь поліноми більш низького ступеня (перші похідні), ніж при формуванні коефіцієнтів матриці мас і, отже, збіжність чисельного рішення визначається збіжністю потенційної енергії деформації, тоді доцільно зменшити ступінь поліномів, які використовуються при обчисленні коефіцієнтів матриці мас. В цьому випадку, отримаємо вираз для коефіцієнтів "неузгодженої" матриці мас. Використавши припущення про осереднення маси біля вузла, що розглядається, та враховуючи, що кожна вузлова маса відповідає частині маси елементів, які примикають до даного вузла, множник H_I можна записати як:

$$\mathrm{H}_I = 1/4\,. \tag{31}$$

Тут введені наступні позначення:

$$\rho^{\alpha'}_{lm} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{2N-1}\rho_n\phi^l_1(n)\phi^m_1(n),\ \rho^{3'}_{lm} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{2N-1}\rho_n\phi^l_2(n)\phi^m_2(n), \tag{32}$$

ρ_n - щільність матеріалу, обчислена в центрі поперечного перерізу, що відповідає n-ій точці інтегрування.

Для однорідних тіл інтегрування в (32) можна виконати в замкнутій формі:

$$\rho_{lm}^{k'} = \rho \times \begin{cases} 1, \ l = m \\ 0, \ l \neq m \end{cases}. \qquad (33)$$

У випадку розв'язання задачі про деформування тіл під дією рухомого навантаження при переміщенні навантаження з постійною швидкістю формування і триангулярізація ефективної глобальної матриці задачі здійснюються один раз на першому кроці. Для розв'язання задачі із змінною швидкістю руху навантаження процедури формування і триангулярізації ефективних амплітудних підматриць необхідно виконувати на кожнім кроці за часом.

Розв'язання систем лінійних рівнянь. При аналізі об'єктів із змінними вздовж координати x^3 фізико-механічними параметрами не вдається досягти розділу змінних та подати матрицю задачі $\left[\hat{K}\right]\{U\} = \{Q\}$ у вигляді діагональних блоків [1]. Для таких систем рівнянь характерна блокова структура:

$$\left[\hat{K}\right] = \begin{bmatrix} \left[\hat{K}\right]_{l_0 m_0} & \cdots & \left[\hat{K}\right]_{l_0 m} & \cdots & \left[\hat{K}\right]_{l_0 L} \\ \left[\hat{K}\right]_{l m_0} & \cdots & \left[\hat{K}\right]_{ll} & \cdots & \left[\hat{K}\right]_{lL} \\ \left[\hat{K}\right]_{L m_0} & \cdots & \left[\hat{K}\right]_{Lm} & \cdots & \left[\hat{K}\right]_{LL} \end{bmatrix}. \qquad (34)$$

Кожний блок матриці (34) представляє собою стрічкову підматрицю, що зформована для двовимірної сіткової області, яка апроксимує поперечний переріз тіла:

$$\left[\hat{K}\right]_{lm} = [K]_{lm} + A[M]_{lm}. \qquad (35)$$

Розв'язання системи рівнянь (4) виконується за допомогою алгоритму, що заснований на методі блокової (групової) послідовної верхньої релаксації [8]:

$$\{U\}_{l,i+1} = \{U\}_{l,i} + \tilde{\omega}\left[\hat{K}\right]_{ll}^{-1}\left(\left\{\hat{Q}\right\}_l - \{R\}_{l,i}\right), \qquad (36)$$

де $\{R\}_{l,i}$ - вектор вузлових амплітудних реакцій на ітерації i, який визначається співвідношенням:

$$\{R\}_{l,i} = \sum_{m=l_0}^{l-1}\left[\hat{K}\right]_{lm}\{U\}_{i+1}^{m} + \sum_{m=l}^{L}\left[\hat{K}\right]_{lm}\{U\}_{i}^{m}, \qquad (37)$$

де $\{U\}_{i+1}^{m}$, $\{U\}_{i}^{m}$ - амплітудні значення вузлових переміщень на ітераціях $i+1$ та i відповідно, $\tilde{\omega}$ - параметр релаксації ($1 \le \tilde{\omega} < 2$).

На кожному кроці за часом ітераційний процес закінчується на ітерації $I=i$, якщо виконується умова:

$$\left\| \sum_{l=0}^{L} \{\Delta U\}_{l,i} \right\| \le \varepsilon \left\| \sum_{l=0}^{L} \{\Delta U\}_{l} \right\|, \tag{38}$$

де $\{\Delta U\}_{l,i}$ - прирощення амплітудних переміщень на ітерації i; $\{\Delta U\}_{l} = \sum_{i=1}^{I} \{\Delta U\}_{l,i}$ - вектор прирощень амплітудних переміщенњ; $\left\|\{\Delta U\}\right\| = \left|\{\Delta U\}\right|^{2}$; ε - наперед задане мале додатнє число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

Результати чисельних досліджень. Перевірку вірогідності розробленого підходу здійснено шляхом розв'язання тестових прикладів.

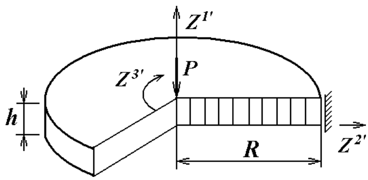


Рис. 4

На першому етапі розглянуто задачу періодичних коливань круглої пластини (рис. 4), защемленої по краях, що має аналітичний відомий розв'язок.

Геометричні, фізико-механічні характеристики пластини та параметри навантаження, що приймалися до розрахунку: $R = 1$ м, $h = 0.2$ м, $E = 2 \cdot 10^{4}$ МПа, $\rho = 2400$ кг/м^3, $\nu = 0.17$, $P = 10^{3} \sin 50t$.

На рис. 5 приведено розподіл амплітудних значень вертикальних переміщень вздовж радіуса пластини. Кружками представлено еталонний розв'язок, суцільною лінією – розв'язок отриманий на основі запропонованої методики. Деяка несуттєва відмінність результатів в області $R \to 0$ пояснюється впливом особливої точки $R = Z^{2'} = 0$, в якій параметри напружено-деформованого стану прямують до нескінченності.

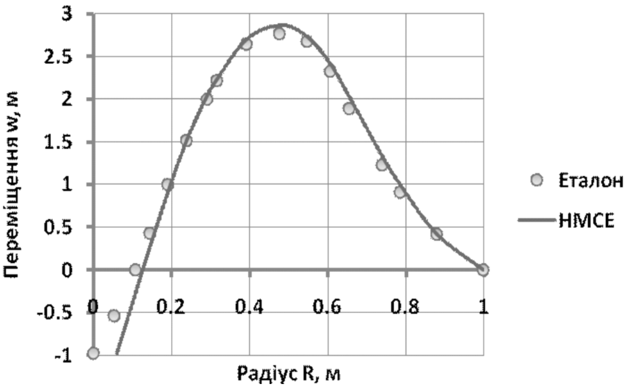


Рис. 5

Проведено дослідження збіжності чисельних результатів при використанні погодженої (30) і неузгодженої (31) матриць мас. Похибка щодо еталонних даних чисельного розв'язку, яке отримане при використанні погодженої матриці мас, показана суцільною лінією, неузгодженої – штрихпунктирною (рис. 6). Встановлено, що в обох випадках збіжність має однаковий ступінь. Тому є доцільним використання неузгодженої матриці мас з меншими чисельними витратами.

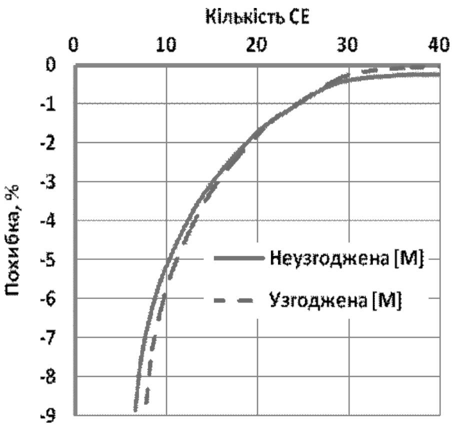


Рис. 6

Розглянуто динамічне деформування полоси прямокутного перерізу під дією сили $P = \sin 40t$, прикладеної в її геометричному центрі (рис. 7). a = 10м, b = 0.1м, c = 0.03м, d = a/2, $E = 2 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 2.4$ т/м^3, $\nu = 0.17$.

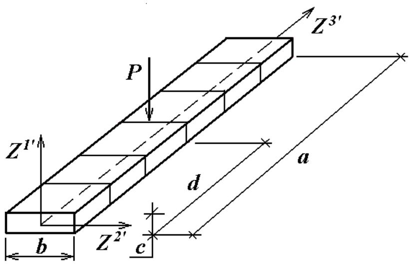


Рис. 7

Криві збіжності (рис. 8) при зміні кількості базисних функцій вздовж направляючої (скінченні елементи для метода скінченних елементів та відрізки ряду Фур'є для напіваналітичного його варіанта), свідчать про більш високу ефективність НМСЕ у порівнянні з МСЕ для даного класу конструкцій.

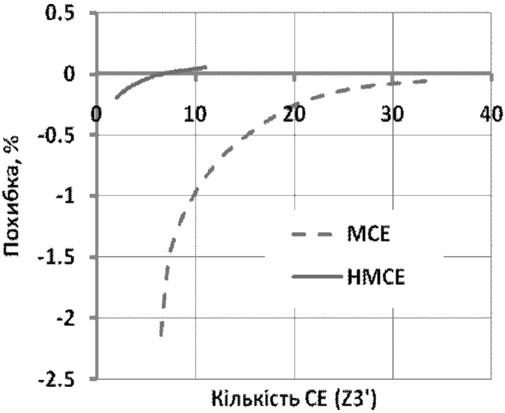


Рис. 8

Розв'язки, які отримані на основі сіткових параметрів, що забезпечують похибку менше 1% (НМСЕ - 1 гармоніка, МСЕ – 10 СЕ) повністю співпадають між собою (рис. 9).

Для демонстрації можливостей підходу при аналізі деформування призматичних тіл під дією рухомого навантаження розглянута аналогічна конструкція (рис. 7), під дією сили P, що рухається з поступовою швидкістю. a = 10дм, b = 0.1дм, c = 0.03дм, d = a/2, $P = 1\,H$, $E = 2 \cdot 10^9$ Н/дм^2, ρ = 7.8 кг/дм^3, $\nu = 0.3$.

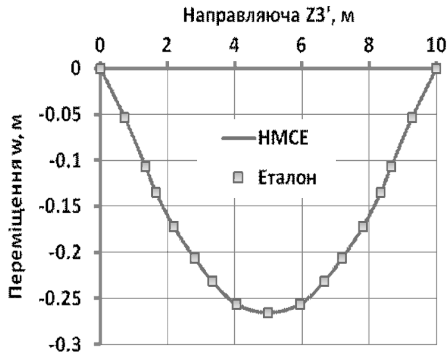


Рис. 9

Отримані епюри прогину балки в момент часу, коли сила досягає середини свого шляху для різних швидкостей пересування фронту навантаження. В усіх випадках зберігається добра узгодженість результатів з аналітичними рішеннями в межах 1÷2% (рис. 10).

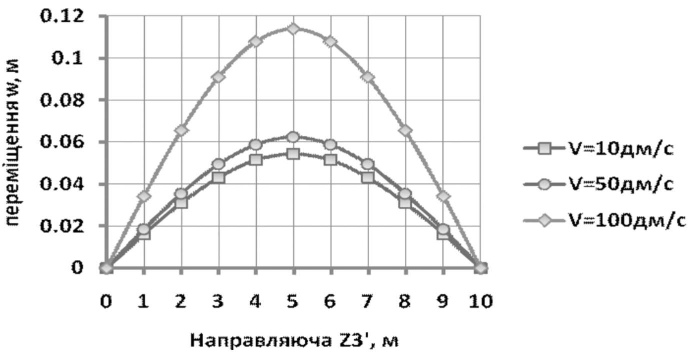


Рис. 10

Висновки. Таким чином, на основі напіваналітичного методу скінченних елементів розроблена та апробована ефективна методика аналізу лінійних стаціонарних коливань неоднорідних просторових тіл, що знаходяться під дією періодичних або рухомих навантажень. Проведено дослідження збіжності та вірогідності розв’язків у порівнянні з відомими аналітичними підходами.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376с.
2. *Блох В.И. Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. –483с.*
3. *Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 539 с.*
4. *Зукас Дж.А., Николас Т., Свифт Х.Ф., Грещук Л.Б., Курран Д.Р.* Динамика удара: Пер. с англ. / Зукас Дж.А., Николас Т., Свифт Х.Ф. и др. - М.: Мир, 1985. - 296 с., ил.
5. *Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов.- М.: Наука, 1966.- 432с.*
6. *Сахаров А.С., Гуляр А.И., Топор А.Г.* Анализ напряженно-деформированного состояния тел вращения с вырезами, нарушающими осевую симметрию. Проблемы прочности,1986, №6 – с.69-73.
7. *Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. -Киев: Вища школа, 1982. -479с.
8. *Хейгеман Л., Янг Д.* Прикладные итерационные методы. - М.: Мир, 1986. - 446 с.