УДК 539.3

**Гоцуляк Є.А.,** д-р техн. наук,
**Дехтярюк Є.С.,** д-р техн. наук,
**Лук'янченко О.О.,** канд. техн. наук.
**Борисенко В.Г.**, канд. техн. наук.

# МЕТОДИКА РЕДУКУВАННЯ РІВНЯНЬ В ЗАДАЧАХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ КОНСТРУКЦІЙ

Розглядаються питання, які пов'язані з побудовою розрахункових моделей для чисельного визначення границь областей стійкості динамічних станів пружних систем, що обумовлені зовнішнім впливом. При цьому вважається, що співвідношення між частотами збудження та найменшими власними частотами в незбудженому русі таке, що при знаходженні незбудженого напружено-деформівного стану можливо застосовувати квазістатичне наближення та знехтувати переміщеннями в цьому стані. Рівняння динамічної стійкості пружної системи можна отримати з рівняння рівноваги для статичної задачі стійкості додаванням даламберових сил інерції, дисипативних сил, при цьому враховуються деякі складові незбудженого напружено-деформівного стану системи, які можуть залежати від часу.

Таким чином, рівняння динамічної стійкості записується у вигляді

$$\tilde{\mathrm{M}}\ddot{\overline{\upsilon}}(t)+\tilde{\mathrm{C}}\dot{\overline{\upsilon}}(t)+\tilde{\mathrm{K}}\overline{\upsilon}(t)+\alpha\tilde{\mathrm{K}}_{G_1}\overline{\upsilon}(t)+\beta f(t)\tilde{\mathrm{K}}_{G_2}\overline{\upsilon}(t)=0\,, \qquad (1)$$

де $\tilde{\mathrm{M}}$ та $\tilde{\mathrm{K}}$ - інерційний та пружний оператори, $\tilde{\mathrm{K}}_{G_1}$ та $\tilde{\mathrm{K}}_{G_2}$ - складові оператора параметричних сил в рівнянні квазістатичної рівноваги, $\tilde{\mathrm{C}}$ - оператор, що враховує дисипативні сили. Область визначення розв'язків $\upsilon(\overline{x},t)$ рівняння (1) збігається з областю визначення оператора $\tilde{\mathrm{K}}$. Оператори $\tilde{\mathrm{M}}$, $\tilde{\mathrm{K}}$, $\tilde{\mathrm{K}}_{G_1}$ та $\tilde{\mathrm{K}}_{G_2}$ - позитивно визначенні. Рівняння (1) записано для випадку, коли параметричні сили задані з точністю до двох множників, один з яких $\alpha$ характеризує сталу складову зовнішнього впливу, а другий $\beta$ - складову, що змінюється по часу за законом $f(t)$.

Рівняння (1) представляють собою систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, які доповненні відповідними граничними умовами. Незбудженому стану відповідає тривіальний розв'язок рівняння (1). Проблема динамічної стійкості для рівняння (1) формулюється як задача про визначення області значень коефіцієнтів $\alpha$ та $\beta$ і параметрів, що характеризують функцію $f(t)$, при яких тривіальний розв'язок рівняння є нестійким.

При проведенні прикладних розрахунків виконується перехід від операторного рівняння (1) до дискретної динамічної моделі. Для цього частіше застосовується метод скінчених елементів або метод скінчених різниць. Дискретна динамічна модель записується у вигляді звичайних диференціальних рівнянь

$$M\ddot{\bar{u}}(t)+C\dot{\bar{u}}(t)+K\bar{u}(t)+\alpha K_{G_1}\bar{u}(t)+\beta f(t)K_{G_2}\bar{u}(t)=0 \quad , \tag{2}$$

де $\bar{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_n(t))^T$ - вектор вузлових переміщень, $M$, $K$, $K_{G_1}$ та $K_{G_2}$ - позитивно визначені матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, $C$ - матриця демпфірування.

Рівняння (2) формулює задачу динамічної стійкості для систем з кінцевим числом степенів свободи. Це класична задача і в теперішній час існує багато підходів для її розв'язання, коли $f(t)$ є детерміністичною періодичною функцією [1, 2, 3], а коли $f(t)$ є стаціонарний випадковий процес [2, 4, 5]. Однак при розгляданні реальних об'єктів для адекватного описання його пружних властивостей необхідно будувати дискретні моделі (2) великого розміру. Пряме застосування таких моделей пов'язано з великими обчислювальними труднощами. Необхідно виконати редукцію вихідної дискретної моделі, при цьому суттєво враховуються характеристики параметричного впливу.

Для побудови редукованих моделей можна застосувати метод узагальнених координат. Нехай $\bar{v}_1,\bar{v}_2,...,\bar{v}_m$ достатньо представлена система лінійно-незалежних векторів у просторі $E_n$. Нетривіальний розв'язок системи (2) можна апроксимувати виразом

$$\bar{u}(t)=V\bar{y}(t), \tag{3}$$

де матриця $V$ розмірністю $n\times m$ визначається системою базисних векторів $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^m$ :

$$V=(\bar{v}_1,\bar{v}_2,...,\bar{v}_m)\,, \tag{4}$$

$\bar{y}(t)=(y_1(t),y_2(t),...,y_m(t))^T$ - $m$-мірний вектор узагальнених координат. Виходячи з (2) та (3) відносно компонент вектора $\bar{y}(t)$ записується система $m$ звичайних диференціальних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&V^T M V \ddot{\bar{y}}(t) + V^T C V \dot{\bar{y}}(t) + V^T K V \bar{y}(t) + \\
&+ \alpha V^T K_{G_1} V \bar{y}(t) + \beta f(t) V^T K_{G_2} V \bar{y}(t) = 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Система (5) записується у вигляді

$$
M^* \ddot{\bar{y}}(t) + C^* \dot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + \alpha K^*_{G_1} \bar{y}(t) + \beta f(t) K^*_{G_2} \bar{y}(t) = 0 , \tag{6}
$$

де редуковані матриці мас $M^*$, демпфірування $C^*$, жорсткості $K^*$, геометричної жорсткості $K^*_{G_1}$ та $K^*_{G_2}$ розмірністю $m \times m$ представляються відповідно виразами:

$$M^* = V^T M V , \tag{7}$$

$$C^* = V^T C V , \tag{8}$$

$$K^* = V^T K V , \tag{9}$$

$$K^*_{G_1} = V^T K_{G_1} V , \tag{10}$$

$$K^*_{G_2} = V^T K_{G_2} V . \tag{11}$$

При побудові редукованих моделей $m$ береться значно менше за $n$ $(m << n)$, так що і для складних об'єктів дослідження динамічної стійкості може бути виконано. Однак, завжди залишається принциповим питання про адекватність моделі (6). Це питання вирішується з одного боку дослідженням внутрішньої збіжності результатів при збільшенні $m$, а з другого боку, застосуванням при редукції для порівняння інших базисних векторів.

В даній роботі розглядаються питання формування редукованих моделей виду (6) за допомогою сучасних обчислювальних комплексів. При цьому головні обчислювальні проблеми пов'язані з визначенням редукованих матриць (7)-(11). Для цього треба вміти обчислювальними процедурами відповідного обчислювального комплексу формувати матриці $MV, CV, KV, K_{G_1}V, K_{G_2}V$ , $j-$ті стовпці яких представляють собою відповідно вектори $M\bar{v}_j, C\bar{v}_j, K\bar{v}_j, K_{G_1}\bar{v}_j, K_{G_2}\bar{v}_j$ , де $(j = 1,2,...,m)$. Однак в стандартних обчислювальних комплексах обчислювальних процедур для визначення всіх цих векторів, як правило, нема. Є процедура для визначення реакції системи на задане поле переміщень $\bar{v}$, тобто для обчислення вектора $K\bar{v}$, де $K$ - матриця жорсткості задачі, яка розглядається. Застосовуючи цю процедуру можна визначити вектори $M\bar{v}, K_{G_1}\bar{v}, K_{G_2}\bar{v}$ , а при деяких умовах структуру матриці $C$ та вектора

$C\bar{v}$. Для цього крім вказаної вище процедури використовуються процедури аналізу вільних коливань та процедури розв'язання задачі стійкості.

Спочатку представляється алгоритм обчислення для будь-якого поля переміщень $\bar{v}$ вектора $M\bar{v}$.

Для розглядуваної системи формулюється задача про визначення частот та форм власних коливань

$$(K-\omega^2 M)\bar{\varphi} = 0. \tag{12}$$

Нехай $\omega_k$ $(k=1,2,...,m_1)$ - вектор частот власних коливань дискретної моделі, $\bar{\varphi}_k = (\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, ..., \varphi_{nk})^T (k=1,2,...,m_1)$ - система власних форм коливань. Система векторів $\{\bar{\varphi}_k\}$ $(k=1,2,...,m_1)$ ортогональна, тобто

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_j^T M\bar{\varphi}_i &= 0, \\ \bar{\varphi}_j^T K\bar{\varphi}_i &= 0. \end{aligned} \qquad (i \neq j)$$

За допомогою підмножини власних форм коливань $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$ можливо наближено представити поле переміщень $\bar{v}$ у вигляді

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i \bar{\varphi}_i. \tag{13}$$

В силу ортогональності векторів $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$

$$a_i = \frac{\bar{\varphi}_i^T K\bar{v}}{\bar{\varphi}_i^T K\bar{\varphi}_i}. \tag{14}$$

Внаслідок (12)

$$M\bar{\varphi}_i = \frac{1}{\omega_i^2} K\bar{\varphi}_i. \tag{15}$$

Тоді враховуючи (14) можна записати

$$M\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i M\bar{\varphi}_i \cong \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{\omega_i^2} K\bar{\varphi}_i. \tag{16}$$

Таким чином, виходячи із процедури обчислення $K\bar{\varphi}_i$ $(i=1,2,...,m_1)$, можна підрахувати вектор $M\bar{v}$.

Аналогічно будується алгоритм обчислення векторів $K_{G_1}\bar{v}$ та $K_{G_2}\bar{v}$ тільки замість процедури аналізу власних коливань застосовується процедура розв'язку задачі статичної стійкості. Спочатку розглядається алгоритм обчислення вектора $K_{G_1}\bar{v}$. Для системи формулюється задача стійкості

$$(K+\lambda K_{G_1})\bar{\psi}=0. \qquad (17)$$

Нехай $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m_2}$ - сукупність критичних значень задачі (17), $\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_2,...,\bar{\psi}_{m_2}$ - відповідні форми втрати стійкості. Внаслідок виконаних вище припущень відносно властивостей матриць $K$ та $K_{G_1}$ ці вектори ортогональні в метриці, що визначається матрицею $K_{G_1}$, і відповідно матрицею $K$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_j^{\,T}K_{G_1}\bar{\psi}_i&=0,\\ \bar{\psi}_j^{\,T}K\bar{\psi}_i&=0.\end{aligned}\qquad (i\neq j)\,. \qquad (18)$$

За допомогою підмножини форм втрати стійкості $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$ наближено поле переміщень $\bar{v}$ представляється у вигляді

$$\bar{v}\cong\sum_{i=1}^{m_2}b_i\bar{\psi}_i. \qquad (19)$$

Аналогічно (16) можна записати, що вектор

$$K_{G_1}\bar{v}\cong\sum_{i=1}^{m_2}-\frac{b_i}{\lambda_i}K\bar{\psi}_i\,, \qquad (20)$$

де

$$b_i=\frac{\bar{\psi}_i^{\,T}K\bar{v}}{\bar{\psi}_i^{\,T}K\bar{\psi}_i}. \qquad (21)$$

Таким чином задача визначення вектора $K_{G_1}\bar{v}$ вирішена.

Так само визначається вектор $K_{G_2}\bar{v}$. Розглядається задача стійкості

$$(K+\mu K_{G_2})\bar{\chi}=0\,. \qquad (22)$$

Нехай $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{m_3}$ - сукупність критичних значень задачі (22), $\overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2, ..., \overline{\chi}_{m_3}$ - відповідні ортогональні в метриці матриці жорсткості форми втрати стійкості.

Сукупність векторів $\{\overline{\chi}_i\}_{i=1}^{m_3}$ є базисом в просторі $E_n$, який задовольняє умовам

$$\begin{aligned} \overline{\chi}_j^{\,T} K_{G_2} \overline{\chi}_i &= 0, \\ \overline{\chi}_j^{\,T} K \overline{\chi}_i &= 0. \end{aligned} \qquad (i \neq j)\,. \tag{23}$$

За допомогою підмножини векторів $\overline{\chi}_i$ $(i = 1,2,...,m_3)$ аналогічно (13) поле переміщень $\overline{v}$ можна наближено представити у вигляді

$$\overline{v} \cong \sum_{i=1}^{m_3} c_i \overline{\chi}_i\,, \tag{24}$$

де

$$c_i = \frac{\overline{\chi}_i^T K \overline{v}}{\overline{\chi}_i^T K \overline{\chi}_i}. \tag{25}$$

Аналогічно (20) вектор $K_{G_2}\overline{v}$ можна наближено представити у вигляді

$$K_{G_2}\overline{v} \cong \sum_{i=1}^{m_3} c_i K_{G_2} \overline{\chi}_i \cong \sum_{i=1}^{m_3} -\frac{c_i}{\mu_i} K \overline{\chi}_i. \tag{26}$$

Таким чином для довільного поля переміщень $\overline{v}$ побудовані алгоритми апроксимації векторів $M\overline{v}, K_{G_1}\overline{v}$ та $K_{G_2}\overline{v}$ за допомогою процедури обчислення реакції $K\overline{v}$ та процедури розв’язку відповідних узагальнених задач на власні значення.

Для визначення вектора $C\overline{v}$ необхідно зробити додаткові припущення про структуру матриці демпфірування $C$.

Далі розглядається матриця демпфірування $C$, яка представлена у формі Релея:

$$C = d_0 M + d_1 K\,, \tag{27}$$

де $d_0$ та $d_1$ - довільні коефіцієнти пропорційності. В силу (16)

$$C\overline{v} \cong d_0 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{\omega_i^2} K \overline{\varphi}_i + d_1 K \overline{v}. \tag{28}$$

Тепер, коли для довільного поля переміщень $\bar{v}$ сформульовані обчислювальні процедури для апроксимації векторів $M\bar{v}, C\bar{v}, K_{G_1}\bar{v}$ та $K_{G_2}\bar{v}$ можна перейти до побудови розрахункової динамічної моделі (6). Виходячи з представлень (16), (20), (26) та (28), можна записати представлення для матриць $MV, CV, KV, K_{G_1}V, K_{G_2}V$ , що входять до формул (7), (8), (10), (11), та підрахувати апроксимації редукованих матриць мас $M^*$, демпфірування $C^*$, жорсткості $K^*$, геометричної жорсткості $K^*_{G_1}$ та $K^*_{G_2}$ .

Приймається, що підмножина векторів $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$ , $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$ та $\{\bar{\chi}_i\}_{i=1}^{m_3}$ мають однакову розмірність $m$, тобто $m_1 = m_2 = m_3 = m$ . Використовуючи (16), (20), (26), (28) та в силу (14), (21), (25) , можна записати

$$MV = K\Phi\Omega^{-1}\Phi^T KV, \tag{29}$$

$$CV = d_0 K\Phi\Omega^{-1}\Phi^T KV + d_1 KV, \tag{30}$$

$$K_{G_1}V = K\Psi\Lambda^{-1}\Psi^T KV, \tag{31}$$

$$K_{G_2}V = KX\Theta^{-1}X^T KV. \tag{32}$$

де матриці $\Phi, \Psi$ та $X$ розмірністю $n \times m$ визначаються співвідношеннями

$$\Phi = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, ..., \bar{\varphi}_m), \tag{33}$$

$$\Psi = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, ..., \bar{\psi}_m), \tag{34}$$

$$X = (\bar{\chi}_1, \chi_2, ..., \bar{\chi}_m), \tag{35}$$

а діагональні матриці $\Omega^{-1}, \Lambda^{-1}, \Theta^{-1}$ - співвідношеннями

$$\Omega^{-1} = diag(\frac{1}{\omega_1^2}, \frac{1}{\omega_2^2}, ..., \frac{1}{\omega_m^2}), \tag{36}$$

$$\Lambda^{-1} = diag(-\frac{1}{\lambda_1}, -\frac{1}{\lambda_2}, ..., -\frac{1}{\lambda_m}), \tag{37}$$

$$\Theta^{-1} = diag(-\frac{1}{\mu_1}, -\frac{1}{\mu_2}, ..., -\frac{1}{\mu_m}). \tag{38}$$

Редуковані матриці мас $M^*$, демпфірування $C^*$, жорсткості $K^*$, геометричної жорсткості $K^*_{G_1}$ та $K^*_{G_2}$ обчислюються за формулами

$$M^* = V^T K \Phi \Omega^{-1} \Phi^T K V, \tag{39}$$

$$CV = d_0 V^T K \Phi \Omega^{-1} \Phi^T K V + d_1 V^T K V = d_0 M^* + d_1 K^*, \tag{40}$$

$$K^*_{G_1} = V^T K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T K V, \tag{41}$$

$$K^*_{G_2} = V^T K X \Theta^{-1} X^T K V. \tag{42}$$

Таким чином, співвідношення (9), (39)-(42) дозволяють визначити усі коефіцієнти редукованої моделі (6).

У роботі розглядаються задачі редукування рівнянь параметричних коливань балки з різними граничними умовами та пологої арки від дії відповідних навантажень. Побудова редукованих моделей відбувається за допомогою обчислювального програмного комплексу NASTRAN на основі пре/постпроцесора FEMAP, що є один із найбільш вдалих засобів підготовки даних та обробки результатів скінченноелементного аналізу конструкцій в середовищі Windows [6]. FEMAP дозволяє записувати інформацію про вхідні дані і результати розрахунку в своєму текстовому нейтральному файлі, де вони зберігаються в компактному вигляді в форматі бінарного файла. Формат нейтрального файла дозволяє застосовувати користувачам свої інтерфейси для стикування з FEMAP.

Побудова редукованих моделей виконується аналогічно алгоритму, який наведений у роботі. Формується модель конструкції. Задаються її геометричні та механічні характеристики. Спочатку виконується розрахунок конструкції на вільні коливання. В результаті отримуються частоти та форми власних коливань, які записуються в нейтральний файл, де вони зберігаються в окремому блоці. Далі вводяться жорсткі в'язі, що перешкоджають переміщенням в усіх вузлах, та задаються переміщення вузлів, які відповідають формам власних коливань. Для кожної форми $\overline{\varphi}_i$ виконується статичний розрахунок конструкції і визначається відповідна реакція $K\overline{\varphi}_i$. Ці дані також записуються в нейтральний файл в окремий блок. Далі виконується розрахунок на стійкість від дії відповідного навантаження. В результаті отримуються критичні значення навантаження та форми втрати стійкості, які записуються у нейтральний файл. Далі формується блок навантажень на всі вузли конструкції, значення яких є формами втрати стійкості, та також вводяться жорсткі в'язі, які б перешкоджали переміщенням в усіх вузлах конструкції. Для кожної форми $\overline{\psi}_i$ виконується статичний розрахунок конструкції і визначається відповідна реакція $K\overline{\psi}_i$.

Редуковані матриці мас $M^*$, демпфірування $C^*$, жорсткості $K^*$, геометричної жорсткості $K^*_{G_1}$ та $K^*_{G_2}$ обчислюються за формулами (9),(39)-(42) за допомогою інформації, яка зберігається в нейтральному файлі пре/постпроцесора FEMAP.

Далі наводяться результати побудови редукованої моделі параметричних коливань балки з різними граничними умовами від дії повздовжньої сили. Конструкція балки та її скінченноелементна модель представлена на рисунках 1а, 2а та 1б, 2б відповідно.

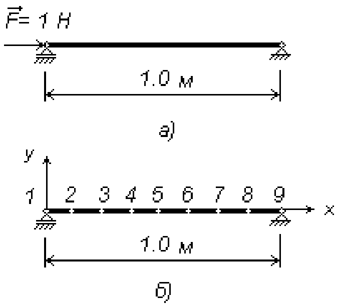

Рис. 1

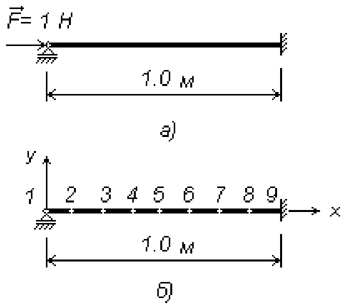

Рис. 2

Геометричні та механічні характеристики балки приймалися такими: $F = 0.0005\,\text{м}^2$, $I_z = 1.0416\,\text{E-07}\,\text{м}^4$, $I_y = 4.1666\,\text{E-09}\text{м}^4$, $J = 1.4609\,\text{E-08}\,\text{м}^4$, $E = 2.06\,\text{E11}$ Па, $G = 0.762\,\text{E11}$ Па, $\eta = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м$^3$.

Для двох балок виконані розрахунки на вільні коливання. Отримані три перші частоти коливань $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ і відповідні форми власних коливань $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_3$. Для кожної форми виконаний статичний розрахунок конструкції і визначена відповідна реакція $K\overline{\varphi}_1, K\overline{\varphi}_2, K\overline{\varphi}_3$. Матриця власних форм нормована по матриці мас, тобто $\overline{\varphi}_i^{\,T} M \overline{\varphi}_i = E,$ де $E = diag(1,1,1).$ Тому після обчислення редукована матриця жорсткості отримана у вигляді діагональної матриці $K^* = diag(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2).$ Далі виконані розрахунки на стійкість від повздовжньої сили $F = 1\,\text{Н}$ (рис. 1, 2). Отримані критичні значення навантаження $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ і відповідні форми втрати стійкості $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \overline{\psi}_3$. Для кожної форми виконаний статичний розрахунок конструкції і визначена відповідна реакція

$K\overline{\psi}_1, K\overline{\psi}_2, K\overline{\psi}_3$. Після обчислення редукована матриця геометричної жорсткості $K^*_{G_1}$ отримана у вигляді діагональної матриці $K^*_{G_1} = diag(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$. Для балки, що представлена на рис. 1, результати чисельних розрахунку порівнювались з аналітичними.

Частоти власних коливань обчислювались за формулою

$$\omega_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2}\left(\frac{EI_y}{\rho F}\right)^{1/2}, \ (k = 1, 2, 3).$$

Критичні значення навантаження визначалися таким чином

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2 EI_y}{l^2}, \ (k = 1, 2, 3).$$

Результати розрахунків наведені в таблиці 1.

Також в роботі побудована редукована модель параметричних коливань пологої арки від дії зовнішнього розподіленного тиску (рис. 3).

Геометричні та механічні характеристики арки приймалися такими: $F = 0.0005\,\text{м}^2$, $\beta$=π/5 рад, $R$=0,2 м, q=1 Н/м$^2$, $I_z = 4.1666\,\text{E-09}\,\text{м}^4$, $I_y = 1.0416\,\text{E-07}\,\text{м}^4$, $J = 1.4609\,\text{E-08}\,м^4$, $E = 2.06\,\text{E11}$ Па, $G = 0.762\,\text{E11}$ Па, $\eta = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м$^3$.

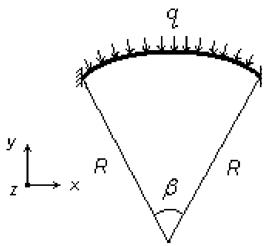

Рис. 3

Розрахунок виконаний згідно наведеному вище алгоритму. Результати розрахунку представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

| Конструкції | | Частоти власних коливань, Гц | | | Критичні навантаження, Н | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
| Балка (рис.1) | NASTRAN | 22.958 | 91.772 | 114.458 | 8223.552 | 32886.14 | 74055.86 |
| | Аналіт. | 22.859 | 91.507 | 114.856 | 8288.745 | 33154.98 | 74598.71 |
| Балка (рис. 2) | | 35.857 | 116.068 | 177.814 | 16819.88 | 49719.26 | 99241.70 |
| Арка | | 4880.06 | 5143.40 | 9454.49 | 5790367. | 6015280. | 6334961. |

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956 -600 с.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972 - 718 с.
3. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978-Т. 1. Колебания линейных систем /Под ред. В.В. Болотина. 1978. 352 с., ил.
4. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. - М.: Наука, 1979 - 336 с.
5. *Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Отрашевська В.В.* Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні.//Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2003. -№72.- с.51-59.
6. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

*Матеріал надійшов до редакції 19.04.04.*