

УДК 539.3

С.О. Пискунов, д-р. техн. наук,
 І.І. Солодей, д-р. техн. наук,
 Ю.В. Максим'юк, канд. техн. наук,
 А.Д. Солоденко

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МССЕ) ПРИ ЛІНІЙНИХ РОЗРАХУНКАХ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН

На основі МССЕ створений оболонковий СЕ з використанням співвідношень вісесиметричної задачі теорії пружності, яка дозволяє проводити аналіз напружено-деформованого стану вісесиметричних оболонок. Проведені чисельні дослідження для обґрунтування достовірності отриманих результатів при використанні по товщині оболонки одного СЕ, а також показано що його ефективність не поступається оболонковим СЕ.

Вступ. Проблема використання СЕ, що базуються на співвідношеннях теорії пружності для розрахунку тонкостінних об'єктів знайшла відображення в багатьох публікаціях, детальний огляд яких міститься в монографії [2]. Його аналіз свідчить, що найбільш актуальним напрямком є розробка СЕ, які дозволяли б розраховувати з позицій теорії пружності тонкостінні об'єкти, не поступаючись по ефективності оболонковим елементам. В роботі [4] наведені основні засади концепції такого елемента. В даній роботі основна увага спрямована на їх конкретизацію для розрахунку вісесиметричних оболонок і пластин і обґрунтуванню достовірності та ефективності отриманих результатів.

1. Основні співвідношення вісесиметричної задачі теорії пружності для розрахунку оболонок і пластин. Розглянемо в базисній круговій циліндричній системі координат $Z^{\alpha'} (\alpha=1,2)$

вісесиметричну оболонку напружено деформований стан якої описується в місцевій криволінійній системі координат $x_{\alpha\beta}$ органічно пов'язаною з геометрією оболонки (рис. 1).

Будемо вважати, що в кожній точці меридіонального перетину зв'язок між базисною і місцевою системою координат однозначно визначається тензором перетворень,

$$\text{де } z'_{,\beta} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x_{\beta}}.$$

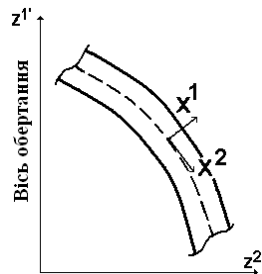


Рис. 1

Зв'язок між переміщеннями u^{γ} в базисній системі координат і компонентами тензора деформацій $\epsilon_{\alpha\beta}$ і ϵ_{33} визначаються відомими співвідношеннями Коші:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'}), \quad \epsilon_{33} = z^{2'} u^{2'}. \quad (1)$$

Зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl}^e, \quad (2)$$

де C^{ijkl} - тензор пружних констант.

Відповідно до статичних гіпотез теорії оболонок напруження обтіснення по товщині оболонок повинне дорівнювати 0.

$$\sigma_{11} = 0. \quad (3)$$

Виходячи з цього визначаються компоненти тензора пружних констант $C^{11\alpha\beta}$ і C^{1133} на основі їх корекції:

$$\sigma^{11} = C^{1111} \epsilon_{11} + C^{1112} \epsilon_{12} + C^{1122} \epsilon_{22} + C^{1133} \epsilon_{33} = 0, \quad (4)$$

звідки визначимо ϵ_{11} :

$$\epsilon_{11} = -\epsilon_{12} \frac{C^{1112}}{C^{1111}} - \epsilon_{22} \frac{C^{1122}}{C^{1111}} - \epsilon_{33} \frac{C^{1133}}{C^{1111}} = 0. \quad (5)$$

Виразимо деяку компоненту тензора напружень, наприклад σ^{22} через деформації з урахуванням виразу (5):

$$\sigma^{22} = C^{2211} \left(-\epsilon_{12} \frac{C^{1112}}{C^{1111}} - \epsilon_{22} \frac{C^{1122}}{C^{1111}} - \epsilon_{33} \frac{C^{1133}}{C^{1111}} \right) + C^{2212} \epsilon_{12} + C^{2222} \epsilon_{22} + C^{2233} \epsilon_{33}.$$

Зведемо подібні:

$$\begin{aligned} \sigma^{22} = & \left(C^{2212} - \frac{C^{2211} C^{1112}}{C^{1111}} \right) \epsilon_{12} + \left(C^{2222} - \frac{C^{2211} C^{1122}}{C^{1111}} \right) \epsilon_{22} + \\ & + \left(C^{2233} + \frac{C^{2211} C^{1133}}{C^{1111}} \right) \epsilon_{33}. \end{aligned} \quad (6)$$

У загальному вигляді при наявності умови (3) закон Гука можна записати:

$$\sigma^{ij} = D^{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (7)$$

$$\text{де } D^{ijkl} = C^{ijkl} - \bar{C}^{ijkl}, \quad \bar{C}^{ijkl} = \frac{C^{ij11} C^{11kl}}{C^{1111}}.$$

2. Оболонковий скінчений елемент загального типу. Розглянемо скінченні елементи загального вигляду. На характер розподілення механічних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу СЕ

ніяких обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування (рис. 2).

Апроксимуємо функції переміщень у межах елемента за допомогою поліномів Лагранжа:

$$u^{\alpha'} = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n u_{(pq)}^{\alpha'} \Phi_{(pq)},$$

де

$$\Phi_{(pq)} = R_{1(p)}^{(m)} R_{2(q)}^{(n)},$$

$$R_{1(p)}^{(m)} = \frac{\prod_{l=1}^m (x^1 - x_{(l)}^1)}{(x^1 - x_{(p)}^1) \prod_{r=1}^m (x_{(p)}^1 - x_{(r)}^1 - \delta_{(p)}^{(r)})} R_{2(q)}^{(n)}. \quad (8)$$

Наближені значення фізичних компонентів тензора деформацій представимо відрізком ряду Маклорена:

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = \sum_{s=0}^{M_{\alpha\beta}} \sum_{t=0}^{N_{\alpha\beta} \circ (st)} \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} \varphi^{(st)}, \quad \tilde{\epsilon}_{33} = \sum_{s=0}^{M_{33}} \sum_{t=0}^{N_{33} \circ (st)} \tilde{\epsilon}_{33} \varphi^{(st)}.$$

де

$$\varphi^{(st)} = \frac{(x^1)^s (x^2)^t}{S! t!}$$

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}^{(st)} = \frac{\partial^{(s+t)} \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}}{(\partial x^1)^s (\partial x^2)^t} \Big|_{x^i=0}, \quad \tilde{\epsilon}_{33}^{(st)} = \frac{\partial^{(s+t)} \tilde{\epsilon}_{33}}{(\partial x^1)^s (\partial x^2)^t} \Big|_{x^i=0}.$$

Згідно положень моментної схеми скінченних елементів [11] величини $M_{\alpha\beta}$, M_{33} , $N_{\alpha\beta}$ і N_{33} знаходяться в строгій відповідності з індексами m , n і α , β :

$$M_{11} = M_{12} = M_{21} = m-1, \quad M_{22} = M_{33} = m, \\ N_{11} = N_{12} = N_{21} = n-1, \quad N_{22} = N_{33} = n. \quad (8)$$

Обмежимося білінійним розподілом переміщень у межах елемента.

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (9)$$

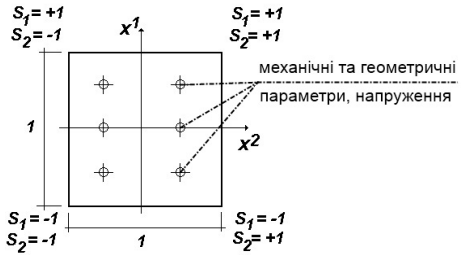


Рис. 2

де $u_{m'(S_1S_2)}$ – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат x^i .

У цьому випадку $m=n=1$, $M_{\alpha\beta}$, M_{33} , $N_{\alpha\beta}$ і N_{33} приймають наступні значення:

$$\begin{aligned} M_{11}=M_{12}=M_{21}=0, \quad M_{22}=M_{33}=1, \\ N_{11}=N_{12}=N_{21}=0, \quad N_{22}=N_{33}=1. \end{aligned}$$

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [11] компоненти тензора деформацій скінченного елемента подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{12} = \overset{\circ}{\epsilon}_{12}, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{33} = \overset{\circ}{\epsilon}_{33} + \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\beta} x^\beta, \quad (10)$$

де

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{ij} = \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \overset{\circ}{\epsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0} \quad (\beta \neq i).$$

Переміщення та їх похідні в центрах елементів дорівнюють:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{u}_{\alpha'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{\alpha'(S_1S_2)}; \\ \overset{\circ}{u}_{\beta',\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{\beta'(S_1S_2)} S_{\alpha}; \quad \overset{\circ}{u}_{\beta',12} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{\beta'(S_1S_2)} S_1 S_2; \end{aligned} \quad (11)$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій з врахуванням прийнятого закону розподілення переміщень:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{(S_1S_2)}^{\nu'} \left(S_{\alpha} z^{\nu'}_{,\beta} + S_{\beta} z^{\nu'}_{,\alpha} \right) \right], \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[z^{\nu'} z^{\nu'} u_{2'(S_1S_2)} \right], \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{(S_1S_2)}^{\nu'} \left(2 S_1 S_2 z^{\nu'}_{,\alpha} + S_{\alpha} z^{\nu'}_{,12} \right) \right], \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[\frac{z^{\nu'} z^{\nu'}}{2} u_{2'(S_1S_2)} + z^{\nu'} z^{\nu'} u_{2'(S_1S_2)} S_{\alpha} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

Напруження в межах елемента визначимо співвідношенням:

$$\sigma^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha}_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \sigma^{12} = \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \quad \sigma^{33} = \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha}, \quad (13)$$

де

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad \overset{\circ}{\sigma}^{i(i)}_{,\alpha} = \frac{\partial \sigma^{i(i)}}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\alpha}=0} \quad (\alpha \neq i)$$

напруження і їх похідні в центрі елемента.

Точність представлення напружень визначається нульовими членами розкладання в ряд Маклорена, тому що лінійні члени деформацій не містять усіх компонентів розкладання. Розглянемо вплив різних лінійних членів при розкладі напружень у ряд Маклорена.

Компоненти $\overset{\circ}{\sigma}^{i(i)}_{,\alpha} (\alpha \neq i)$ відображують згинні напруження та їх впливом на точність розв'язку нехтувати не можна, а особливо для оболонок і пластин.

Члени ряду типу $\overset{\circ}{\sigma}^{12}_{,\alpha}$ визначають зміну напружень зсуву. Їх внесок в енергію деформації елемента незначний, тому цими членами можна нехтувати.

Опис процесу деформування вісесиметричних оболонок здійснюється відповідно до варіаційного принципу Лагранжа. Рівняння рівноваги системи, що складається з N СЕ, які апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (14)$$

В місцевій системі координат варіацію енергії деформації СЕ записується через компоненти тензорів напружень і деформацій:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \sigma^{ij} \delta \epsilon \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (15)$$

Перепишемо вираз (15) у матричному вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2, \quad (16)$$

де

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad 2\epsilon_{12} \quad \epsilon_{33}\}, \quad \{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \quad \sigma^{22} \quad \sigma^{12} \quad \sigma^{33}\}.$$

Зв'язок між деформаціями і коефіцієнтами розкладу переміщень представимо у вигляді:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}, \quad (17)$$

де

$$\{u\}^T = \left[\{u\}_{(-1;-1)}^{1'} \{u\}_{(-1;-1)}^{2'} \{u\}_{(1;-1)}^{1'} \{u\}_{(1;-1)}^{2'} \{u\}_{(-1;1)}^{1'} \{u\}_{(-1;1)}^{2'} \{u\}_{(1;1)}^{1'} \{u\}_{(1;1)}^{2'} \right].$$

Для зручності представлення розділимо матрицю $[B]$ на блоки:

$$[B] = \left[[B]^{(-1;-1)} [B]^{(+1;-1)} [B]^{(-1;+1)} [B]^{(+1;+1)} \right]. \quad (18)$$

Елементи підматриць $[B]^{(s_1, s_2)}$ обчислюються відповідно до формул (4).

$$[B]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} z_{,1}^{1'} S_1 + \left(z_{,12}^{1'} S_1 + 2z_{,1}^{1'} S_2 \right) x^2 & \frac{1}{2} z_{,1}^{2'} S_1 + \left(z_{,12}^{2'} S_1 + 2z_{,1}^{2'} S_2 \right) x^2 \\ \frac{1}{4} \left(z_{,1}^{1'} S_2 + z_{,2}^{1'} S_1 \right) & \frac{1}{4} \left(z_{,1}^{2'} S_2 + z_{,2}^{2'} S_1 \right) \\ \frac{1}{2} z_{,2}^{1'} S_2 + \left(z_{,12}^{1'} S_2 + 2z_{,2}^{1'} S_1 S_2 \right) x^1 & \frac{1}{2} z_{,2}^{2'} S_2 + \left(z_{,12}^{2'} S_2 + 2z_{,2}^{2'} S_1 S_2 \right) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} z_{,2}^{2'} + \frac{1}{2} \left(\frac{z_{,2}^{\alpha}}{2} u_{2'(s_1, s_2)} + z_{,2}^{2'} u_{2'(s_1, s_2)} S_{\alpha} \right) x^{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Підставляючи (18) в (16), запишемо варіацію енергії деформації елемента через переміщення $\{u\}$ та вузлові реакції $\{r_{\sigma}\}$:

$$\delta W = \delta \{u\}^T \{r_{\sigma}\}, \quad (19)$$

де

$$\{r_{\sigma}\} = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} [B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (20)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримаємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента загального вигляду із змінними механічними та геометричними параметрами:

$$\{r_{\sigma}\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[[B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}, \quad (21)$$

де I, J - кількість точок інтегрування по x^1, x^2 відповідно, H_i, H_j - вагові функції, x_i^1, x_j^2 - координати точок інтегрування.

Для виводу матриці жорсткості скінченного елемента представимо зв'язок між напружень і деформацій у вигляді:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (22)$$

де

$$[D] = \begin{bmatrix} D^{1111} & D^{1112} & D^{1122} & D^{1133} \\ D^{1211} & D^{1212} & D^{1222} & D^{1233} \\ D^{2211} & D^{2212} & D^{2222} & D^{2233} \\ D^{3311} & D^{3312} & D^{3322} & D^{3333} \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці $[D]$ визначаються згідно формул (4).

Варіація енергії деформації можна записати як:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \delta\{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (23)$$

Подаючи деформації через коефіцієнти розкладу переміщень, отримаємо:

$$\delta W = \delta\{u\}^T [k] \{u\}, \quad (24)$$

де $[k]$ - матриця жорсткості:

$$[k] = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} [B]^T [D] [B] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (25)$$

Використовуючи формулу чисельного інтегрування:

$$[k] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[[B]^T [D] [B] \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}. \quad (26)$$

де I, J - кількість точок інтегрування по x^1, x^2 відповідно, H_i, H_j - вагові функції, x_i^1, x_j^2 - координати точок інтегрування.

3. Обґрунтування достовірності результатів.

Результати дослідження швидкості збіжності МССЕ при розрахунках тонких круглих пластин представлені на рис. 3,а й 3,б. Залежно від граничних умов, навантаження й конфігурації розглянуто шість розрахункових схем (рис. 3,а).

1. Вільно оберта пластина під дією рівномірного навантаження.
2. Жорстко затиснена пластина під дією рівномірного навантаження.
3. Вільно оберта пластина під дією зосередженої сили.
4. Жорстко затиснена пластина під дією зосередженої сили.
5. Жорстко затиснена кільцева пластина під дією рівномірного навантаження.
6. Жорстко затиснена кільцева пластина змінної товщини під дією рівномірного навантаження.

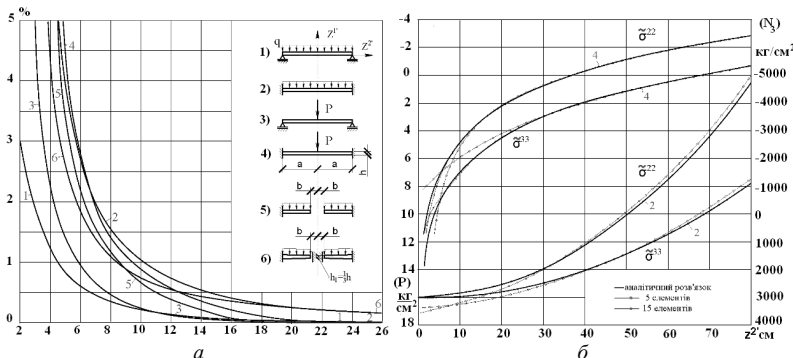


Рис. 3

Перші чотири розрахункові схеми реалізовані для пластини товщиною $h = 1 \text{ см}$ і радіусом $a = 80 \text{ см}$. Коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,25$. Схеми №5 відповідає пластина товщиною $h = 1 \text{ см}$, радіусом $a = 60 \text{ см}$ і радіусом отвору $b = 20 \text{ см}$, $\nu = 0,3$. У розрахунковій схемі №6 радіус пластини прийнятий $a=60 \text{ см}$, отвору $b=20 \text{ см}$, а товщина зменшується за лінійним законом уздовж радіуса до центру пластини від $h = 1 \text{ см}$ до $h=1/3 \text{ см}$, $\nu=1/3$. Зосереджена сила прийнята рівною $P = 2\pi \text{ кг}$; рівномірне навантаження інтенсивністю $q = 1 \text{ кг/см}^2$.

На рис. 3,а зображені графіки, що характеризують збіжність максимального переміщення в центрі пластини ($Z^2=0$). Уздовж осі ординат відкладений відсоток похибки розв'язку, отриманого методом кінцевого елемента, уздовж осі абсцис - кількість СЕ в радіальному напрямку з урахуванням осі симетрії й рівномірного розподілу. По товщині пластини прийнято один елемент. Відсоток похибки визначений щодо аналітичного розв'язку для тонких круглих пластин [12]. Цифри, якими позначені криві, відповідають номеру розрахункової схеми.

На рис. 3,б представлені епюри напружень на нижній поверхні жорстко затисненої пластини під дією рівномірного навантаження (розрахункова схема №2) і зосередженої сили (розрахункова схема №4). Суцільна лінія відображає аналітичний розв'язок [12], пунктирна й штрихпунктирна - розв'язки, отримані за МССЕ відповідно при п'ятих і п'ятнадцятих кінцевих елементах. Значення напружень, визначені методом кінцевого елемента, позначені на епюрах ромбиками й кружками.

Результати дослідження збіжності МССЕ при розрахунках оболонок обертання представлені на рис. 5-6. Розглянуто три типи оболонок.

1. Сферичний затиснений по контуру купол під дією рівномірного нормального навантаження.

2. Розсічений уздовж утворюючої нескінченний циліндр, один край у якого затиснений, а до іншого прикладене рівномірно розподілене навантаження.

3. Торосферична посудина під дією внутрішнього тиску, що складається з елементів сфери, тора й циліндра.

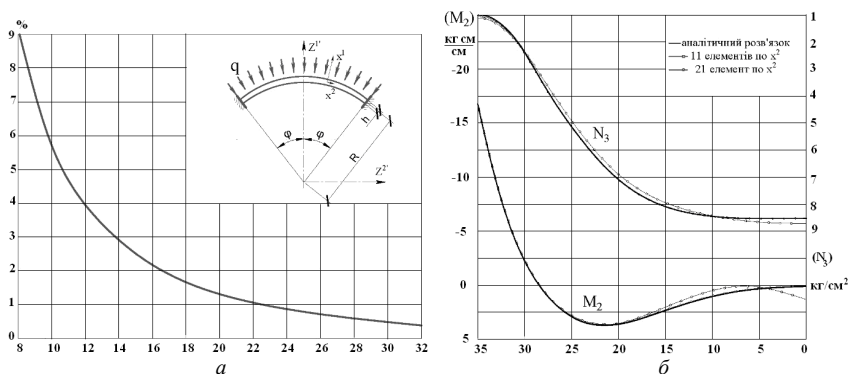


Рис. 4

По товщині оболонок прийнято один елемент. Вісь X^1 місцевої системи координат збігається за напрямком з нормаллю до серединної поверхні, X^r - дотична до неї.

Радіус серединної поверхні сферичного купола (рис. 4,а) $R=228$ см, товщина $h=7,6$ см, кут розхилу $\varphi=35^\circ$, $\nu=1/6$. Інтенсивність рівномірного нормального навантаження $q=0,07$ кг/см². Результати розрахунку сферичного купола, отримані методом скінченного елемента, дорівнюють розв'язку, який наведений в роботі [12]. На рис. 4,а зображена крива, що характеризує збіжність нормального зсуву в центрі оболонки залежно від числа елементів при рівномірній розбивці меридіана. Епюри мембранних кільцевих зусиль N_3 і меридіальних згинальних моментів M_2 представлені на рис. 4,б.

Суцільні лінії відповідають розв'язку, наведеному в роботі [12], пунктирна й штрихпунктирна - розв'язку, отриманому за МССЕ при 11 і 21 скінченних елементах. Щоб визначити значення згинального моменту якнайближче до затисненого краю купола, в опори застосовувався приграничний елемент розчином $0,1^\circ$. На іншій дузі меридіана зберігалася рівномірна розбивка. Значення напружень, визначені МСЕ, позначені на епюрах ромбиками й кружками.

Радіус серединної поверхні нескінченного розсіченого циліндра (рис. 5) $R=20$ см, товщина $h=1$ см, $\nu=0$. Інтенсивність розподіленої уздовж утворюючої навантаження $P=1$ кг/см.

На рис. 6 зображені графіки збіжності переміщення $u^{1'}$ у точці А ($Z^{1'}=R$, $Z^{2'}=0$) і максимального згинаючого меридіонального моменту в точці В ($Z^{1'}=0$, $Z^{2'}=R$). Результати збіглися з аналітичним розв'язком.

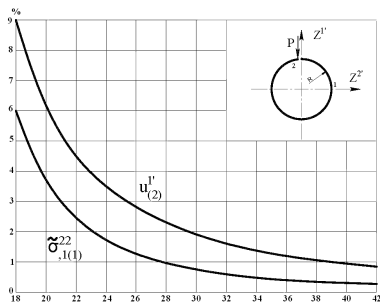


Рис. 5

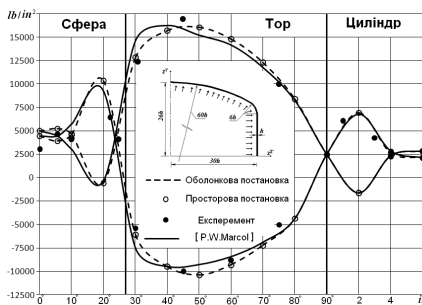


Рис. 6

Розрахункова схема торосферичної посудини представлена на рис. 6. Товщина посудини $h=1/4$ дюйма, $\nu=0,31$, інтенсивність внутрішнього тиску 100 фунтів на один квадратний дюйм, результати розрахунків за МССЕ однакові з розв'язком, отриманим у роботі [7] методом кінцевого елемента на базі теорії тонких оболонок і даними експерименту.

На рис. 6 наведені епюри напружень σ^{22} на зовнішній і внутрішній поверхні торосферичної посудини. Суцільною лінією представлені результати роботи [7], пунктирною й штрихпунктирною - результати, отримані на базі МССЕ при 21 і 42 скінченних елементах. Відношення числа елементів на сферичній, тороїдальній і циліндричній ділянках оболонки становить 4:1:2. Дані експерименту на рисунку позначені кружками.

Аналізуючи збіжність МССЕ в процесі розрахунків оболонок обертання, можна зробити висновок, що для всіх розглянутих об'єктів розв'язок сходиться до еталонного. Зокрема, використання 20 скінченних елементів дозволяє визначити максимальний нормальний зсув у центрі сферичного купола з точністю до 1%. Епюри зусиль і моментів вже при 10 СЕ на більшій частині графіка збігаються із кривими, отриманими на основі класичної теорії оболонок, і дозволяють із точністю до 1,5% визначити максимальні напруження. Найбільші відхилення - в зоні мінімальних (близьких до нуля) величин і в міру згущення сітки до 20 елементів практично відсутні.

Задача про напружено-деформований стан розрахункового нескінченного циліндра характерна особливою чутливістю до врахування зсуву кінцевого елемента як жорсткого цілого. На відміну від розглянутих раніше прикладів збіжність переміщень у цій задачі трохи повільніша, чим по зусиллях. Наприклад, визначення максимального меридіонального

згинального моменту точністю порядку 1% досягається при розчині одного елемента 13° для визначення переміщення в точці прикладання навантаження з тою же точністю необхідний кут розчину 9° .

Порівняння МССЕ з іншими схемами МСЕ підтверджує її високу ефективність і при розрахунках оболонок обертання. Так, точність визначення згинального моменту біля опори сферичного купола в роботі [13] становить 5,1% (8 СЕ уздовж меридіана). При такій же кількості невідомих і ширині стрічки матриці погіршеність розв'язку по МССЕ становить 3%. Особливо помітні переваги МССЕ в порівнянні із просторовими елементами. У монографії [5] для одержання розв'язку розглянутої оболонки використано 24 СЕ третього ступеня. У цьому випадку трудомісткість обчислень у кілька разів перевищує затрати МССЕ. Показово також зіставлення точності розв'язку при тому самому числі просторових СЕ різних типів. Наприклад, у завданні про розсічений нескінченний циліндр використання 30 СЕ (МССЕ) забезпечує точність результатів по переміщеннях не нижче 2%. При даному числі елементів, МЖ яких виведені відповідно до методики роботи [5], лінійний закон розподілу переміщень призводить до похибки порядку 90%, а квадратичний – 40%.

На закінчення зупинимося на результатах розрахунків торосферичної посудини. Геометрія розглянутих раніше конструкцій не відрізняється особливою складністю і їх розв'язок не дозволяє судити про спільний вплив таких факторів як складність форми, зміна відношення товщини оболонки до радіуса кривизни й т.п.

Окремі елементи меридіана торосферичної посудини мають канонічну форму, однак у цілому оболонка має складну геометрію. Її не можна віднести до класу пологих, крім того на тороїдальній ділянці відношення товщини до радіуса кривизни становить 1:8. У цьому випадку застосування класичної теорії оболонок може до деякої міри спотворити реальну картину напружено-деформованого стану, що тим більше небажане, тому що тут розташована зона максимальних напружень.

Досліджуючи напружений стан пластин і оболонок, фізичні компоненти тензора напружень природно визначати в місцевій системі координат X^i , вісь X^i якої спрямована по товщині пластини або оболонки, а X^e - у меридіональному напрямку. При розрахунках пластин напрямки осей місцевої й базисної системи координат збігаються й σ^{22} відповідає радіальним напруженням σ^{33} - кільцевим.

Аналіз наведених результатів дослідження збіжності МССЕ при розрахунках тонких пластин дозволяє зробити наступні висновки:

1. Значення максимального переміщення збігається до аналітичного для різних варіантів граничних умов і навантаження пластин, причому,

починаючи з 5 СЕ, похибка незалежно від розрахункової схеми становить менш 4%.

2. Епюри побудовані при п'ятих елементах, добре передають якісну картину розподілу напружень у радіальному напрямку й на більшій частині графіків близькі до аналітичних (максимальна похибка не перевищує 1%, а при п'ятнадцятих елементах практично з ними збігаються).

Зіставлення ефективності різних модифікацій МСЕ свідчить про те, що збіжність МСЕ не поступається оболонковим варіантам СЕ при розрахунках круглих плит. Так, у роботі [13] наведений розв'язок вільно обпертої пластини під дією рівномірного навантаження, отриманий на основі змішаного оболонкового СЕ. Точність визначення згинального моменту в центрі пластини становить 8%. При тому ж числі невідомих і ширині стрічки матриці розв'язних рівнянь похибка за МСЕ не перевищує 2,5%.

В деяких випадках доцільне застосування нерівномірної апроксимуючої сітки. Наприклад, уведення в зоні прикладання зосередженої сили приграничного елемента рівного двом товщинам, дозволяє одержувати значення максимальних переміщень із точністю не нижче 0,1% уже при трьох СЕ, а похибка напружень у всіх елементах, крім приграничного, не перевищує при цьому 2%. Використання біля опори приграничного елемента рівного $H/5$ дає можливість визначати напруження в зоні защемлення з точністю до 0,15% при трьох СЕ, причому на збіжність переміщень це практично не впливає.

Точність розв'язку залежить не тільки від кількості СЕ, якими апроксимується конструкція, але й від співвідношення розмірів окремого елемента. Значна відмінність товщини елементів від їхньої довжини приводить до погано обумовленої матриці системи розв'язних рівнянь і явищу чисельної нестійкості, що в остаточному підсумку погіршує збіжність. Така проблема може виникнути якщо необхідно здійснити розрахунок досить тонкої пластини, або, якщо з яких-небудь міркувань нетовсту пластину доводиться розглядати з позицій теорії пружності. У цьому випадку важливо знати граничне відношення розмірів елемента, що працює на згин. Чисельні експерименти показали, що при відношенні товщини елемента до його довжини $\varphi=15$ явище чисельної нестійкості на точність розв'язку не позначається, при $\varphi=20$ похибка не перевищує 0,3%, а при $\varphi=30 - 1,3\%$.

Зі збільшенням відносної товщини пластин рівняння класичної теорії приводять до спотворення реальної картини напружено-деформованого стану конструкції. Тому для розрахунків нетонких пластин знаходять широкі застосування різні уточнені теорії, що враховують обтиск й поперечний зсув. Рівняння МСЕ у випадку апроксимації пластини одним елементом по товщині за своїм характером близькі до рівнянь уточнених те-

орій. У табл. 3.1 наведені значення безрозмірних прогинів, у центрі вільно обпертої рівномірно навантаженої круглої пластини, визначені за допомогою МССЕ й на основі застосування різних уточнених теорій [3].

Таблиця 1

	[1, 14]	[6]	[9, 10]	[8]	МССЕ
$H/a=1/5$	1,0345	1,0362	1,0368	1,0361	1,0346
$H/a=1/3$	1,0958	1,1005	1,1030	1,1004	1,0952

Підрахунки зроблені для відносних товщин $h/a=1/5$ і $h/a=1/3$. В основному, усі уточнені теорії й МССЕ дають близькі результати. У даній задачі найбільш повний збіг відзначається між МССЕ й теоріями [1, 14]. На основі проведеного порівняння можна зробити висновок про те, що МССЕ при використанні одного елемента по товщині дозволяє отримати результати, що наближаються до розв'язків, визначених по теорії нетонких оболонок.

З метою визначення меж застосовності подібної апроксимації були вирішені задачі згину вільно обпертої й жорстко затисненої круглих пластин під дією рівномірного поперечного навантаження при збільшенні відносної товщини до $h/a=1/2$. Відмінність розв'язку, отриманого з використанням одного елемента по товщині від розв'язку пластини як масивного тіла (10 елементів по товщині) склало 4,1% у випадку жорсткого защемлення й 3,5% - для вільного обпирання.

Дослідження збіжності показали, що застосування більше шести елементів на тороїдальній ділянці практично не змінює картину напруженого стану. Епюри меридіональних напружень, отримані різними схемами СЕ й дані експерименту близькі між собою, однак, напруження, визначені методом СЕ, ґрунтованому на застосуванні моментної схеми, якісно й кількісно ближче до експериментальних результатів. Очевидно, це неправильно пояснити більш досконалою структурою рівнянь МССЕ, що дозволяє вирішувати нетонкі пластини й оболонки.

4. Обґрунтування ефективності МССЕ при розрахунку оболонок і пластин. Для дослідження характеру збіжності, достовірності і ефективності результатів, отримуваних із використанням двовимірних елементів МССЕ при розрахунку тонкостінних об'єктів, розглянуто тестовий приклад про згин шарнірно опертої круглої пластини (рис. 7,а), навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням.

Геометричні і механічні параметри пластини є наступними: $D=0.8$ м, $h=0.01$ м модуль пружності $E=10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$. В якості еталонного прийнятий аналітичний розв'язок.

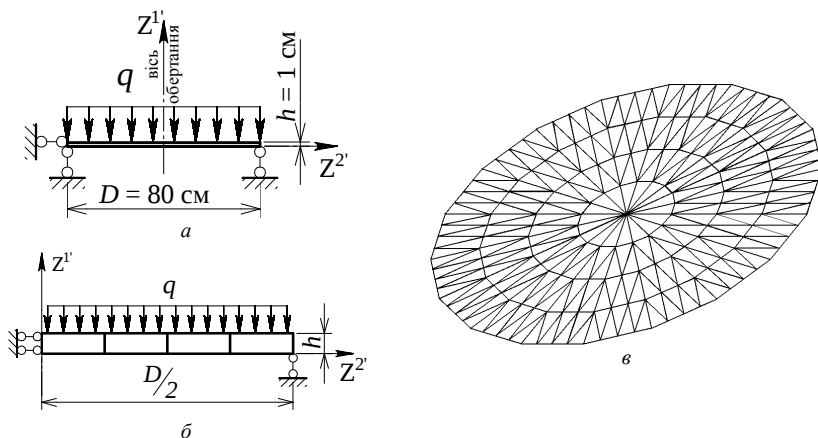


Рис. 7

Порівняння із скінчено елементною базою програмного комплексу SCAD (рис. 7,в) розроблених елементів MCCE (рис. 8,б), показали, що вони не поступаються по ефективності оболонковим СЕ при розрахунку тонкостінних об'єктів.

Для порівняння ефективності двовимірних елементів MCCE і програмного комплексу SCAD було розглянута шарнірно оперта балка під дією рівномірно розподіленого навантаження (рис. 8,а), скінченоелементна модель, якої наведена на рис. 8,б.

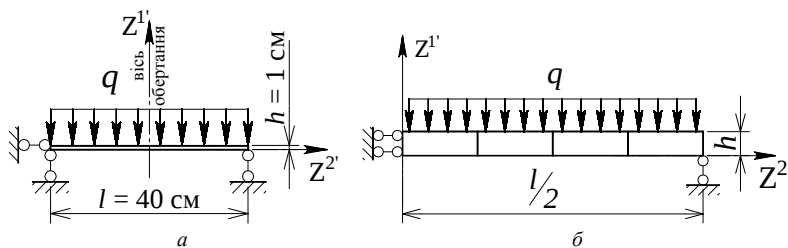


Рис. 8

Також використовувалися дискретні моделі $1 \times N$, де $N=8,16,20,32$ кількість СЕ по довжині балки. Механічні параметри балки є наступними: модуль пружності $E=10^5 \text{ МПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$.

Швидкість збіжності результатів показана на рис. 9,а для напруження та рис. 9,б для прогинів.

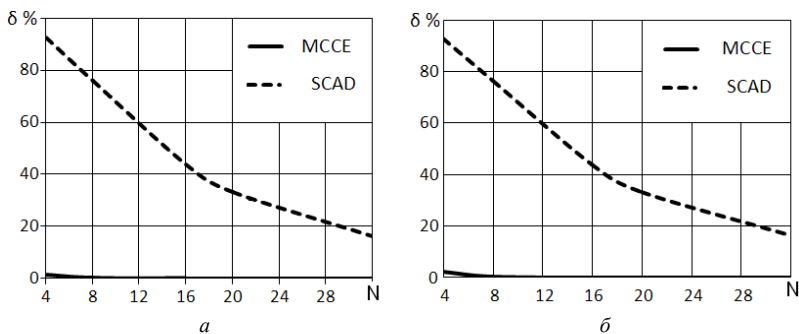


Рис. 9

Як видно, двовимірні елементи MCCE забезпечують значно кращу збіжність при розрахунку тонкостінних об'єктів ніж двовимірні елементи програмного комплексу SCAD.

5. Циліндричний резервуар зі стінками постійної товщини [12]. Геометричні і механічні параметри резервуару є наступними: радіус $r=9.15$ м, висота $h=7.93$ м, товщина стінки $d=0.356$ м, густина речовини, яка наповняє резервуар $\gamma=0,001$ кг/см³, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,25$ (рис. 10,а).

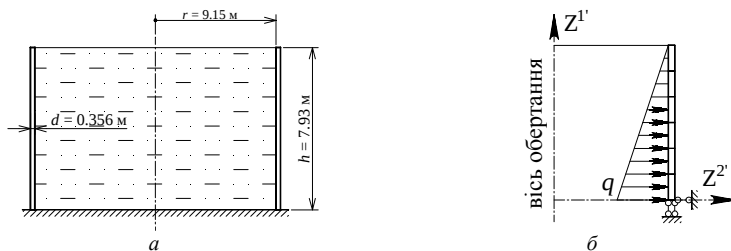


Рис. 10

Аналітичні результати розв'язку цієї задачі показали що максимальний момент $M_0=6338$ кг/м, а максимальна перерізуюча сила $Q_0=-10074$ кг/м.

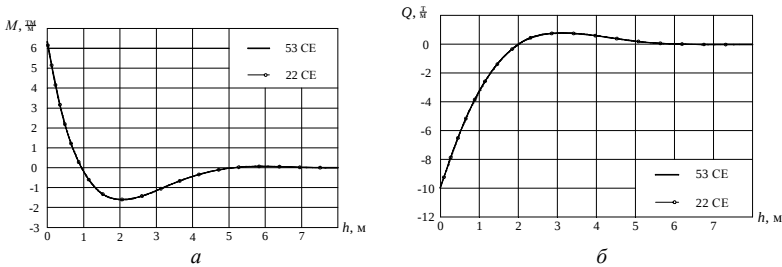


Рис. 11

При розв'язанні даного прикладу результати отримані за допомогою двовимірних елементів MCSE (рис. 10,б) і оболонкових SE програмного комплексу LIRA повністю співпали(рис. 11,а,б) і відрізняються від аналітичних значень в межах 2%.

Висновок. Таким чином наведені приклади дослідження збіжності SE, які базуються на співвідношеннях теорії пружності в поєднанні з методикою MCSE забезпечують отримання достовірних результатів для широкого кола вісесиметричних і плоско-деформованих тонкостінних об'єктів і не поступаються по ефективності оболонковим SE.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. "Наука", М., 1967.
2. Баженов В. А. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В. А. Баженов, О. П. Кривенко, М. О. Соловей.— К. : ЗАТ «Віпол», 2010. — 315 с.
3. Галимов Ш. К. Симметричный изгиб круглой пластины средней толщины. Труды семинара по теории оболочек (АН, СССР, Казанский физико-технический институт). Вып. III., 1973.
4. Гуляр О.І., Солодей І.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В. Ефективність MCSE в задачах згину та з концентраторами напружень // Опір матеріалів і теорія споруд, № 89, 2012. — С.143-157.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 539 с.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.-Л., 1935.
7. Маркол. Определение больших прогибов упругопластических оболочек вращения. Ракетная техника и космонавтика, 1970, № 9.
8. Муштарі Х. М. Теория изгиба плит средней толщины. Изв. АН СССР. Мех. и Машин. 1959, № 2.
9. Понятовский В. В. Уравнения теории анизотропных пластинок. Исследования по упругости и пластичности. Сб. 4, Изд. ЛГУ, 1965.
10. Понятовский В. В. Уточненная теория трансверсально изотропных пластин. Исследования по упругости и пластичности. Сб. 6, изд. ЛГУ, 1967.
11. Сахаров А. С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислоокій, В. В. Киричевский. — К. : Вища шк., 1982. — 480 с.

12. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 456 с.
13. Elias Z. M. Mixed finite element method for axisymmetric shells. Int. J. Num. Meth. in Eng. V.4, 1972, №2.
14. Reissner E. On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math. V.5, 1947, N1.

Стаття надійшла до редакції 03.05.2013 р.

Пискунов С.О., Солодей И.И., Максимюк Ю.В., Солоденко А.Д.

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МСКЭ) ПРИ ЛИНЕЙНЫХ РАСЧЕТАХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН

На основе МСКЭ создан оболочечный КЭ с использованием соотношений осесимметричной задачи теории упругости, что позволяет проводить анализ напряженно-деформированного состояния осесимметричных оболочек. Проведены многочисленные исследования для обоснования достоверности полученных результатов при использовании по толщине оболочки одного КЭ, а также показано, что его эффективность не уступает оболочечному КЭ.

Piskunov S.O., Solodey I.I., Maksymiuk Y.V., Solodenko A.D.

FEATURES APPLICATION MOMENT FINITE ELEMENT SCHEME (MSSE) FOR LINEAR CALCULATIONS OF PLATES AND SHELLS

On the basis on MSSE and using the axisymmetrical problem of elasticity theory ratios a shelled FE is created, which allows stress-strain analysis of axisymmetrical shells. The numerical study to justify the validity of the results when used on the thickness of the shell of one FE, and shows that its performance is not inferior shelled FE.