

УДК 539.3

Г.М. Іванченко, канд. техн. наук
Ю.О. Засць

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФРОНТІВ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЗІ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРУЖНОСТІ

Розглядається задача про перебудову плоскої розривної хвилі в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі. На основі променевого методу виведені розв'язувальні рівняння. Досліджено залежність форми променів і фронтів від зміни параметрів пружності.

Вступ. В явищі поширення розривних (слабких ударних) хвиль у пружних середовищах можливі ефекти їх суперпозиції та виникнення каустик, на яких хвилі фокусуються, і їх інтенсивність прямує до нескінченності (в рамках ідеальної лінійної пружності) [1, 3]. В задачах сейсмології, сейсмології, при аналізі динамічної поведінки тектонічних структур під впливом вибухових збурень, актуальними виявляються задачі математичного моделювання процесів взаємодії ударних хвиль з поверхнями розділу порід, що володіють різними механічними властивостями.

Специфіка динамічних явищ, що виникають у цих випадках пов'язана з короткочасністю високоінтенсивного початкового поля тиску, зазвичай, сконцентрованого на початковому етапі часу в малій області, пов'язаного з вільною граничною поверхнею середовища, і перебудові поверхні фронту ударної хвилі з її поширенням. Оскільки при цьому межа виділеної для розрахунку області еволюціонує з просуванням хвильового фронту, для аналізу таких процесів виявляються малоефективними традиційні методи розв'язування крайових задач математичної фізики.

Зазвичай при дослідженні ударних хвиль найбільша увага приділяється питанням геометричної побудови поверхонь розривів польових функцій і обчисленням значень цих розривів, що дають найбільш повну інформацію про фронт ударної хвилі й інтенсивності стерпного нею імпульсу в кожній крапці фронту. Тому для постановки і розв'язування таких задач важливу роль грають методи геометричної оптики, зокрема, нульове наближення променевого методу, що забезпечує гарний кількісний опис широкого кола хвильових явищ різної фізичної природи [4, 5].

Застосування променевого методу полягає у виділенні функції оптичного шляху хвилі, чи ейконала, і побудові за допомогою рівняння ейконала системи променів і фронтів ударної хвилі. Ця задача порівняно

легко розв'язується для ізотропних середовищ, однак і там виникають деякі ускладнення, коли доводиться досліджувати взаємодію хвилі з деякою поверхнею розділу середовищ з різними механічними властивостями (пружні відбивачі, лінзи, шаруваті середовища й ін.), в результаті чого утворюються каустики, пов'язані з фокусуванням енергії і необмеженим зростанням інтенсивності поля.

Фізична картина динамічних явищ різко ускладнюється при вивченні поширення хвиль сильних розривів у неоднорідних пружних анізотропних середовищах, оскільки в цих випадках польова функція виявляється векторною; для кожного напрямку існує три види хвиль, що відрізняються поляризацією; фазові швидкості хвиль залежать як від поляризації хвилі, так і від напрямку її поширення; промені, у загальному випадку, не ортогональні поверхні хвильового фронту, а променеві швидкості відрізняються від фазових і між їх напрямками не завжди існує однозначна відповідність. Крім того промені викривляються, а на поверхні фронтів можуть утворюватися геометричні особливості.

Постановка задачі. В теорії поширення хвиль у неоднорідних пружних середовищах зазвичай розглядають два типи неоднорідностей – розривні та неперервні. Неоднорідності першого типу зазвичай реалізуються за рахунок з'єднання двох однорідних середовищ на загальній поверхні контакту. Поширення хвиль у таких середовищах поза поверхнею контакту відбувається вздовж прямолінійних променів. Однак під час взаємодії падаючої пружної хвилі з поверхнею розподілу утворюються додаткові відбиті та заломлені квазіповздовжні та квазіпоперечні хвилі. Процеси формування таких хвиль дослідженні у роботах [6-10]. У середовищах другого типу хвильові збурення розповсюджуються лише вздовж криволінійних променів. За рахунок криволінійних променів відбувається суттєва перебудова хвильових фронтів, що часто супроводжуються виникненням на них геометричних особливостей (каустик). У даній роботі розглядаються неоднорідності другого типу.

Динамічна рівновага пружного середовища в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 визначається системою трьох диференціальних рівнянь

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1,2,3), \quad (1)$$

де $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$; $c_{ik,pq}$ – параметри пружності; ρ – густина; u_1, u_2, u_3 – компоненти вектора пружних переміщень, t – час.

В зв'язку з тим, що в анізотропних середовищах промені, у загальному випадку, не ортогональні поверхням хвильових фронтів,

будемо розрізняти вектори фазової $\mathbf{v}$ і променевої ξ швидкостей, вважаючи, що фронт є поверхнею постійної фази $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{v}t = \text{const}$, кожна елементарна площадка якого рухається уздовж місцевої одиничної нормалі $\mathbf{n}$ зі швидкістю v . Тут $\mathbf{r}$ – радіус-вектор точки фронту.

Вектори поляризації $\mathbf{A}$ хвилі і її фазової швидкості $\mathbf{v}$ для обраного напрямку $\mathbf{n}$ можна побудувати з однорідної системи алгебраїчних рівнянь [4, 6]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad (2)$$

як власні числа і вектори матриці її коефіцієнтів.

З умови існування нетривіальних розв'язків цієї системи впливає рівняння третього ступеня щодо квадрата фазової швидкості v^2

$$\sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} = 0, \quad (3)$$

за допомогою якого для кожного напрямку нормалі $\mathbf{n}$ можна визначити і розташувати в порядку спадіння три швидкості по-різному поляризованих хвиль.

Надаючи величині v^2 в системі (2) по черзі одне зі знайдених значень $v_r^2(n)$ ($r = 1,2,3$), можна визначити компоненти векторів поляризації $\mathbf{A}^{(r)}$ трьох хвиль, що рухаються в розглянутому напрямку зі своїми фазовими швидкостями $\mathbf{v}_r(n)$.

Поверхня фронту ударної хвилі визначається співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (4)$$

у якому функція τ повинна задовольняти диференціальному рівнянню в частинних похідних першого порядку [4]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (5)$$

що узагальнює рівняння ейконала в геометричній оптиці для пружних анізотропних хвиль.

Величини, що входять у (5) p_k ($k = 1, 2, 3$) являють собою компоненти вектора рефракції

$$p_k \equiv \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = \frac{n_k}{v_r(n)} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Хвильовий фронт (4) ударної хвилі в однорідному анізотропному середовищі будується після знаходження розв'язку рівняння (5), яке за допомогою методу характеристик зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{d\tau} &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k/d\tau &= 0, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6)$$

Перша група цих рівнянь описує поширення хвилі уздовж променя з променевою швидкістю $\xi = \xi^{(r)}(n, x_k)$. Друга група рівнянь вказує на прямолінійність променів в однорідному середовищі.

Однак, якщо пружне середовище є неоднорідним, рівняння (6) замінюються більш складнішими співвідношеннями [4, 8-10]

$$\begin{aligned} \frac{dx_m}{d\tau} &= \xi_m \equiv \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (m = 1, 2, 3), \\ \frac{dp_m}{d\tau} &= \eta_m \equiv \frac{-1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Наведені залежності дають можливість описати фронти складної геометрії, які перебудовуються під час свого поширення. В такому випадку промені стають криволінійними.

В загальному випадку на відміну від однорідного, для неоднорідного середовища густина ρ та параметри l, m, p є функціями координат x_1, x_2, x_3 . Розглянемо середовища, у яких змінною величиною є тільки величина m , яка змінюється за законом $m = \mu(\alpha_0 + \beta x_3)$. Тоді компоненти $C_{ik,pq}$

тензора пружних параметрів трансверсально-ізотропного середовища можна представити у формі шестирядної квадратної матриці:

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu - p & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \mu(\alpha_0 + \beta x_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - \mu(\alpha_0 + \beta x_3) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де λ і μ – параметри Ламе, l , m , p – константи, що відрізняють середовище від ізотропного.

На основі запропонованої методики проведене комп'ютерне моделювання задачі про поширення хвиль, що породжуються ударним полем тиску в сферичній порожнині трансверсально-ізотропного пружного середовища параметр ізотропії m якого змінюється за лінійним законом.

Рисунок 1 ілюструє систему променів і фронтів розривної хвилі зі зміною часу для середовища 1 з параметрами: $m = \mu(\alpha_0 + \beta x_3)$, $\alpha_0 = 0.1$, $\beta = -5 \cdot 10^{-5}$, $\rho = 2760 \text{ кг/м}^3$, $E = 3 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.1$, параметри анізотропії $l = 0.3\lambda$, $p = 0.5(\lambda + 2\mu)$.

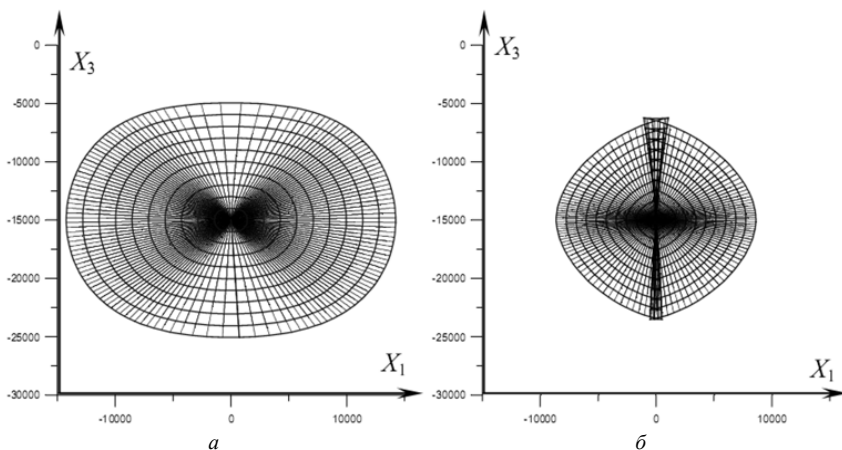


Рис 1. Система променів і фронтів в середовищі 1
а) квазіповздовжньої qP -вилі; б) квазіпоперечної qS -хвилі

Рисунок 2 відповідає випадку поширення хвилі у середовищі 2, де $m = \mu(\alpha_0 + \beta x_3)$, $\alpha_0 = -0.1$, $\beta = 5 \cdot 10^{-4}$, $\rho = 2760 \text{ кг/м}^3$, $E = 3 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.1$, параметри анізотропії $l = -0.5\lambda$, $p = -0.3(\lambda + 2\mu)$.

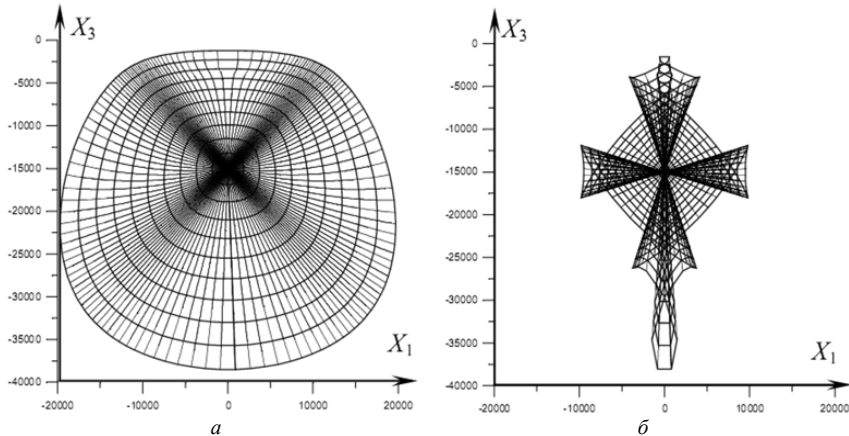


Рис 2. Система променів і фронтів в середовищі 2
а) квазіповдовжньої qP -хвилі; б) квазіпоперечної qS -хвилі

Висновки. Отримані результати дають змогу зробити висновки про те, що неоднорідність механічних властивостей пружного середовища призводить до суттєвої перебудови системи променів і фронтів. При цьому промені набувають суттєвої кривизни, а на поверхнях фронтів утворюються геометричні особливості – каустики, де промені фокусуються, внаслідок чого інтенсивність поля необмежено зростає.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Іванченко Г.М., Ващіліна О.В., Засць Ю.О. Розповсюдження фронтів розривних хвиль в неоднорідних трансверсально – ізотропних пружних середовищах // Вісник НТУ. – 2007. – №15. – С. 372 – 375.
2. Іванченко Г.М., Ващіліна О.В., Засць Ю.О. Перебудова фронтів розривних хвиль в неоднорідних трансверсально – ізотропних пружних середовищах // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81. – С. 135-141.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., Наука, 1980. 304с.
4. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград, Наука, 1980. 280с.
5. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К., Наукова думка, 1988. 220с.

6. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М., Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т.64, №3, – С. 394–402.
7. Гуляев В.И., Луговой П.З., Крицкий В.Б., Иванченко Г.М. Отражение и преломление плоских разрывных волн параболоидными поверхностями раздела анизотропных упругих сред // Геофизический журнал. – 2005. – Т.27, №3. – С. 418-426.
8. Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.
9. Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave interaction with interfaces between anisotropic elastic media // International Journal of Solids and Structures – 2006. – 43. – P. 74-90.
10. Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M. Focusing and dispersion of a plane wave by transversally isotropic elastic lenses // Acoustical Physics – 2004. – Vol. 50. – 2. – P. 140-145.

Отримано 01.06.09

Рассматривается задача о перестройке плоской разрывной волны в неоднородной трансверсально-изотропной среде. На основе лучевого метода выведены разрешающие уравнения. Исследована зависимость формы лучей и фронтов от изменения параметров упругости.

The problem about discontinuous wave front transformation in an inhomogeneous transversely isotropic medium is considered with the use of the ray method the constitutive equations are constructed. Analysis of dependence of the rays and fronts shapes on the varying of the elasticity parameters is performed.