

УДК 539.3

О.С. Погорелова, канд. фіз.-мат. наук
Т.Г. Постнікова, канд. техн. наук

ВПЛИВ ПАРАМЕТРА ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ДИНАМІЧНУ ПОВЕДІНКУ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ З УДАРОМ О М'ЯКИЙ ОБМЕЖНИК

Виконано числове дослідження динамічної поведінки двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності з ударом о м'який обмежник. Показано, як отримання того чи іншого режиму коливань залежить від параметра зовнішнього навантаження. Побудовані криві навантаження для обох тіл системи та крива залежності сили контактної взаємодії від цього параметра.

1. Постановка задачі.

Віброударні системи досить широко застосовуються в техніці, тому дослідження динамічних процесів у таких системах являє собою чималий інтерес [1]. В літературі (див. наприклад [2]) представлені принципи класифікації механічних систем с ударами, різні типи таких систем мають різну динамічну поведінку. У віброударній механічній системі, що розглядається у цій роботі, має місце удар о м'який обмежник. У такій системі тривалість удару не є безмежно короткою, і тому класичне (спрошене) моделювання удару за допомогою граничних умов з використанням коефіцієнта відновлення, який має незмінне значення, не дає результатів, що відповідають реальному рухові системи. Це твердження для моделі, що розглядається, було доведено в [3]. Саме тому для моделювання удару о м'який обмежник в роботі застосовується сила контактної взаємодії, що змінюється під час удару згідно із законом Герца. Такий підхід дозволяє описати рух тіл системи на всій часовій осі включаючи період удару, спостерігати динамічну поведінку системи під час удару, обчислювати величину контактної сили та тривалість удару.

У роботі досліджується двохмасова система з двома ступнями вільності, що відповідає віброударному майданчикові, який використовується у будівельному виробництві для ущільнення бетонних сумішей і формовання бетонних виробів [4-6].

Найпростіший варіант моделі двохмасового віброударного майданчика без закріплення форми показано на рис. 1.

Стіл майданчика масою m_l кріпиться до фундаменту лінійними віброізолюючими пружинами із сумарною жорсткістю k_l . Двигуни, встановлені під столом, генерують збурюючу силу $F(t)$, яка вважається гармонічною $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$. До столу кріпиться пружна прокладка

(м'який обмежник коливань) товщиною h з лінійною жорсткістю k_0 , на якій лежить форма з бетонною сумішню масою m_0 . Форма до прокладки не кріпиться, і тому під час руху відривається від прокладки, а потім на неї падає.

Ця модель докладно описана в [3,7,8].

Коли форма падає на стіл майданчика (на прокладку), відбувається удар, під час якого форма і стіл рухаються спільно. Як було сказано вище, в розглянутій моделі удар найкраще моделюється силою контактної взаємодії $F_{кон}$, що описується законом Герца [3,9,10]:

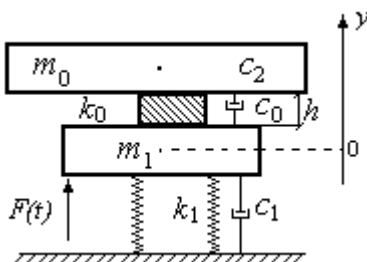


Рис. 1. Розрахункова схема

$$F_{кон} = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (1)$$

де $\alpha(t)$ – відносне зближення тіл, $\alpha(t) = h - (y_0 - y_1)$, K – константа Герца

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}},$$

q , A і B – константи, що характеризують місцеву геометрію зони контакту,

$$\delta_0 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0\pi}, \quad \delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi},$$

μ_i і E_i – коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга для обох тіл.

Спільний рух столу з формою з початку руху до першого відриву форми від прокладки описується рівняннями:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \omega_0^2[h - (y_0 - y_1)] - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0\dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2y_1 - \omega_0^2\chi[h - (y_0 - y_1)] - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_0 + \\ &+ 2\xi_0\omega_0\chi\dot{y}_0 + \frac{F_0}{m_1}\cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

де введені позначення

$$\frac{k_0}{m_0} = \omega_0^2, \quad \frac{k_1}{m_1} = \omega_1^2, \quad \frac{c_0}{m_0} = 2\xi_0\omega_0, \quad \frac{c_1}{m_1} = 2\xi_1\omega_1, \quad \frac{c_2}{m_0} = 2\xi_2\omega_0, \quad \frac{m_0}{m_1} = \chi, \quad (3)$$

y_0, y_1 – поточні координати форми і столу відповідно.

Вихідні умови при $t = 0$ мають вигляд:

$$\varphi = 0; \quad y_1 = 0; \quad \dot{y}_1 = 0; \quad y_0 = h - \lambda_{cm}; \quad \dot{y}_0 = 0. \quad (4)$$

Роздільний рух тіл під час відриву форми від прокладки описується рівняннями

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g - 2\xi_2\omega_0\dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння спільного руху тіл під час удару мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \frac{K}{m_0} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0\dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \frac{K}{m_1} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + 2\xi_0\omega_0\chi\dot{y}_0 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Числові характеристики майданчика узяті відповідно до нормативної літератури [5,6] і представлені в таблиці.

Таблиця 1

Маса форми з бетоном m_0 , кг	15000,0
Маса столу майданчика m_1 , кг	7400,0
Жорсткість прокладки k_0 , Н/м	$3,0 \cdot 10^8$
Сумарна жорсткість віброізольовуючих пружин k_1 , Н/м	$1,278 \cdot 10^6$
Товщина прокладки h , м	0,0275
Амплітуда зовнішнього навантаження F_0 , Н	$2,44 \cdot 10^5$
Частота зовнішнього навантаження ω , Гц	25,0
Початкова фаза зовнішнього навантаження φ , рад	0,0

До рівнянь руху тіл віброударного майданчика (2,5,6) крім параметрів, які рекомендовані нормативною літературою і значення яких наведені у таблиці 1, входять: коефіцієнти демпфірування ξ_0 , ξ_1 , ξ_2 , що визначають сили опору, модулі пружності і коефіцієнти Пуассона обох тіл, що співударяються, E_0 і E_1 , μ_0 і μ_1 ; константи A , B і q , які характеризують місцеву геометрію контактуючих поверхонь. Останні дві групи параметрів входять в опис сили Герца (1) і в такий спосіб зв'язані зі способом моделювання удару.

Вплив цих параметрів на динаміку віброударної системи описаний в [7,11]. Зафіксуємо їхні значення:

Таблиця 2

Модуль пружності форми E_0 , 10^8Н/м^2	2000
Модуль пружності прокладки E_1 , 10^8Н/м^2	3
Коефіцієнт Пуассона форми μ_0	0,3
Коефіцієнт Пуассона прокладки μ_1	0,4
Константи A, B , що характеризують місцеву геометрію зони контакту, $1/\text{м}^2$	$A=B=0,1$
q	0,318
Коефіцієнт демпфірування в бетонній суміші ξ_2	0,03
Коефіцієнт демпфірування в прокладці ξ_0	0,02
Коефіцієнт демпфірування у віброізолюючих пружинах ξ_1	0,02

2. Числові дослідження впливу зовнішнього навантаження на динамічну поведінку віброударної системи.

Для дослідження впливу величини зовнішнього навантаження на режим коливань тіл системи та на характеристики руху введемо параметр зовнішнього навантаження, тобто гармонічну збуджуючу силу запишемо у вигляді

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi) .$$

Змінюючи λ і залишаючи незмінними інші параметри динамічної системи, простежимо вплив параметра зовнішнього навантаження на її поведінку.

2.1. Безударний (1,0)-періодичний режим коливань при λ в діапазоні $0,35 \leq \lambda \leq 0,5$.

Числовий аналіз показав, що при значенні параметра зовнішнього навантаження $\lambda=0.3$ і менше збуджуюча сила надто мала для того, щоб

відірвати форму від прокладки. При такому зовнішньому навантаженні форма з бетоном і стіл майданчика рухаються спільно увесь час. Коли параметр λ стає більшим, змінюючись в діапазоні $0,35 \leq \lambda \leq 0,5$, тобто збуджуюча сила зростає, первісний відрив форми від прокладки існує, але потім швидко встановлюється гармонічний безударний режим спільних коливань обох тіл системи – режим $(1,0)$ -періодичний. Тут і далі субгармонічний (чи гармонічний) режим коливань періоду nT з k ударами за цикл називатимемо (n,k) -періодичним [8,12]. На рис. 2 представлені залежності від часу переміщень обох тіл системи, контактної сили та проекції траєкторії руху тіл на фазову площину при $\lambda = 0,4$. Як добре видно на рис. 2, контактна сила приймає нульове значення тільки у перехідний період руху системи, а потім вона увесь час позитивна, що свідчить про відсутність відриву форми від прокладки під час спільних усталених коливань.

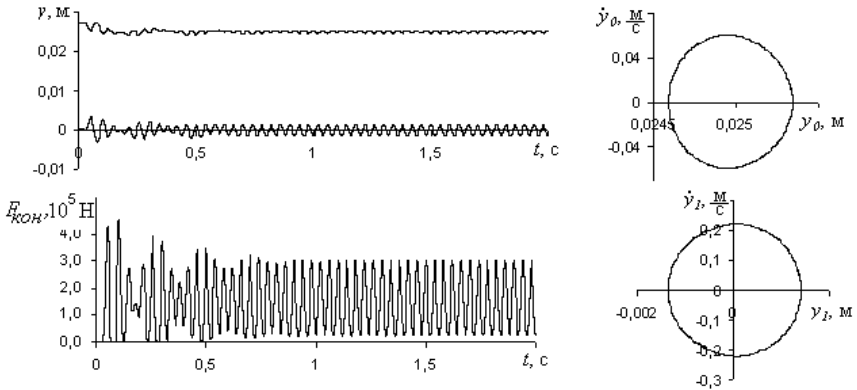


Рис. 2

2.2. Одноударний гармонічний $(1,1)$ -періодичний режим коливань при λ в діапазоні $0,6 \leq \lambda \leq 1,5$.

Із подальшим збільшенням значення параметру навантаження λ , тобто зростанням збуджуючої сили, система починає рухатися в звичайному режимі: має місце гармонічний одноударний $((1,1)$ -періодичний) режим коливань. На рис. 3 представлена залежність сили контактної взаємодії від часу; графік сили в більшому масштабі наочно демонструє наявність одного удару за один період зовнішнього навантаження T .

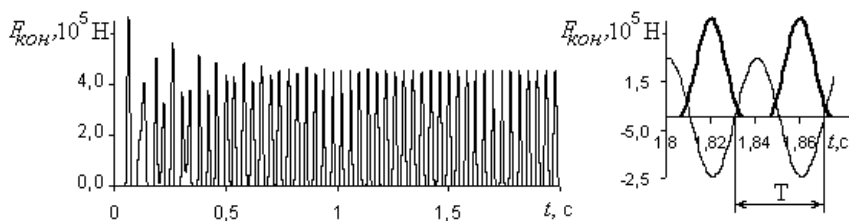


Рис. 3

2.3. Двохударний субгармонічний (2,2)-періодичний режим коливань при λ в діапазоні $1,55 \leq \lambda \leq 1,6$.

В цьому вузькому діапазоні значень параметра зовнішнього навантаження λ система суттєво змінює режим коливань – він стає двоударним субгармонічним з періодом $2T$, тобто (2,2)-періодичним режимом. На рис.4 представлені залежності від часу переміщень обох тіл системи та контактної сили та їх фазові траєкторії при $\lambda = 1,6$. Фазові траєкторії обох тіл мають два характерних кільця, що відповідає $2T$ -періодичному режиму коливань.

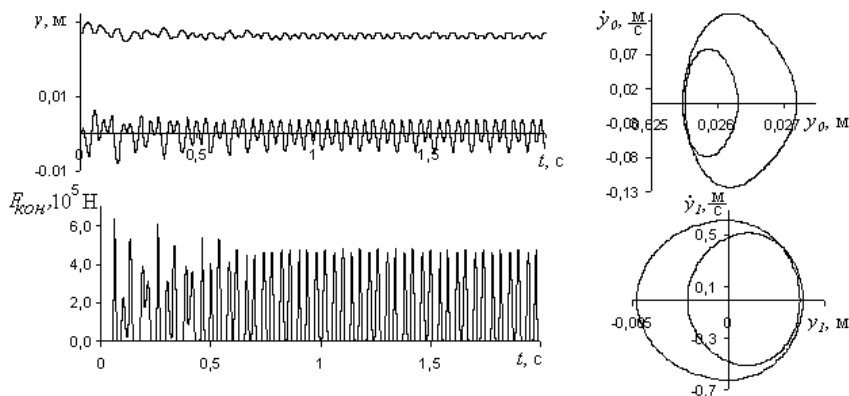


Рис. 4

На рис. 5,а тонкою лінією зображена зовнішня збудуюча сила, а товстою – сила контактної взаємодії (для $\lambda = 1,6$).

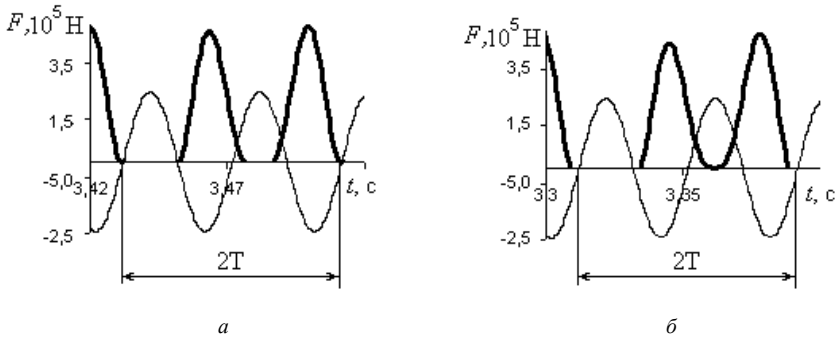


Рис. 5

Цей рисунок наочно демонструє, що в системі за час $2T$ два рази відбувається відрив форми від прокладки, під час чого сила контактної взаємодії відсутня. За той же час $2T$ два рази відбувається удар, під час якого контактна сила зростає від нуля до максимального значення і знов зменшується до нуля.

2.4. Одноударний субгармонічний (2,1)-періодичний режим коливань при λ в діапазоні $1,7 \leq \lambda \leq 2,06$.

В цьому діапазоні значень параметра λ можна виділити два піддіапазони, в яких динамічна поведінка системи дещо різна. В піддіапазоні $1,7 \leq \lambda \leq 1,9$ маємо яскраво виражений (2,1)-періодичний режим коливань – субгармонічний $2T$ -періодичний режим з одним ударом за цикл (рис.6 для $\lambda = 1,8$). Фазові траєкторії обох тіл мають два характерних кільця.

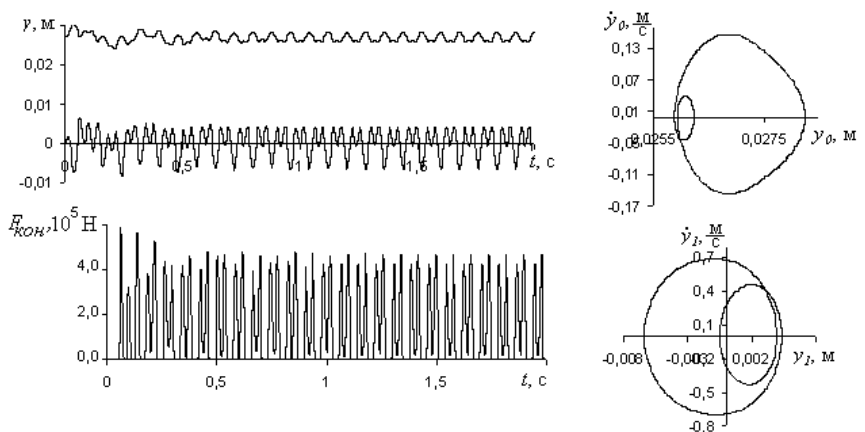


Рис.6

На рис. 5,6 тонкою лінією зображена зовнішня збурююча сила, а товстою – сила контактної взаємодії (для $\lambda = 1,8$). Цей рисунок наочно демонструє, що в системі за час $2T$ лише один раз відбувається віддрив форми від прокладки та один раз відбувається удар.

В піддіапазоні $2,0 \leq \lambda \leq 2,06$ зберігається (2,1)-періодичний режим коливань, але характер руху форми змінюється. На рис.7 представлені залежності від часу переміщень обох тіл системи та контактної сили та їх фазові траєкторії при $\lambda = 2,05$. Фазова траєкторія стола має два характерних кільця, в той час коли фазова траєкторія форми має лише одне кільце, і рух форми стає майже гармонічним.

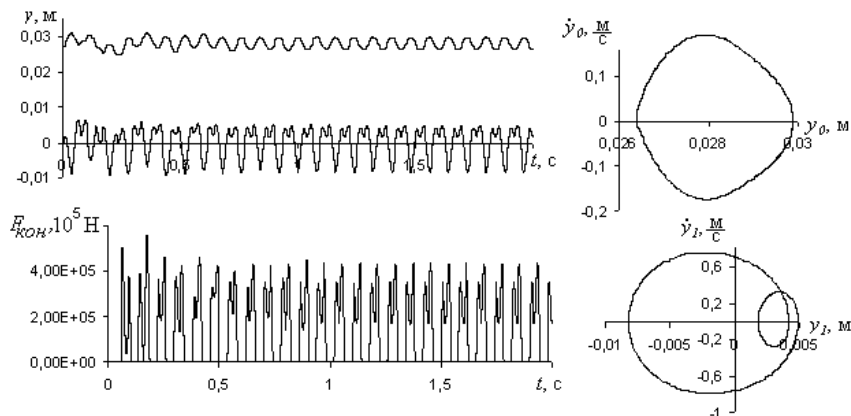


Рис.7

Для порівняння на рис. 8 у великому масштабі зображені зміни сил контактної взаємодії за період часу $2T$ в усталеному режимі коливань для різних значень параметра λ . Тонкою лінією, як звичайно, зображена збурююча гармонічна сила. На том же рисунку також в великому масштабі представлені графіки переміщень форми для тих же значень λ . Тут наочно видно, як змінюється характер коливань форми зі зміною λ .

2.5. Хаотичні коливання системи при $\lambda \geq 2,07$.

Коли збурююча сила стає надто великою, коливальний рух віброударної сити не устальовується, увесь час він залишається хаотичним. Наприклад, на рис.10 представлені залежності від часу переміщень обох тіл системи та контактної сили та їх фазові траєкторії при $\lambda = 2,1$.

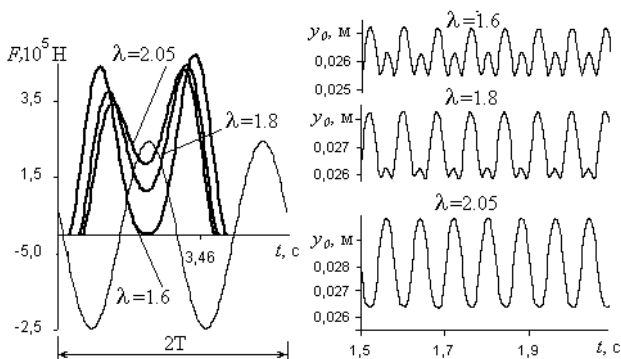


Рис. 8

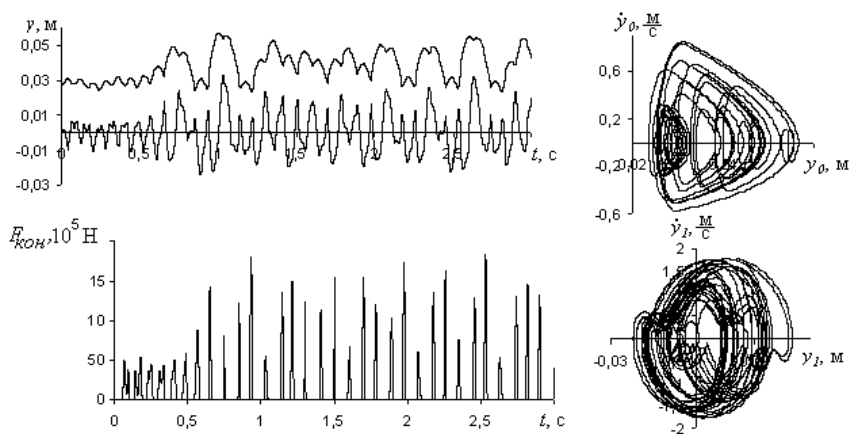


Рис. 9

3. Підсумкові результати числових досліджень динамічної поведінки віброударної системи

Для того, щоб отримати наочну картину динамічної поведінки системи на всьому діапазоні значень параметра зовнішнього навантаження λ , представимо одержані результати в вигляді таблиці 3. В таблиці приведені максимальні значення сили контактної взаємодії, тип режиму коливальності системи, а також значення напіврозмахів стола і форми, які обчислюються за стандартною формулою:

$$A_1 = \frac{|y_{1,\max}| + |y_{1,\min}|}{2}, \quad A_0 = \frac{|y_{0,\max}| + |y_{0,\min}|}{2}. \quad (7)$$

Таблиця 3

Параметр λ	$A_0, \text{мм}$	$A_1, \text{мм}$	$F_{\max}, 10^5 \text{Н}$	Режим коливань
0,30				Спільні коливання
0,35	0,338	1,237	2,842597	(1,0)
0,40	0,375	1,389	3,010356	(1,0)
0,50	0,437	1,668	3,310306	(1,0)
0,60	0,484	1,913	3,556447	(1,1)
0,70	0,513	2,121	3,742980	(1,1)
0,80	0,542	2,402	3,965277	(1,1)
0,90	0,550	2,491	4,030782	(1,1)
1,00	0,566	2,675	4,153193	(1,1)
1,10	0,576	2,751	4,266510	(1,1)
1,20	0,586	2,836	4,372270	(1,1)
1,30	0,595	3,003	4,471774	(1,1)
1,40	0,605	3,167	4,566159	(1,1)
1,50	0,611	3,331	4,655262	(1,1)
1,55	0,622	3,588	4,701246	(2,2)
1,56	0,625	3,613	4,710636	(2,2)
1,57	0,730	3,930	4,744350	(2,2)
1,58	0,785	4,098	4,750634	(2,2)
1,59	0,823	4,217	4,753497	(2,2)
1,60	0,857	4,319	4,754441	(2,2)
1,70	1,056	4,941	4,729038	(2,1)
1,80	1,187	5,360	4,676533	(2,1)
1,90	1,340	5,783	4,586465	(2,1)
2,00	1,563	6,261	4,446409	(2,1)
2,01	1,595	6,317	4,427938	(2,1)
2,02	1,629	6,375	4,408698	(2,1)
2,03	1,667	6,438	4,388453	(2,1)
2,04	1,710	6,505	4,367855	(2,1)
2,05	1,760	6,580	4,346059	(2,1)
2,06	1,826	6,673	4,318563	(2,1)
2,07	16,100	24,912	17,45324	Хаотичні коливання
2,08	16,569	23,808	16,06968	Хаотичні коливання
2,10	16,611	25,506	15,98413	Хаотичні коливання
2,20	13,713	23,529	16,63876	Хаотичні коливання
2,30	17,969	25,001	14,89117	Хаотичні коливання

На рис. 10 зображені криві навантаження системи (залежності напіврозмахів коливань обох тіл системи від параметра навантаження λ) та залежність від λ максимального значення сили контактної взаємодії в усіх режимах на всьому діапазоні значень λ . Цікаво відмітити, що при $\lambda > 1,5$ в режимах (2,2)-періодичному та (2,1)-періодичному максимум контактної сили зменшується, а напіврозмахи коливань обох тіл системи в той же час збільшуються.

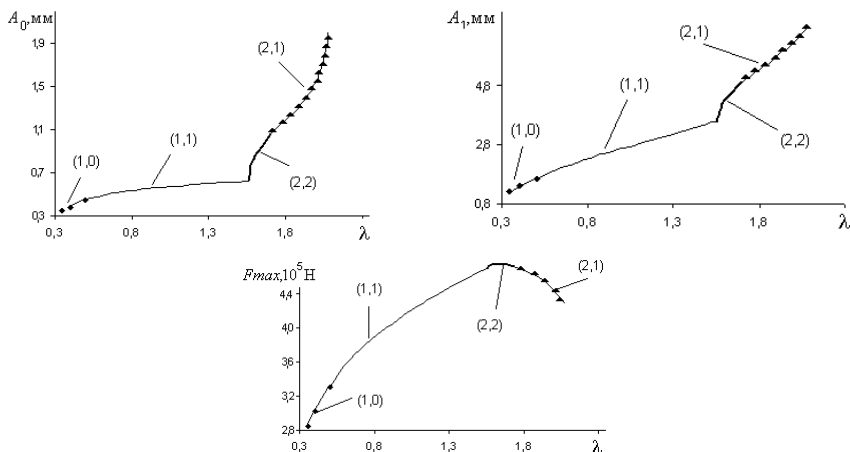


Рис. 10

4. Висновки

Отже, числові дослідження динамічної поведінки двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності, в якій удар відбувається о м'який обмежник, показали, що:

1. Використання сили контактної взаємодії, що описується законом Герца, для моделювання удару у віброударній системі із ударом о м'який обмежник дає надійний результат і дозволяє отримати закон руху всіх тіл системи на всій часовій осі, включаючи період удару. Цей підхід дозволяє також обчислити величину контактної сили та тривалість удару, яка в системі з ударом о м'який обмежник не є безмежно малою, а є кінцевою величиною і її можна порівнювати з часом роздільного руху тіл системи.

2. Побудовані в роботі криві навантаження для обох тіл системи показують, як зі зміною параметра навантаження λ змінюються (зростають) не тільки амплітуди коливань, але і самі режими коливань: безударний гармонічний, одноударний гармонічний, двоударний субгармонічний з періодом $2T$, одноударний субгармонічний з періодом $2T$ і, нарешті, хаотичний.

3. Побудована крива залежності максимуму сили контактної взаємодії від параметра навантаження λ показує, що з ростом λ , тобто збурюючої сили зовнішнього навантаження, цей максимум також зростає. Проте, коли режим коливань стає субгармонічним з періодом $2T$, максимум контактної сили починає зменшуватися, а напіввзмахи коливань обох тіл однак продовжують зростати.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.:Наука, 1978. – 352 с.
2. *Barbara Blazejczyk-Okolewska, Krzysztof Czolczynski, Tomasz Kapitaniak* Classification principles of types of mechanical systems with impacts – fundamental assumptions and rules// *European Journal of Mechanics* . - 2004. № 23 - P.517–537.
3. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009.(Здана до друку).
4. *Назаренко І.І.* Машины для виробництва будівельних матеріалів: Підручник.-Київ: КНУБА, 1999.- 488 с.
5. *Гусев Б.В., Зазимко В.Г.* Вибрационная технология бетона.–К.: Будівельник, 1991.–160 с.
6. Рекомендации по вибрационному формованию железобетонных изделий//НИИЖБ. – М., 1986. – 78 С.
7. *Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Аналіз динаміки ударно-вібраційного майданчика при зміні його параметрів// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2008.-Вип.82 – сс. 71-82.
8. *Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Вплив кроку інтегрування рівнянь руху виброударної системи на отримання характеристик її динамічної поведінки// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2009.(Здана до друку).
9. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.: Стройиздат, 1965. –448 с.
10. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.
11. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Влияние отдельных конструктивных параметров виброударной системы на ее динамику//Пробл. прочности. - 2009.(Здана до друку).
12. *Lamarque C. H., Janin O.* Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal// *Journal of Sound and Vibration*. - 2000. № 235(4). – P. 567-609.

Отримано 21.07.09

О.С. Погорелова, Т.Г. Постникова

Влияние параметра внешнего нагружения на динамическое поведение виброударной системы с ударом о мягкий ограничитель

Выполнено численное исследование динамического поведения двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы с ударом о мягкий ограничитель. Показано, как характеристики режима колебаний системы, полученного в результате интегрирования уравнений движения, зависят от параметра внешней нагрузки. Построены кривые нагружения для обоих тел системы и кривая зависимости силы контактного взаимодействия от этого параметра.

O.S. Pogorelova, T.G. Postnikova

The external loading parameter influence at the dynamical behaviour of vibro-impact system with the impact on a soft limiting stop

The numeric investigation of dynamical behaviour of vibro-impact two-mass two-degree-of-freedom system with impact on a soft limiting stop is fulfilled. It is shown how the vibration regime characteristics which have been received after the integration of motion equations depend from the external loading parameter. The loading curves for the both system bodies and the curve of the contact force dependence from this parameter are built.