



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ В ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ДВИЖЕНИЯ

Известно [1-5], что движение линейной системы с одной степенью свободы движения (в рамках модели со сосредоточенными параметрами) под действием внешней силы, "частота" и "амплитуда" которой являются известными функциями времени, описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2 \cdot k \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = P(t) \cdot \cos\{\varphi(t)\}, \quad (1)$$

где $P(t)$ - "амплитуда", а $\varphi(t)$ - "фаза" внешней "силы".

В механических системах (например, вибрационных машинах для уплотнения бетонных смесей [6-9]) внешняя сила чаще всего определяется моментом электродвигателя. При его разгоне нужная скорость вращения достигается не сразу, благодаря чему $\varphi(t)$ не является линейной функцией времени. Точно также $\varphi(t)$ не является линейной и при выключении двигателя (его выбеге). Безусловно, она не является линейной и в установившемся режиме благодаря эффекту обратного влияния колебательной системы на двигатель, которым в данной работе пренебрегаем (в отличие от подхода, развитого в [1]), считая мощность двигателя достаточно большой.

В работе [2] рассматривается случай, когда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 + \delta, \quad (2)$$

что соответствует равноускоренному разгону двигателя. В частности, для функции $P(t)$ в цитируемой работе рассмотрены три частных случая: постоянная, квадратичная и экспоненциальная зависимость (от времени t). Во всех указанных случаях частное решение уравнения (1) с нулевыми условиями ищется в форме интеграла Коши

$$x = \frac{1}{\omega_1} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot \exp\{-k \cdot (t - \tau)\} \cdot \cos \varphi(\tau) \cdot \sin[\omega_1 \cdot (t - \tau)] d\tau, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - k^2}, \quad (3)$$

величина которого отыскивается затем приближенными методами.

В работе [5] рассмотрен общий случай, когда $P(t)$ и $\varphi(t)$ - произвольные функции времени, удовлетворяющие некоторым условиям, а интеграл (3) вычисляется по асимптотическим формулам, применимым в методе стационарной фазы [10, 11].

Целью настоящей работы является обобщение результатов и метода, развитого в работах [4,5], т.е. метода стационарной фазы, на случай, когда необходимо изучить переходной процесс в линейной системе с одной степенью свободы движения в рамках дискретно-континуальной модели [6], обычно используемой при анализе взаимодействия рабочего органа вибрационной машины и обрабатываемой бетонной/строительной смеси.

Рассмотрим подробнее случай разгона двигателя вибромашины. Будем считать, что $\varphi(t)$ - монотонная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Преобразовывая интеграл (3) так, как это сделано в [5], можно его свести к виду

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tau) \cdot \exp\{i \cdot \omega_1 \cdot \psi(\tau)\} d\tau, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (4)$$

где $f(t)$ - "медленно меняющаяся" функция времени t , а $\exp\{i \cdot \omega_1 \cdot \psi(t)\}$ - "быстро осциллирующая" функция t , ω_1 - "большой" параметр.



Именно к интегралам такого рода можно применить асимптотический метод стационарной фазы, широко применяемый в радиотехнике, например, в задачах частотной модуляции [10].

Следует отметить, что в (1) под коэффициентами уравнения понимаются следующие величины [6,7]

$$2k = \frac{(b + b'_6)}{m + m_6 \cdot a_1}, \omega^2 = \frac{c}{m + m_6 \cdot a_1}, P(t) = \frac{F_0(t)}{m + m_6 \cdot a_1}, b'_6 = m_6 \cdot \omega^* \cdot d_1, \quad (5)$$

где m - масса системы, участвующая в колебаниях (и относящаяся к ее дискретной части), m_6 - масса бетонной смеси в форме, b - коэффициент сопротивления движению вибромашины, c - жесткость системы, a_1, d_1 - волновые коэффициенты, учитывающие влияние бетонной смеси на рабочий орган вибромашины (и описывающие континуальную составляющую исследуемой системы), ω^* - мгновенная частота переходного процесса (либо усредненная за время разгона двигателя частота: от нуля до номинального ее значения), $F(t)$ - амплитуда вынуждающей силы (в (1) – $P(t)$ - "амплитуда" вынуждающей силы, нормированная на единицу массы колеблющейся системы), $x(t)$ - смещение в дискретно-континуальной модели системы относительно положения равновесия.

Введем обозначение

$$\left. \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} = \omega. \quad (6)$$

В дальнейшем производную по времени t обозначим штрихом. Легко заметить, что τ_0 есть момент перехода через резонанс, когда "частота" внешнего возбуждения $\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}$ равна частоте собственных колебаний ω_1 .

Величина интегралов типа (4) по разному оценивается в зависимости от того, лежит ли τ_0 далеко вне интервала $[0, t], t \ll \tau_0$, вблизи его конца $t, t \sim \tau_0$, или внутри интервала $[0, t]$, далеко от его конца t , т.е. $0 < \tau_0 \ll t$. Соответствовать этому будут дорезонансный, околорезонансный и далеко зарезонансный этапы разгона двигателя системы.

Опуская промежуточные выкладки, приведем лишь окончательные результаты вычисления/определения закона $x(t)$.

Пусть $t \ll \tau_0$ (дорезонансный этап разгона двигателя – режим I)

$$x(t) \approx \frac{P(t) \cdot \sin[\varphi(t) - \alpha]}{\sqrt{[\omega^2 - (\varphi')^2]^2 + (2k\varphi')^2}} + \sin(\omega \cdot t + \varepsilon) \cdot \frac{P(0) \cdot \exp\{-kt\}}{2\omega} \times \\ \times \frac{\sqrt{(\varphi'(0))^2 + (\omega^2 - (\varphi'(0))^2) \cdot \cos^2(\varphi(0) - \alpha(0)) - k\varphi'(0) \cdot \sin\{2 \cdot (\varphi(0) - \alpha(0))\}}}{\sqrt{[\omega^2 - (\varphi'(0))^2]^2 + (2k \cdot \varphi'(0))^2}}, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2k\varphi'}{\omega^2 - (\varphi')^2}, \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\omega \cdot \cos\{\varphi(0) - \alpha(0)\}}{\varphi'(0) \cdot \sin\{\varphi(0) - \alpha(0)\} - k \cdot \cos\{\varphi(0) - \alpha(0)\}}.$$

Первое слагаемое в (7) представляет "вынужденные" колебания в системе, второе – "свободные" затухающие колебания. Видно, что вынужденные колебания в первом приближении происходят так, как если бы $\varphi(t)$ была мгновенной частотой.

Пусть $\tau_0 \approx t$ (околорезонансный этап разгона двигателя – режим II)

$$x(t) \approx A \cdot \sin(\omega t + \beta) - \frac{P(\tau) \cdot \sin[\varphi(t) - \gamma(t)]}{2\omega \cdot \sqrt{[\omega + \varphi'(t)]^2 + k^2}} + \frac{P(0) \cdot \exp\{-kt\} \cdot \sin(\omega t - \gamma(0))}{2\omega \cdot \sqrt{[\omega + \varphi'(0)]^2 + k^2}}, \quad (8)$$

$$\beta = \varphi(\tau_0) - \omega \cdot \tau_0 + \varepsilon, \gamma = \arctg\left\{\frac{\varphi'(t) + \omega}{k}\right\}.$$

Третьим слагаемым в соотношении (8) можно пренебречь благодаря затуханию. Первое слагаемое описывает "свободные" затухающие колебания с амплитудой

$$A = \frac{P(\tau_0) \cdot \exp\{-k \cdot (t - \tau_0)\}}{2\omega} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(\tau_0)}} \cdot \left\{ [C(z_0) + C(z)]^2 + [S(z_0) + S(z)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

$$z_0 = \tau_0 \cdot \sqrt{\frac{\varphi''(\tau_0)}{2}}, z = (t - \tau_0) \cdot \sqrt{\frac{\varphi''(\tau_0)}{2}}, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z \exp\{i\xi^2\} d\xi = F(z) = C(z) + i \cdot S(z).$$

где $C(z), S(z)$ - интегралы Френеля.

Функции $C(z)$ и $S(z)$ осциллируют вокруг числа $\frac{1}{2}$, следовательно, "среднее"

значение амплитуды

$$\bar{A} = \frac{P(\tau_0)}{2\omega} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\varphi''(\tau_0)}} \cdot \exp\{-k \cdot (t - \tau_0)\}. \quad (10)$$

убывает, а сама амплитуда имеет постепенно сглаживающиеся экстремумы.

Второе слагаемое в (8) представляет собой "вынужденные" колебания. Сумма первого и второго слагаемых (8) и дает характерные биения при переходе через резонанс.

Пусть $t \gg \tau_0$ (режим III – далеко зарезонансный разгона двигателя)

$$x(t) \approx \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(\tau_0)}} \cdot P(\tau_0) \cdot \exp\{-k(t - \tau_0)\} \cdot \sin(\omega t + \gamma) - \frac{P(t) \cdot \sin[\varphi(t) - \gamma(t)]}{2\omega \sqrt{[\omega + \varphi'(t)]^2 + k^2}}, \quad (11)$$

$$\gamma = \varphi(\tau_0) - \omega \tau_0 + \frac{\pi}{4}.$$

Первое слагаемое в (11) дает "свободные" затухающие колебания, второе – "вынужденные" колебания.

Для случая $P(t) = P = const$, $\varphi(t) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 + \delta$ рассмотренного в [2], можно получить для соответствующих режимов разгона двигателя (I, II, III),

$$I. \quad x \approx \frac{P \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \alpha t^2 + \delta - \varepsilon(t)\right)}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2 \cdot t^2)^2 + (2k\alpha t)^2}} + \frac{P \cdot \exp\{-kt\} \cdot \cos \delta \cdot \sin(\omega t + \varepsilon_1)}{\omega \sqrt{\omega^2 + k^2}}, \quad (12)$$

$$tg\varepsilon(t) = \frac{2k \cdot \alpha \cdot t}{\omega^2 - \alpha^2 \cdot t^2}, tg\varepsilon_1 = \frac{\omega}{k}.$$

$$II. \quad x \approx \frac{P}{2\omega} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \cdot \exp\{-k \cdot (t - \tau_0)\} \cdot \sqrt{[C(z_0) + C(z)]^2 + [S(z_0) + S(z)]^2} \cdot \sin(\omega t + \gamma) -$$

$$- \frac{P \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \alpha t^2 - \gamma(t)\right)}{2\omega \sqrt{(\omega + \alpha t)^2 + k^2}} + \frac{P \cdot \exp\{-kt\} \cdot \sin(\omega t - \gamma(0))}{2\omega \sqrt{\omega^2 + k^2}}, tg\gamma(t) = \frac{\varphi'(t) + \omega}{k}. \quad (13)$$

$$\text{III. } x \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \cdot \frac{P}{\omega} \cdot \exp\{-k \cdot (t - \tau_0)\} \cdot \sin(\omega t + \gamma_0) - \frac{P \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot \alpha t^2 + \delta - \gamma(t)\right]}{2\omega \cdot \sqrt{(\omega + \alpha t)^2 + k^2}}, \quad (14)$$

$$\gamma_0 = \varphi(\tau_0) - \omega\tau_0 + \frac{\pi}{4}.$$

Формулы (12) и (14) совпадают с формулами Каца [2], полученными для систем со сосредоточенными параметрами.

Выводы

Применение метода стационарной фазы в изучении переходного процесса в линейной дискретно-континуальной системе с одной степенью свободы, моделирующей виброформование бетонных/строительных смесей с помощью вибрационных машин (виброплощадок), позволяет получить приближенные аналитические зависимости (от времени t) закона движения подобных систем.

Законы движения системы существенно различаются для дорезонансного, околорезонансного и далекого от резонансного режимов разгона двигателя.

Полученные результаты совпадают с известными в литературе результатами А.М. Каца (как частным случаем), но вдобавок описывают влияние на переходной процесс бетонной смеси как подсистемы с распределенными по высоте формируемого изделия (h) свойствами.

В дальнейшем полученные зависимости могут быть использованы в инженерной практике анализа и уточненного расчета переходных процессов в подобных системах с целью понижения возникающих перегрузок, воздействующих на рабочие органы, а также для оптимизации управления процессом виброформования строительных изделий и материалов.

Литература

1. Нелинейные колебания механических систем/Избранные труды Кононенко В.О. – К.: Наукова думка, 1980. – 384с.
2. Кац А.М. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс// Инженерный сборник. – 1947. – Т. 3. – Вып. №2. – С. 100-125.
3. Филлипов А.П. Вынужденные колебания линейной системы при переходе через резонанс. – В кн.: Колебания в турбомашинах. Ин-т машиноведения СССР. – М.: Изд-во АН СССР, 1956.
4. Пресняков В.К., Филер З.Е. Переход через резонанс колебательной системы совместно с двигателем//Механика машин. – М.: Наука, 1969. – Вып. 15-16.
5. Филер З.Е. Изучение переходного процесса в линейной системе с одной степенью свободы методом стационарной фазы// Вибротехника. – Каунас, 1979. – Вып. №1(35). – С. 19-25.
6. Чубук Ю.Ф., Назаренко И.И., Гарнец В.Н. Вибрационные машины для уплотнения бетонных смесей. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1985. – 168с.
7. Шмигальский В.Н. Формование изделий на виброплощадках. – М.: Стройиздат, 1968. – 104с.
8. Сердюк Л.И. Управляемые вибровозбудители – основа повышения эффективности вибрационных машин// Строительные и дорожные машины. – 1987. – № 12. – С. 21-22.
9. Сердюк Л.И. К вопросу о выборе математической модели вибромашины//Теория механизмов и машин. – Харьков, 1987. – № 46. – С. 63-68.
10. Вакман Д.Е. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. – М.: Советское радио, 1962. – 250с.
11. Жарий О.Ю., Улитко А.Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн.: Учебное пособие. – К.: Вища школа. Головное издательство, 1989. – 184с.