

УДК 539.3

Гречух Н.А.
Пискунов С.О., канд. техн. наук,
Остапенко Р.М.

ОБЧИСЛЕННЯ КІН В ПРОСТОРОВИХ ТІЛАХ ОБЕРТАННЯ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Проведено поширення методики обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень прямим методом на основі напіваналітичного методу скінченних елементів на випадок температурного навантаження просторових тіл обертання.

Вступ. Складні теплові режими, за яких відбувається експлуатація частини відповідальних елементів конструкцій, мають визначальне значення при оцінці їх напружено-деформованого стану. Наявність великих градієнтів температур призводить до виникнення температурних складових деформацій. У зв'язку з цим актуальним є питання врахування температурних навантажень при проведенні прогнозування руйнування.

Обчислення параметрів механіки руйнування є одним з найважливіших етапів розрахунку об'єктів з тріщинами. Цьому питанню присвячена значна кількість публікацій, в тому числі монографії [1,2]. Їх аналіз свідчить, що при розрахунках на основі методу скінченних елементів (МСЕ) найчастіше використовуються прямі методи, метод податливості, та безпосереднє обчислення J -інтегралу.

У випадку пружного деформування або виникнення незначних пластичних деформацій у вершині тріщини визначення несучої здатності тіл з тріщинами може бути виконано в межах лінійної механіки руйнування із застосуванням коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН).

Значна кількість відповідальних елементів просторових конструкцій являють собою тіла обертання (рис. 1) До таких тіл, зокрема, відносяться ротори та диски енергетичних установок, фрагменти корпусних деталей, захисні оболонки ядерних реакторів тощо. Враховуючи складність форми вказаних об'єктів і суттєво просторовий характер напружено-деформованого стану, їх необхідно розглядати, застосовуючи тривимірну постановку задачі механіки деформівного твердого тіла. Розв'язання таких задач вимагає залучення чисельних методів. Для тіл обертання доцільним є застосування модифікації методу скінченних елементів (МСЕ) – напіваналітичного МСЕ (НМСЕ).

При використанні НМСЕ скінченно-елементна дискретизація досліджуваних об'єктів відбувається в їх поперечному перерізі, а вздовж

направляючої використовується один скінчений елемент, який повторює форму тіла. При наявності тріщин розбивка об'єкта на скінченні елементи передбачає згущення сітки в привершинній області. Привершинна область має бути розташованою перпендикулярно до фронту тріщини. Для тіл обертання виділяють два типи тріщин: поперечні (рис.1,а), фронт яких розташований в площині поперечного перерізу тіла і є ортогональним до осі z^3 , і поздовжні (рис.1,б), фронт яких збігається за напрямком з віссю z^3 .

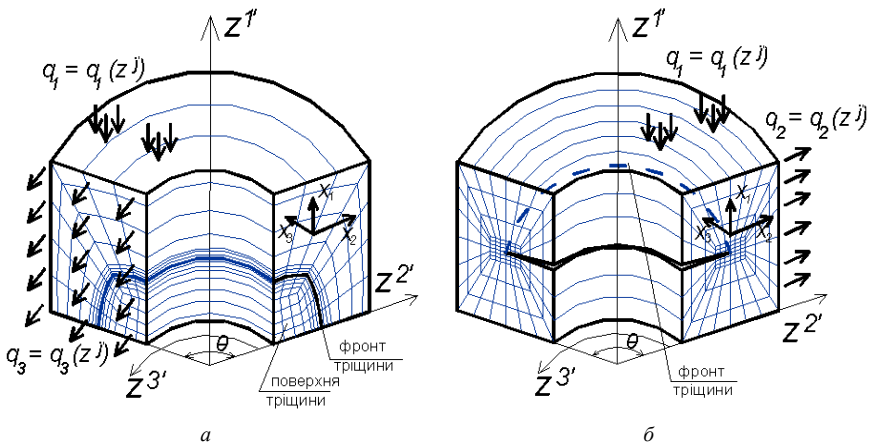


Рис.1. Скінченно-елементна дискретизація тіла обертання з поперечною (а) та поздовжньою (б) тріщинами

Відомий досвід використання НМСЕ стосується задач про визначення КІН в призматичних тілах [6] та тілах обертання [8] з тріщинами лише під дією силових навантажень. Питання визначення температурних деформацій в призматичних тілах розглянуто в [3]. Визначення ж КІН із урахуванням впливу температури до цього часу не проводилось.

Мета даної роботи полягає у виведенні розв'язувальних співвідношень НМСЕ для обчислення температурних деформацій в тілах обертання, реалізації методики визначення КІН при температурному навантаженні та дослідженні вірогідності отримуваних результатів для тіл обертання.

1. Співвідношення термопружності та лінійної механіки руйнування при температурному навантаженні. Для дослідження процесів деформування та руйнування тривимірних тіл доцільно використовувати такі системи координат: базисну циліндричну z^j та місцеву криволінійну систему координат x^i , природно пов'язану з

геометрією досліджуваного об'єкта. При цьому вісь x^3 збігається за напрямком із вісю $z^{3'}$.

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення $z_{,j}^{i'}$, що обумовлює зв'язок між місцевою та базисною системами координат [4]:

$$z_{,j}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad z_{,3}^{\alpha} = z_{,\alpha}^{3'} = 0. \quad (1)$$

Всі індекси, позначені грецькими буквами, набуватимуть значення 1, 2, а позначені латинськими – 1, 2, 3.

Компоненти метричного тензора g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензора базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z_{,m}^{i'} z_{,n}^{j'} g_{i'j'}. \quad (2)$$

При дослідженні тіл обертання для базисної циліндричної системи координат відмінними від нуля будуть такі компоненти метричного тензора:

$$g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\gamma'} z_{,\beta}^{\gamma'}, \quad g_{33} = (z_{,3}^{3'}) (z^{2'})^2. \quad (3)$$

При термосиловому навантаженні повні деформації ϵ_{ij} можуть бути подані у вигляді суми пружних (зумовлених зовнішніми силовими факторами) ϵ_{ij}^e та температурних (викликаних температурним полем) ϵ_{ij}^T складових, тобто

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^T. \quad (4)$$

Компоненти тензору напружень σ^{ij} запишемо через компоненти тензору пружних деформацій у відповідності із узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl}^e. \quad (5)$$

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою:

$$\epsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (6)$$

де $\alpha_T = \alpha_T(z^k, T)$ – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, $\Delta T = T - T_0$ – приріст температури в досліджуваній точці тіла в даний момент часу відносно його вихідного ненапруженого стану при $T = T_0$.

При дії на тіло лише поверхневих навантажень та при заданих на його поверхні переміщеннях для тріщин нормального відриву взаємозв'язок між переміщеннями, напруженнями та коефіцієнтом інтенсивності напружень першого роду (КІН) K_I в пов'язаній з вершиною тріщини системі координат $y^{\alpha''}$ ($\alpha = 1, 2$) визначається формулами:

$$\begin{aligned}\sigma^{1''1''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma^{1''2''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma^{2''2''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right),\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}u_{1''} &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2}), \\ u_{2''} &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}),\end{aligned}\quad (8)$$

де r, θ – полярні координати з початком в вершині тріщини (рис. 2); μ – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона.

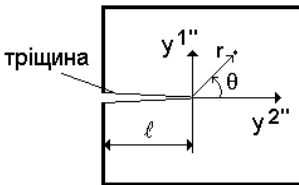


Рис.2

Відповідно, на основі відомих величин параметрів напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини, поданих в системі координат y^i'' , у кожній точці в околі вершини тріщини КІН може бути обчислений за формулами:

$$K_I(\sigma) = \frac{\sigma^{1''1''} \sqrt{2\pi r}}{\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)}, \quad (9)$$

$$K_I(u) = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{u_{1''} G}{\sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2G - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)}. \quad (10)$$

Дж. Сі в [10] показав, що формули (7) та (8) лишаються справедливими і у випадку термосилового навантаження. Отримаємо наближені вирази для переміщень в околі тріщини з урахуванням температури. Для цього запишемо закон Гука для точки з температурою T поблизу вершини тріщини, використовуючи вирази для напружень (7) та припускаючи, наприклад, що виконуються умови плоскої деформації:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha \cdot (1 + \nu) \cdot T = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} [(1 - \nu^2) \cdot f_x - \nu \cdot (1 + \nu) \cdot f_y],$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha \cdot (1 + \nu) \cdot T = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} [(1 - \nu^2) \cdot f_x - \nu \cdot (1 + \nu) \cdot f_x], \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{K_I}{G\sqrt{2\pi r}} \cdot f_{xy},$$

$$\text{де } f_x = f_x(\theta), \quad f_y = f_y(\theta), \quad f_{xy} = f_{xy}(\theta).$$

Відомо, що при відсутності температурного навантаження ($T=0$) розв'язок цієї системи набуде вигляду (8). Простою підстановкою перевіряється, що якщо вважати температуру постійною в околі вершини тріщини, то розв'язками системи (11) будуть функції:

$$u_i = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot F_i(\theta) + \alpha \cdot k \cdot T y^{i''}, \quad (12)$$

де $k=1$ у випадку плоского напруженого стану, $k=1-\nu^2$ у випадку плоскої деформації. Ці співвідношення показують, що для визначення

K_I за переміщенням $y^{1''}$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$ та $y^{2''}$ при $\theta = \pi$ можна використовувати формули (8), оскільки в цьому випадку поправочний член дорівнює нулю.

2. Неоднорідний круговий незамкнений скінченний елемент. Для апроксимації просторових неоднорідних тіл обертання застосовуються просторові неоднорідні кругові скінченні елементи, які являють собою криволінійну призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді дуги кола [2].

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат x^i , яка природно пов'язана з геометрією об'єкта так, що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перерізу скінченного

елемента, а вісь x^3 спрямована вздовж направляючої та співпадає за напрямком з $z^{3'}$. При цьому в місцевій системі координат поперечний переріз скінченного елемента відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2. Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах скінченного елемента.

Розподіл температури у межах поперечного перерізу СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (13)$$

де $T_{(S_1 S_2)}$ – вузлові значення температури, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, які визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перерізу елемента у місцевій системі координат x^i .

Згідно з прийнятим законом розподілу (13), визначимо значення похідних від температури в центрі поперечного перерізу скінченного елемента:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)}; \quad \overset{\circ}{T}_{,\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} S_{\alpha}. \quad (14)$$

Одержання виразів для вектора вузлових реакцій і матриці жорсткості здійснюється на основі моментної схеми скінченних елементів та варіаційного принципу Лагранжа. Кінцеві вирази вектора вузлових реакцій і матриці жорсткості мають вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{R}_I \right\} = \left\{ \sum_{\gamma=1}^2 \left[\overset{\circ}{B}_{\gamma} \right] \{ \sigma \}_{I\gamma} + \frac{1}{12} \sum_{\gamma=1}^2 \left[\overset{\circ}{B}_{\gamma,\alpha} \right] \{ \sigma \}_{I\alpha\gamma} \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}, \quad (15)$$

де

$$\{ \sigma \}_{I1} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \phi^{(I)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \phi_m^{(I)} H_m,$$

$$\{\sigma\}_{I2} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(I)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_{,3m}^{(I)} H_m ,$$

$$\{\sigma\}_{I\alpha 1} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(I)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_m^{(I)} H_m ,$$

$$\{\sigma\}_{I\alpha 2} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(I)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_{,3m}^{(I)} H_m$$

– напруження, що обчислюються за величинами деформацій в тому числі з урахуванням температурних складових.

$$\begin{aligned} [K]_{ln} = & \left\{ \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \left[\overset{\circ}{B}_{\beta} \right]^T [D]_{\beta\gamma}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{\gamma} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 \left[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^T [D]_{\beta\gamma\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{\gamma,\alpha} \right] \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} , \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$[D]_{\beta\gamma}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_{\beta}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \psi_{\gamma}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_{\beta m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \psi_{\gamma m}^{(n)} H_m ,$$

$$[D]_{\beta\gamma\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_{\beta}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \psi_{\gamma}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_{\beta m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \psi_{\gamma m}^{(n)} H_m$$

– матриця фізико-механічних властивостей матеріалу;

$$\begin{aligned} \beta=1 \quad \psi_{\beta}^{(l)} &= \varphi_m^{(l)}, \quad \beta=2 \quad \psi_{\beta}^{(l)} = \varphi_{,3m}^{(l)}, \\ \gamma=1 \quad \psi_{\gamma}^{(n)} &= \varphi_m^{(n)}, \quad \gamma=2 \quad \psi_{\gamma}^{(n)} = \varphi_{,3m}^{(n)} . \end{aligned}$$

При використанні НМСЕ та відповідному поданні переміщень і зовнішніх навантажень у вигляді розкладання за системою базисних функцій вектор вузлових реакцій $\{R\}^m$ і матриця жорсткості $[K]$ набувають блочної структури [2]. Зважаючи на це, для розв'язання отриманої системи рівнянь раціональним є використання блочно-

ітераційних алгоритмів. В даній роботі розв'язання системи рівнянь здійснюється на основі методу блочних ітерацій із послідовною верхньою релаксацією:

$$\{u_l\}_{n+1}^m = \{u_l\}_n^m + \beta [K_{ll}]^{-1} (\{Q_l\}^m - \{R_l\}_n^m). \quad (17)$$

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L (\{\Delta u\}_l^n)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L (\{u\}_l^n)^2, \quad (18)$$

де $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$ – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності отриманого розв'язку.

3. Визначення температурних деформацій. Розв'язання задачі термопружності передбачає обчислення компонент напружень, що входять до вектора вузлових реакцій із урахуванням температурних складових деформацій. Зважаючи на складність топології дискретної моделі просторового тіла з тріщиною, отримання розв'язувальних співвідношень НМСЕ необхідно проводити в термінах фізичних компонент тензорів напружень та деформацій.

Будемо вважати, що визначник матриці, що складена з компонент метричного тензору g_{ij} , а також коефіцієнт лінійного розширення α_T дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$g = g|_{x^\alpha=0}; \quad \alpha_T = \alpha_T|_{x^\alpha=0}. \quad (19)$$

Згідно з моментною схемою скінченних елементів (МССЕ) [9] компоненти тензора фізичних температурних деформацій в поперечному перерізі, що відповідає точці інтегрування, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^{\circ T} + \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}^{\circ T} x^{(3-\alpha)}; \\ \tilde{\varepsilon}_{12}^T &= \tilde{\varepsilon}_{12}^{\circ T}; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^T &= 0; \\ \tilde{\varepsilon}_{33}^T &= \tilde{\varepsilon}_{33}^{\circ T} + \tilde{\varepsilon}_{33, \beta}^{\circ T} x^\beta. \end{aligned} \quad (20)$$

Фізичні компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}. \quad (21)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних температурних деформацій в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компонент температурних деформацій в місцевій системі координат з урахуванням (20) та з підстановкою (6):

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \varepsilon_{\alpha(\alpha)}^T = \alpha_T \Delta T; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{\partial(\alpha_T \Delta T)}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \alpha_T \Delta T_{,(3-\alpha)}; \\ \tilde{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \varepsilon_{12}^T = \alpha_T \Delta T \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}; \\ \tilde{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{1}{g_{33}} \varepsilon_{33}^T = \alpha_T \Delta T; \\ \tilde{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}^T}{\partial x^\beta} = \frac{\partial(\alpha_T \Delta T)}{\partial x^\beta} = \alpha_T \Delta T_{,\beta}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{де } \varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \varepsilon_{ij,\beta}^T = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

Коефіцієнтом розкладання $\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}^T}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\alpha=0}$ нехтуємо, як величиною більш

високого порядку малості.

Згідно з формулою (21), підставляючи (22), знаходимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha(\alpha)}^T &= \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T g_{\alpha(\alpha)} = \alpha_T \Delta T g_{\alpha(\alpha)}; \\ \varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T g_{\alpha(\alpha)} = \alpha_T \Delta T_{,(3-\alpha)} g_{\alpha(\alpha)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} \sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \overset{\circ}{g}_{12}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} \overset{\circ}{g}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \overset{\circ}{g}_{33}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} \overset{\circ}{g}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{,\beta} \overset{\circ}{g}_{33}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій через вузлові температури (14):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} 2S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{12}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33} 2S_{\beta}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\} = \left[\overset{\circ}{B}^T \right] \{ T \}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\} = \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] \{ T \}, \tag{25}$$

де

$$\begin{aligned}
\{ T \}^T &= \{ T_{(-1;-1)} \quad T_{(1;-1)} \quad T_{(-1;1)} \quad T_{(1;1)} \}; \\
\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T \right\};
\end{aligned}$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}^T \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^T \right\}.$$

$$\left[\overset{\circ}{B}^T \right] = \left[\left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;1)} \right]; \quad (26)$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] = \left[\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;1)} \right].$$

Значення компонент підматриць $\left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(S_1, S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(S_1, S_2)}$ у виразі

(26) для неоднорідних призматичних тіл визначаються відповідно до формул (24):

$$\left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{11} \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{12} \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{22} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}; \quad \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{\alpha} \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

В цих виразах компоненти метричного тензора для тіл обертання обчислюються згідно формул (3).

4.Методика обчислення КІН в тілах обертання на основі прямого методу. У відповідності з існуючими прийомами визначення КІН прямим методом їх значення обчислюються на основі співвідношень (7) та (8) в окремих точках чи вздовж деякої лінії, що проходить через вершину тріщини за результатами визначення напружено-деформованого стану (НДС).

Як показали дослідження [5], найбільш точні результати визначення КІН для поздовжніх тріщин забезпечуються при використанні біля вершини тріщини зони згущення квадратної форми розміром 6×6 скінченних елементів (рис. 3) [6]. Поперечний переріз цих елементів має квадратну форму з розмірами $1/10$ довжини тріщини. В частині зони, що межує з поверхнею тріщини, КІН визначаються за переміщеннями (10), а

в частині зони, що розташована за фронтом тріщини КІН визначаються за величинами напружень (9). В межах кожної із зазначених частин привершинної зони області визначається середнє значення КІН за напруженнями $K_I(\sigma)$ і переміщеннями $K_I(u)$, які в свою чергу усереднюються для визначення результуючого КІН:

$$K_I = \frac{K_I(\sigma) + K_I(u)}{2} \quad (28)$$

Для тіл з повздовжніми тріщинами визначення КІН за переміщеннями

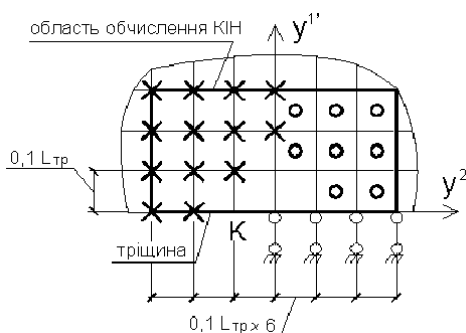


Рис.3. Згущення скінченно-елементної сітки в привершинній зоні тіла з повздовжньою тріщиною

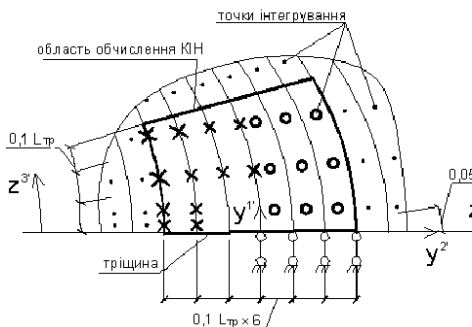


Рис. 4 Привершинна область для обчислення КІН у тілі з поперечною тріщиною і розташування точок інтегрування

здійснюється у вузлах (на схемі позначені хрестиками), а за напруженнями – в центрі скінченних елементів (на схемі позначені кружками), рис. 3. В тілах з поперечними тріщинами точки обчислення КІН за переміщеннями та напруженнями в межах привершинної області визначаються розташуванням точок інтегрування вздовж осі z^3 (рис.4).

Враховуючи вимоги методики, що пов'язані з наявністю сингулярності, при обчисленні КІН за переміщеннями з розгляду виключаються точки, що розташовані на відстанях менших, ніж $0,1L_{тр}$ вздовж осей y^1 і y^2 від вершини тріщини, а при обчисленні КІН за напруженнями – точки, розташовані ближче, ніж $0,05L_{тр}$ від осі y^2 ($L_{тр}$ – характерний розмір тріщини).

Значення КІН також може бути обчислене за переміщенням u у найближчому до вершини тріщини вузлі, який у випадку поздовжньої тріщини лежить на її поверхні (т. К, рис.3) $K_I = K_I(u_K)$.

5. Вірогідність обчислення КІН прямим методом при температурному навантаженні. З метою дослідження вірогідності застосування викладеного вище підходу була розв'язана задача про визначення КІН для порожнистого циліндра з середнім радіусом $R_m = 50\text{см}$, висотою $2h = 100\text{см}$, товщиною стінки $t = 10\text{см}$ та з зовнішньою кільцевою тріщиною глибиною $l = 5\text{см}$, фронт якої збігається із середнім радіусом поперечного перерізу циліндра (рис. 5).

На внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра підтримуються постійні температури, тоді для точки з радіусом r температура T описується виразом:

$$T(r) = \Delta T \cdot \ln\left(\frac{R_m + t/2}{r}\right) / \ln\left(\frac{R_m + t/2}{R_m - t/2}\right), \quad (29)$$

де $\Delta T = 100^\circ$ - перепад температури по товщині стінки.

Враховуючи геометричні розміри циліндра та значення перепаду температури формула (29) набуде вигляду:

$$T(r) = 100 \cdot \ln\left(\frac{55}{r}\right) / \ln\left(\frac{11}{9}\right).$$

У випадку термосилового навантаження визначення КІН за переміщеннями здійснюється на основі формули (12), яка для даного тестового прикладу набуває вигляду:

$$K_I = \frac{u_1 - \alpha \cdot (1 + \nu) \cdot T \cdot (-z^2 + R_m)}{\sin \frac{\theta}{2} (2 - 4\nu + \cos \theta)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot 2G. \quad (30)$$

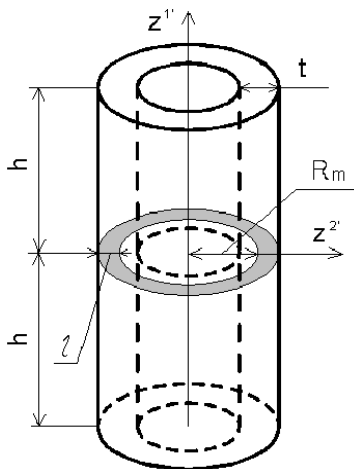


Рис.5. Порожнистий циліндр з зовнішньою тріщиною

Значення температури T визначається за формулою (29), а $z^{2'}$ є декартовою координатою, яка в даному випадку змінюється вздовж тріщини в межах привершинної області.

В якості еталонного прийнято результати наведені в [7], де величина КІН подається із використанням безрозмірного множника $F = \frac{K_I}{\alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot \sqrt{\pi \cdot l}}$, який залежить від відносної глибини тріщини і при $l/t = 0,5$ становить 0,55.

Скінченно-елементна модель (СЕМ), побудована в осях $z^{1'}$ – $z^{2'}$, складається з чотирьох сіткових фрагментів (рис.6а). Згідно з [7] при побудові дискретної моделі розміри СЕ привершинної області прийняті 1/10 довжини тріщини (СЕМ №1). Кількість скінчених елементів – 230, кількість невідомих складає 528. Зважаючи на значну похибку отриманої величини КІН (табл.1), було зменшено розміри СЕ у привершинній області до 1/20 довжини тріщини (СЕМ №2, рис.6,б). Кількість невідомих у СЕМ №2 становить 1320, кількість скінчених елементів – 602. Це дозволило зменшити похибку обчислення КІН, отриманого із використанням усереднення по привершинній області, більш ніж вдвічі. Результати визначення $K_I(u)$ у привершинному вузлі є менш точними у порівнянні з еталонним, ніж при усередненні.

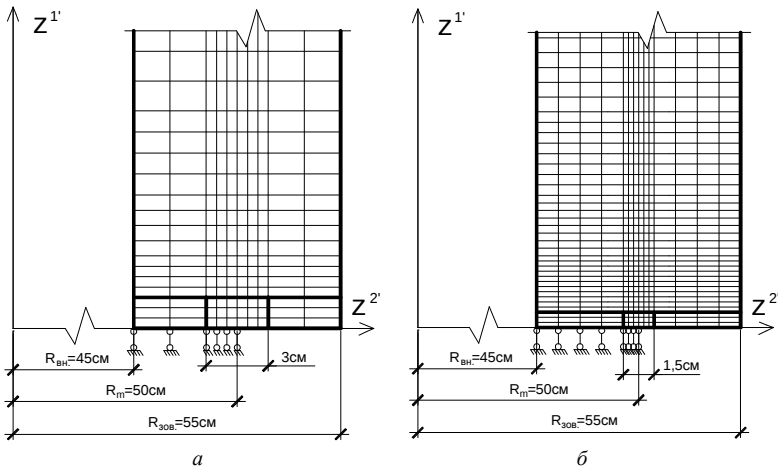


Рис.6. СЕМ для розрахунку КІН в порожнистому циліндрі:
СЕМ №1(а) і СЕМ №2 (б)

Таблиця 1

Порівняння КІН, отриманого прямим методом
в залежності від щільності СЕМ

	СЕМ №1	СЕМ №2
$\frac{3}{2}$ КИН, кг/ см ²		
$K_I(\sigma)$	$1,301 \times 10^{-3}$	$1,699 \times 10^{-3}$
$K_I(u)$	$2,677 \times 10^{-3}$	$2,491 \times 10^{-3}$
$K_I, (28)$	$1,989 \times 10^{-3}$	$2,095 \times 10^{-3}$
$K_I(u_K)$	$2,4 \times 10^{-3}$	$2,291 \times 10^{-3}$
$K_I, [7]$	$2,179 \times 10^{-3}$	
Похибка, %		
$K_I, (28)$	8,7	3,8
$K_I(u_K)$	9,2	5,1

Отримані результати засвідчили вірогідність розробленої методики для визначення КІН при температурному навантаженні. Для одержання КІН з похибкою в межах 5% необхідним є застосування скінчених елементів, розмір яких є вдвічі меншим ніж для отримання результату такої ж точності при силовому навантаженні. Таким чином, методика забезпечує отримання вірогідних результатів та може бути використана для розв'язання лінійних задач механіки руйнування при температурному навантаженні.

1. Атлури С. Вычислительные методы в механике разрушения. – М.: "Мир", 1990.-392с.
2. Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С. Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П. Алгоритм розв'язання просторової задачі термов'язкопружнопластичності призматичних тіл // Опір матеріалів і теорія споруд. – №78, 2006. – с. 3-17.
4. Блох В.И. Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьковск. гос. университета, 1964. – 484с.
5. Гуляр А.И., Степанко В.И. Определение коэффициентов интенсивности напряжений для неосимметрично нагруженных тел вращения с кольцевыми трещинами. //Сопротивление материалов и теория сооружений. – К., 1985.- Выпуск 47.- с.40-44.

6. Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О. Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. – № 73.– 2003. – с.73-84.
7. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: “Наука”, 1980. – 256 с.
8. Пискунов С.О., Шкриль О.О., Мицюк С.А. Визначення параметрів лінійної механіки руйнування для неоднорідних кругових тіл при силовому навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. – №78, 2006. – с. 26-39.
9. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учётом жестких смещений. // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып. 24. – с. 147-156.
10. Си Дж. О сингулярном характере температурных напряжений у вершины трещины. – Труды американского общества инженеров-механиков. Сер.Е, 1962, т.29, №3, с.157-159.

Надійшло до редакції 09.11.2006 р.