УДК 534-21:537.226.86

Шульга М. О., д-р фіз.-мат. наук,
Григор'єв С.А.

ПРУЖНОЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ РАДІАЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАНОЇ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ КУЛІ З РОЗРІЗНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ

Вступ. Порожнисті п'єзокерамічні кулі застосовуються як конструктивні елементи пристроїв, що діють на основі ефекту зв'язаності електричного поля та механічних деформацій [2, 3]. В процесі експлуатації п'єзоелектричні перетворювачі зазнають динамічних електричних збурень, що вимагає кількісного дослідження електромеханічного стану тіла при нестаціонарних режимах роботи.

Дана робота присвячена побудові чисельного методу розв'язання та аналізу осесиметричних нестаціонарних коливань порожнистої п'єзокерамічної поляризованої по товщині кулі при електричних динамічних збуреннях. При конкретних розрахунках аналізується випадок розрізного електродного покриття на зовнішніх поверхнях кулі.

1. Постановка задачі. Розглядаються осесиметричні коливання порожнистої кулі, меридіанний переріз якої в сферичній системі координат r,α,β займає область $D=\{R-h\le r\le R+h,\ 0\le\alpha\le\pi\}$. Оскільки основні електромеханічні характеристики не залежать від координати β, то розв'язок шукається в вигляді функцій $u_r(r,\alpha,t)$, $u_\alpha(r,\alpha,t)$, $\varphi(r,\alpha,t)$.

Осесиметричні коливання п'єзокерамічної кулі описуються рівняннями руху [4, 6]

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}(2\sigma_{rr}-\sigma_{\alpha\alpha}-\sigma_{\beta\beta}+\sigma_{r\alpha}ctg\alpha)+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\alpha}}{\partial\alpha}; \qquad (1)$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{r\alpha}}{\partial r}+\frac{1}{r}(3\sigma_{r\alpha}+(\sigma_{\alpha\alpha}-\sigma_{\beta\beta})ctg\alpha)+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha},$$

та квазістатичним наближенням рівнянь Максвела

$$\frac{\partial D_r}{\partial r}+\frac{2D_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial D_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{ctg\alpha}{r}D_\alpha=0, \qquad (2)$$

які доповнюються матеріальними співвідношеннями при радіальній поляризації

$$\sigma_{rr} = c_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{13}}{r}(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + 2u_r + u_\alpha ctg\alpha) + e_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial r};$$
$$\sigma_{\alpha\alpha} = c_{13}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{33}}{r}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + (c_{33} + c_{23})\frac{u_r}{r} + \frac{c_{23}}{r}u_\alpha ctg\alpha + e_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial r};$$
$$\sigma_{\beta\beta} = c_{13}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{23}}{r}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + (c_{33} + c_{23})\frac{u_r}{r} + \frac{c_{33}}{r}u_\alpha ctg\alpha + e_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \qquad (3)$$
$$\sigma_{r\alpha} = 2c_{55}(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r}) + e_{53}\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha};$$
$$D_r = e_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{e_{31}}{r}(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + 2u_r + u_\alpha ctg\alpha) - \varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial r};$$
$$D_\alpha = 2e_{53}(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r}) - \varepsilon_{33}\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.$$

Тут u_r, u_α і σ_{rr}, $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{r\alpha}$ – механічні переміщення і напруження, D_r, D_α – компоненти вектора електричної індукції, φ – електричний потенціал, c_{11}^E, c_{23}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{55}^E – пружні модулі матеріалу при постійному електричному полі, e_{31}, e_{11}, e_{53} – п'єзоелектричні модулі, ε_{11}^S, ε_{33}^S – діелектричні проникності при постійній деформації, ρ – густина матеріалу.

Задача (1)–(3) замикається початковими умовами, що накладаються на переміщення та їх швидкості [7]

$$u_r(r,\alpha,t=0) = \overset{0}{f}(r,\alpha), \quad \frac{\partial u_r}{\partial t}(r,\alpha,t=0) = \overset{1}{f}(r,\alpha); \qquad (4)$$
$$u_\alpha(r,\alpha,t=0) = \overset{0}{g}(r,\alpha), \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(r,\alpha,t=0) = \overset{1}{g}(r,\alpha),$$

та граничними умовами, що описують поведінку електричних та механічних величин на границі тіла. Нехай на зовнішніх електродованих поверхнях сфери задано різницю потенціалів ($\alpha \in [0,\pi]$)

$$\varphi(r_i,\alpha,t) = \pm V(\alpha,t), \qquad (5)$$

де $i = 1,2$, $r_1 = R - h$, $r_2 = R + h$.

Механічні граничні умови на зовнішніх поверхнях накладаються на переміщення або напруження

$$u_r(r_i,\alpha,t)=y_{r,i}(\alpha,t)\ \vee\ \sigma_{rr}(r_i,\alpha,t)=q_{r,i}(\alpha,t)\,;$$
$$u_\alpha(r_i,\alpha,t)=y_{\alpha,i}(\alpha,t)\ \vee\ \sigma_{r\alpha}(r_i,\alpha,t)=q_{\alpha,i}(\alpha,t)\,. \tag{6}$$

В силу симетрії в полюсах $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\pi$ виконуються умови

$$\frac{\partial u_r}{\partial\alpha}(r,\alpha_i,t)=0\,,\ u_\alpha(r,\alpha_i,t)=0\,,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(r,\alpha_i,t)=0\,,\ i=1,2\,. \tag{7}$$

Перейдемо до безрозмірних величин

$$r=R+x\,,\ \bar{x}=\frac{x}{h}\,,\ \bar{t}=\frac{t}{t_h}\,,\ \bar{u}_i=\frac{u_i}{h}\,,\ \bar{\sigma}_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}\,,\ \bar{\varphi}=\frac{\varphi}{h}\sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00}}}\,,\varepsilon=\frac{h}{R}\,,$$
$$\overline{D}_i=\frac{D_i}{\sqrt{c_{00}\varepsilon_{00}}}\,,\ \bar{\rho}=\frac{\rho}{\rho_{00}}\,,\ \bar{c}_{ij}=\frac{c_{ij}}{c_{00}}\,,\ \bar{e}_{ij}=\frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00}\varepsilon_{00}}}\,,\ \bar{\varepsilon}_{ii}=\frac{\varepsilon_{ii}}{\varepsilon_{00}}\,, \tag{8}$$

де ρ_{00}, c_{00}, ε_{00}, $t_h=h\sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ – нормуючі величини, ε – параметр кривизни. Надалі знаки безрозмірності опускаються.

Після підстановки (3) в (1), (2) та обезрозмірювання (8) маємо рівняння електропружності відносно переміщень та електричного потенціалу в безрозмірній формі

$$\rho\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2}=c_{11}\frac{\partial^2u_r}{\partial x^2}+2c_{11}\xi\frac{\partial u_r}{\partial x}+2(c_{13}-c_{33}-c_{23})\xi^2u_r+2c_{55}\xi^2ctg\alpha\frac{\partial u_r}{\partial\alpha}+$$
$$+(c_{13}-c_{33}-c_{23}-2c_{55})\xi^2\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}+u_\alpha ctg\alpha\right)+(2c_{55}+c_{13})\xi\left(ctg\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}+\frac{\partial^2u_\alpha}{\partial x\partial\alpha}\right)+$$
$$+2c_{55}\xi^2\frac{\partial^2u_r}{\partial\alpha^2}+2(e_{11}-e_{31})\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+e_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+e_{53}\xi^2\left(ctg\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\right);$$

$$\rho\frac{\partial^2u_\alpha}{\partial t^2}=(2c_{55}+c_{13})\xi\frac{\partial^2u_r}{\partial\alpha\partial x}+(c_{33}+c_{23}+4c_{55})\xi^2\frac{\partial u_r}{\partial\alpha}+2c_{55}\frac{\partial^2u_\alpha}{\partial x^2}+$$
$$+\xi^2(-4c_{55}+(c_{23}-c_{33})ctg^2\alpha-\frac{c_{23}}{\sin^2\alpha})u_\alpha+4c_{55}\xi\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}+ \tag{9}$$
$$+c_{33}\xi^2\left(\frac{\partial^2u_\alpha}{\partial\alpha^2}+ctg\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}\right)+(e_{53}+e_{31})\xi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial x}+2e_{53}\xi^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha};$$

$$e_{11}\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}+2e_{31}\xi^2 u_r+2(e_{31}+e_{11})\xi\frac{\partial u_r}{\partial x}+2e_{53}\xi^2 ctg\alpha\frac{\partial u_r}{\partial\alpha}+2e_{53}\xi^2\frac{\partial^2 u_r}{\partial\alpha^2}+$$
$$+(e_{31}+2e_{53})\xi ctg\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial r}+(e_{31}-2e_{53})\xi^2(ctg\alpha u_\alpha+\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha})+$$
$$+(e_{31}+2e_{53})\xi\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\alpha\partial r}-2\varepsilon_{11}\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varepsilon_{33}\xi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}-\varepsilon_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\varepsilon_{33}\xi^2 ctg\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0.$$

В співвідношеннях (9) $\xi=\varepsilon/(1+\varepsilon x)$.

2. Побудова чисельної схеми. Для знаходження розв'язку поставленої початково-крайової задачі розвинуто чисельний метод розв'язання, що базується на різницевих апроксимаціях та різних методах інтегрування по часу.

Для реалізації методу в області перетину кулі $D=\left\{-1\le x\le 1,\ 0\le\alpha\le 2\pi\right\}$ вводиться розбиття

$$\Omega=\left\{x_i=(i-0.5)\Delta x-1,\ \alpha_j=(j-0.5)\Delta\alpha\,\middle|\,\Delta x=2/n,\Delta\alpha=2\pi/m\right\},$$

де $i=0,1,...,n+1,\ j=0,1,...,m+1.$ Крайні точки розбиття знаходяться на відстані в половину кроку розбиття Δx або $\Delta\alpha$ відносно відповідної границі області, що дає змогу записати граничні умови з другим порядком точності по просторових координатах. Розв'язок шукається в вигляді набору значень $u_{i,j}^r=u_r(x_i,\alpha_j,t)$, $u_{i,j}^\alpha=u_\alpha(x_i,\alpha_j,t)$, $\varphi_{i,j}=\varphi(x_i,\alpha_j,t)$.

Перетворимо диференціальні рівняння в частинних похідних (9) до звичайних диференціальних рівнянь шляхом переходу від похідних по просторових координатах до скінченно-різницевих виразів другого порядку точності [5]. Запишемо рівняння (9) в цілих точках розбиття $\Omega=\{x_i,\alpha_j\}$ (тут $\zeta_i=\varepsilon/(1+\varepsilon x_i)$):

$$\rho\frac{\partial^2 u_{i,j}^r}{\partial t^2}=\frac{c_{11}}{\Delta x^2}(u_{i+1,j}^r-2u_{i,j}^r+u_{i-1,j}^r)+\frac{c_{11}\zeta_i}{\Delta x}(u_{i+1,j}^r-u_{i-1,j}^r)+\frac{2c_{55}\zeta_i^2}{2\Delta\alpha}\times$$
$$\times ctg\alpha_j(u_{i,j+1}^r-u_{i,j-1}^r)+2(c_{13}-c_{33}-c_{23})\zeta_i^2 u_{i,j}^r+\frac{2c_{55}\zeta_i^2}{\Delta\alpha^2}(u_{i,j+1}^r-2u_{i,j}^r+$$
$$+u_{i,j-1}^r)+\zeta_i^2(c_{13}-c_{33}-c_{23}-2c_{55})\left(\frac{u_{i,j+1}^\alpha-u_{i,j-1}^\alpha}{2\Delta\alpha}+u_{i,j}^\alpha ctg\alpha_j\right)+$$

$$+(2c_{55}+c_{13})\zeta_i\left(ctg\alpha_j\,\frac{u^{\alpha}_{i+1,j}-u^{\alpha}_{i-1,j}}{2\Delta x}+\frac{u^{\alpha}_{i+1,j+1}-u^{\alpha}_{i+1,j-1}-u^{\alpha}_{i-1,j+1}-u^{\alpha}_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta\alpha}\right)+$$

$$+\frac{2(e_{11}-e_{31})}{2\Delta x}\zeta_i\,(\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j})+\frac{e_{11}}{\Delta x^2}(\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j})+$$

$$+e_{53}\zeta_i^2\,\frac{ctg\alpha_j}{2\Delta\alpha}(\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j-1})+\frac{e_{53}\zeta_i^2}{\Delta\alpha^2}(\varphi_{i,j+1}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j+1});$$

$$\rho\frac{\partial^2 u^{\alpha}_{i,j}}{\partial t^2}=(2c_{55}+c_{13})\frac{\zeta_i}{4\Delta x\Delta\alpha}(u^r_{i+1,j+1}-u^r_{i-1,j+1}-u^r_{i+1,j-1}+u^r_{i-1,j-1})+$$

$$+(c_{33}+c_{23}+4c_{55})\frac{\zeta_i^2}{2\Delta\alpha}(u^r_{i,j+1}-u^r_{i,j-1})+\frac{2c_{55}}{\Delta\alpha^2}(u^{\alpha}_{i+1,j}-2u^{\alpha}_{i,j}+u^{\alpha}_{i+1,j})+$$

$$+\zeta_i^2(-4c_{55}+(c_{23}-c_{33})ctg^2\alpha_j-\frac{c_{23}}{\sin^2\alpha_j})u^{\alpha}_{i,j}+\frac{4c_{55}\zeta_i}{2\Delta x}(u^{\alpha}_{i+1,j}-u^{\alpha}_{i-1,j})+$$

$$+\frac{c_{33}\zeta_i^2}{\Delta\alpha^2}(u^{\alpha}_{i,j+1}-2u^{\alpha}_{i,j}+u^{\alpha}_{i,j+1})+\frac{c_{33}\zeta_i^2}{2\Delta\alpha}ctg\alpha_j(u^{\alpha}_{i,j+1}-u^{\alpha}_{i,j-1})+\qquad(10)$$

$$+\frac{\zeta_i\,(e_{53}+e_{31})}{4\Delta x\Delta\alpha}(\varphi_{i+1,j+1}-\varphi_{i-1,j+1}-\varphi_{i+1,j-1}+\varphi_{i-1,j-1})+\frac{e_{53}\zeta_i^2}{\Delta\alpha}(\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j-1});$$

$$\frac{e_{11}}{\Delta x^2}(u^r_{i+1,j}-2u^r_{i,j}+u^r_{i-1,j})+2e_{31}\xi_i^2u^r_{i,j}+(e_{31}+e_{11})\frac{\xi_i}{\Delta x}(u^r_{i+1,j}-u^r_{i-1,j})+$$

$$+\frac{e_{53}\xi_i^2}{\Delta\alpha}ctg\alpha_j(u^r_{i,j+1}-u^r_{i,j+1})+\frac{2e_{53}\xi_i^2}{\Delta\alpha^2}(u^r_{i,j+1}-2u^r_{i,j}+u^r_{i,j-1})+(e_{31}+2e_{53})\times$$

$$\times\frac{\xi_i ctg\alpha_j}{2\Delta x}(u^{\alpha}_{i+1,j}-u^{\alpha}_{i-1,j})+(e_{31}-2e_{53})\xi_i^2(ctg\alpha_j u^{\alpha}_{i,j}+\frac{1}{2\Delta\alpha}(u^{\alpha}_{i,j+1}-u^{\alpha}_{i,j-1}))+$$

$$+\frac{(e_{31}+2e_{53})\xi_i}{4\Delta x\Delta\alpha}(u^{\alpha}_{i+1,j+1}-u^{\alpha}_{i-1,j+1}-u^{\alpha}_{i+1,j-1}-u^{\alpha}_{i-1,j-1})-\frac{\varepsilon_{11}\xi_i}{\Delta x}(\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j})-$$

$$-\frac{\varepsilon_{33}\xi_i^2}{\Delta\alpha^2}(\varphi_{i,j+1}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j-1})-\frac{\varepsilon_{11}}{\Delta x^2}(\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j})-$$

$$-\varepsilon_{33}\xi_i^2\,\frac{ctg\alpha_j}{2\Delta\alpha}(\varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j-1})=0.$$

Значення невідомих в законтурних точках необхідно виключити з системи (10), що робимо за допомогою умов (5)–(7). З (7) випливає, що при $i = 0,1,...,n+1$

$$u_{i,0}^{r} = u_{i,1}^{r}; \qquad u_{i,0}^{\alpha} = -u_{i,1}^{\alpha}; \qquad \varphi_{i,0} = \varphi_{i,1};$$
$$u_{i,m+1}^{r} = u_{i,m}^{r}; \qquad u_{i,m+1}^{\alpha} = -u_{i,m}^{\alpha}; \quad \varphi_{i,m+1} = \varphi_{i,m}. \qquad (11)$$

Значення електричного потенціалу в законтурних точках відносно сферичних поверхонь $x = \pm 1$ легко визначаються з (5):

$$\varphi_{0,j} = -\varphi_{1,j} - 2V(t); \; \varphi_{m+1,j} = -\varphi_{m,j} + 2V(t), \;\; j = 0,1,...,m+1. \qquad (12)$$

Значення переміщень $u_{i,j}^{r}$, $u_{i,j}^{\alpha}$ в законтурних точках відносно сферичних поверхонь визначаються з (6) в залежності від умов закріплення. При заданих на границях $x = \pm 1$ переміщеннях невідомі $u_{0,j}^{r}$, $u_{0,j}^{\alpha}$, $u_{m+1,j}^{r}$, $u_{m+1,j}^{\alpha}$ визначаються аналогічно до електричного потенціалу (12). При заданих механічних напруженнях переміщення в законтурних точках визначаються з різницевої форми запису матеріальних співвідношень (3) в точках $(x_{0.5}, \alpha_j)$, що лежать на границі області.

Для інтегрування по часу системи диференціальних та алгебраїчних рівнянь (10) вводимо розбиття інтервалу часу $t \in [0, T]$ з кроком Δt. Розв'язок шукається за допомогою явної різницевої схеми або методом Ньюмарка [8]. Явна різницева схема зручна в реалізації, але є умовно стійкою, внаслідок чого крок по часу береться значно меншим за крок по просторових координатах ($\Delta t \approx 0.05\sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$), що призводить до громіздких обчислень. До того ж на кожному часовому шарі для знаходження електричного потенціалу φ потрібно розв'язувати систему nm алгебраїчних рівнянь, що випливає з третього рівняння (10). Метод Ньюмарка складніше реалізується, оскільки на кожному кроці по часу розв'язується система з $3nm$ рівнянь, але абсолютна стійкість цього методу дозволяє інтегрувати систему рівнянь (10) з значно більшим кроком по часу $\Delta t \approx 0.5\sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$. Тестування правильності роботи схеми проводилося на основі розв'язків задач про одновимірні нестаціонарні коливання п'єзокерамічних тіл [1, 3, 8].

3. Аналіз отриманих результатів. Розглянемо задачу про осесиметричні нестаціонарні коливання кулі з кераміки PZT-4 [6]

$$c_{11}^{E} = 11{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,\ c_{33}^{E} = 13{,}9 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,\ c_{32}^{E} = 7{,}78 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,$$
$$c_{13}^{E} = 7{,}43 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,\ c_{55}^{E} = 2{,}56 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,$$
$$e_{11} = 15{,}1\ \text{Кл/м}^2,\ e_{31} = -5{,}2\ \text{Кл/м}^2,\ e_{53} = 12{,}7\ \text{Кл/м}^2,$$
$$\varepsilon_{11}^{S} = 562 \cdot 10^{-11}\ \text{Ф/м},\ \varepsilon_{33}^{S} = 646 \cdot 10^{-11}\ \text{Ф/м},$$

з параметром кривизни $\varepsilon = 0.1$ при нульових початкових умовах. За нормуючі параметри вибрано $\rho_{00} = \rho$, $c_{00} = c_{11}^{E}$, $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{11}^{S}$, $t_h = h\sqrt{\rho / c_{33}^{E}}$.

Зовнішні поверхні вільні від механічних навантажень, тобто

$$\sigma_{rr}(\pm 1, \alpha, t) = 0\ ;\ \sigma_{r\alpha}(\pm 1, \alpha, t) = 0\,. \qquad (13)$$

Електроди на сферичних поверхнях кулі мають при $\alpha = \alpha_0$ ізоляційну лінію розрізу, що дає змогу задавати різну різницю потенціалів на різних областях електродованості. Розглянемо коливання кулі, що виникають при навантаженні різницею електричного потенціалу $2V(t)$, де

$$V(\alpha, t) = \begin{cases} V_0 \sin \omega t,\ 0 \le \alpha < \alpha_0, \\ -V_0 \sin \omega t,\ \alpha_0 \le \alpha \le \pi. \end{cases} \qquad (14)$$

Двовимірність задачі та велика кількість механічних та електричних невідомих робить розв'язок досить складним для аналізу. Для оцінки впливу наявності розрізу розглянемо спочатку результати, отримані без розрізу, тобто при $V(t) = V_0 \sin \omega t$. Оскільки таке навантаження не залежить від кута α, то розв'язок задачі буде одновимірним. На рис. 1 представлені криві радіальних переміщень на зовнішніх та серединній поверхні при безрозмірних коефіцієнтах навантаження $V_0 = 1$, $\omega = 2$. Всі наведені результати представлені в безрозмірному вигляді.

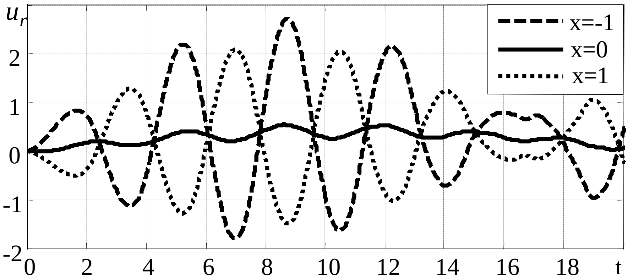

Рис.1. Динаміка зміни радіальних переміщень в різних точках перерізу при відсутності розрізу

Бачимо, що максимальні переміщення виникають на поверхні $x=-1$ і досягають значення $u_{r\,\max}=2.8$. Тому подальший аналіз будемо проводити на внутрішній поверхні кулі.

На рис. 2, 3, 4 представлено динамічні криві для радіальних переміщень, що виникають на поверхні $x=-1$ при розрізах на електродах в площинах $\alpha_0=\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/6$ відповідно. З рис. 2 бачимо, що при $\alpha_0=\pi/2$ переміщення на полюсах співпадають з представленими на рис.1 до моменту часу $T=14$, що відповідає приходу в точки $\alpha=0$, $\alpha=\pi$ хвилі меридіанних переміщень. Крива переміщень, що відповідає перерізу $\alpha=\pi/2$, має меншу амплітуду коливань, ніж переміщення на полюсах. Після моменту часу $T=14$ чіткість коливального процесу порушується внаслідок накладання хвиль в полюсі.

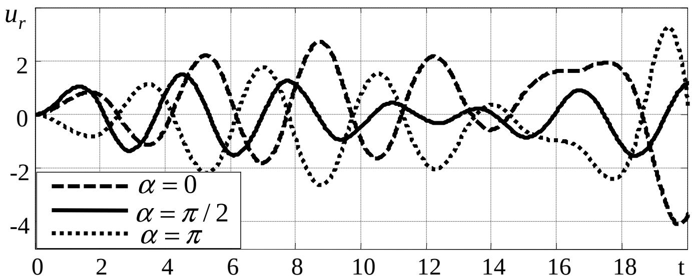

Рис. 2. Динаміка зміни радіальних переміщень на внутрішній поверхні кулі $x=-1$ при положенні розрізу $\alpha_0=\pi/2$

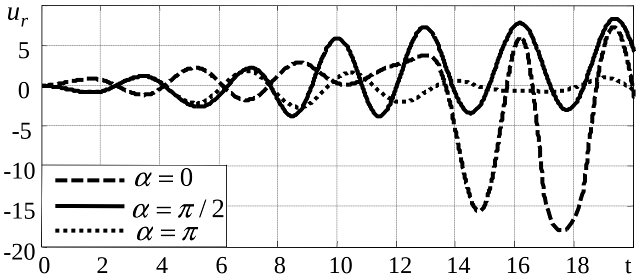

Рис. 3. Зміна радіальних переміщень на внутрішній поверхні кулі $x = -1$ при положенні розрізу $\alpha_0 = \pi / 3$

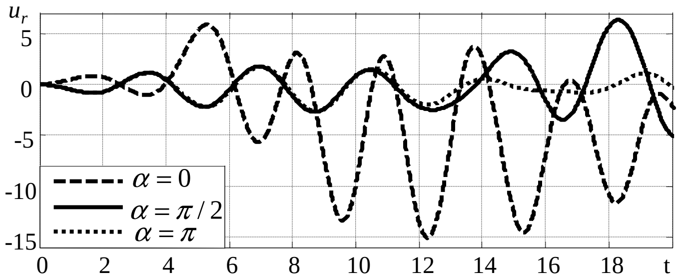

Рис. 4. Зміна радіальних переміщень на внутрішній поверхні кулі $x = -1$ при положенні розрізу $\alpha_0 = \pi / 6$

Для рис. 3, 4 характерно те, що переміщення в перерізах $\alpha = \pi / 2$ та $\alpha = \pi$ співпадають на деяких інтервалах часу, оскільки зона двовимірних збурень поширюється від точок $\alpha_0 = \pi / 3$ та $\alpha_0 = \pi / 6$. Накладання хвиль меридіанних переміщень в полюсі $\alpha = 0$ призводить до різкого зростання радіальних переміщень, які значно перевищують значення переміщень в одновимірній задачі (рис. 1).

Отже, можна зробити висновок, що наявність розрізу на електродах значно підвищує амплітуду коливань точок поверхні кулі внаслідок накладання хвиль меридіанних переміщень. Електромеханічний стан п’єзоелемента значним чином залежить від положення розрізу, від якого починається поширення двовимірних збурень.

1. *Бабаев А. Э.* Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. – К.: Наук. думка, 1990. – 176с.
2. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
3. *Жарий О. Ю., Улитко А. Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. К.: Выща школа, 1989. – 184 с.
4. Механика связанных полей в элементах конструкций в 5-ти томах / *Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т.* 5. Электроупругость/ *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.*– К: Наук. думка, 1989.– 280 с.
5. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
6. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел.– К: Наук. думка, 1990.– 228 с.
7. *Шульга М. О.* Про варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського і початково-крайові динамічні задачі електропружності // Доп. НАН України.–2008.– № 6.–С. 36-45.
8. *Шульга М. О., Григор'єв С.А.* Радіальні пружноелектричні нестаціонарні коливання п'єзокерамічної порожнистої кулі // Опір матеріалів. – 2007. – С.