

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, канд. техн. наук
Н.А. Гречух

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

Викладені положення стосовно реалізації алгоритму одночасних ітерацій в задачах про власні коливання складних оболонок, для яких застосований прийом декомпозиції на фрагменти. Розрахунок оболонок на змушені коливання передбачає перетворення рівнянь руху до нормальних координат – форм власних коливань фрагментів. Наведені співвідношення для попередньо напруженого скінченного елемента оболонки.

1. Побудова редукованих моделей

Вивчення динамічної поведінки конструкцій має суттєве значення для будівельних конструкцій, енергетичного обладнання, авіаційної техніки і т.ін.

Особливо таке положення стосується оболоноквих конструкцій, які за умов малої маси наділені великою жорсткістю і чутливо реагують на дію динамічних навантажень навіть невеликої інтенсивності. Тому поряд з задачами визначення динамічних характеристик оболонок необхідно проводити дослідження їх поведінки під дією динамічних навантажень, що мають різні закони зміни в просторі і часі.

Дуже небезпечним для тонкостінних конструкцій типу оболонок і пластин є поєднання статичних навантажень з різного роду динамічними навантаженнями. Такі комбінації дій приводять до втрати стійкості конструкцією. Тому актуальними є задачі дослідження зазначених явищ з положень геометрично нелінійної теорії. Поряд з цим втрата несучої здатності оболонки пов'язана з накопиченням пластичних деформацій, а тому важливим також є дослідження фізично нелінійних ефектів.

Вивчення поведінки пластин і оболонок при імпульсному навантаженні вважається найбільш повним, якщо воно стосується великих прогинів з позицій нелінійної теорії. Але природно вважати, що дослідження початкової стадії перехідного процесу може бути проведено за допомогою лінеаризованих залежностей.

Що стосується розв'язання задач динаміки оболоноквих конструкцій, то на сьогодні найширше застосування має метод скінчених елементів, можливості якого не безмежні. На шляху його застосування стоять притаманні МСЕ особливості: чим більш складну конструкцію і з великою точністю треба розрахувати, тим більше число ступенів вільності слід вводити для дискретної моделі, заздалегідь знаючи, що

практичну цінність має тільки деяка частина параметрів динамічної моделі. Запропоновано декілька алгоритмів орієнтованих на зниження числа невідомих. Це досягається завдяки спеціальній організації розрахунків, що приводить до «розщеплення» систем рівнянь високого порядку на ряд незалежних систем меншого порядку, або використовуються нові узагальнені координати, число яких значно менше ніж у вихідній дискретній моделі.

Що стосується задачі про власні коливання оболонок, то перехід до нової системи узагальнених координат виконується без спрощення просторової апроксимації області оболонки. Виконання цієї умови досягається у алгоритмі одночасних ітерацій з необхідним числом власних векторів узагальненої проблеми про власні значення матриць. Потрібне число власних векторів призначається заздалегідь. Досвід використання алгоритму одночасних ітерацій показує, що число початкового набору векторів приймається дещо збільшеним (приблизно на 20%) у порівнянні з очікуваним набором точних значень. Суть цього алгоритму повно викладена в монографії [1]. Важливою особливістю ітераційного процесу є те, що він реалізується в автоматичному режимі і забезпечує щільність нижчої ділянки спектру частот власних коливань. Цей алгоритм зарекомендував себе як один з найбільш ефективних прийомів при розв'язанні задач про власні коливання системи з великим числом ступенів вільності для яких необхідно визначати до сорока власних частот і форм. Однією з переваг цього методу є можливість визначення модальних координат з бажаною точністю.

Вхідна інформація для конкретної задачі готується у формі, сприятливій для інженера і групується по категоріям, які характеризують геометрію поверхні оболонки, граничні умови, фізико-механічні властивості матеріалу, топологію дискретної моделі конструкції. Інформація про геометрію поверхні подається точковим каркасом – координатами вузлів скінченних елементів у декартовій системі координат. У випадку неканонічної поверхні оболонки, наприклад, лопатки парової турбіни або газового компресора побудова точкового каркаса є досить складною самостійною проблемою. Успішний розв'язок цієї проблеми став можливим завдяки використанню математичного апарата сплайнових апроксимацій, який дав змогу по мінімальному числу теоретичних перерізів пера лопатки будувати з великою точністю необхідну кількість проміжних перерізів. Блок геометричних розрахунків включає набір програмних модулів, які забезпечують побудову сітки скінченних елементів для різних поверхонь у автоматичному режимі. Отримані результати – точкові каркаси поверхонь зберігаються у файлах і використовуються як вхідна інформація для розв'язання задач механіки.

Сітка скінченних елементів дискретної моделі оболонки має регулярну структуру, що суттєво спрощує підготовку вхідної інформації, для забезпечення автоматизації процесу побудови глобальних матриць жорсткості і мас цієї моделі. Нерегулярності типа вирізів, включень фрагментів тіла оболонки, виконаних із матеріалу з іншими характеристиками, ступінчата зміна товщини оболонки усуваються за допомогою введення особливих скінченних елементів “пустий елемент” – для вирізу, “включення” – для області з особливими характеристиками матеріалу, “ребро” – для ділянки із ступінчатою зміною товщини оболонки.

Інформація про зовнішні в'язі, характеристики матеріалу, зовнішні навантаження, топологію розрахункової моделі передбачено формувати в діалоговому режимі і зберігається в файлах даних на магнітних носіях. Передбачено, що програма реалізується в автоматичному режимі. При багатоваріантних розрахунках конструкції у процесі проектування доводиться вносити зміни в файл даних задачі. Для цього використовується редактор файлів системного блоку комп'ютера.

До складу обчислювальної системи включено блок – після процесор, який оснащений засобами візуалізації результатів, отриманих для конкретного варіанту даних. Візуальна інформація також записується у спеціальні файли і зберігається на магнітних носіях.

Розрахунок конструкцій нерегулярної структури виконується методом під конструкцій. При цьому об'єкт розділяється на фрагменти простої форми, в межах яких будується регулярна сітка скінченних елементів. Побудова глобальних матриць жорсткості і мас моделі складної конструкції виконується для узагальнених координат віднесених до області стиковки фрагментів. Новим у запропонованому підході є те, що у якості узагальнених координат приймаються можливі конфігурації границь фрагментів. Шляхом накладення додаткових в'язей на стиковочних границях фрагментів будується основна система метода переміщень. Далі виконується розрахунок кожного фрагмента на змушені переміщення границь, що відповідають їх конфігурації, тобто новим узагальненим координатам. Апроксимацію конфігурацій стиковочних границь можливо виконувати, наприклад, набором синусоїд, амплітудні значення яких розглядаються як узагальнені координати. До однієї границі може бути віднесено декілька узагальнених координат. Повне ж їх число для усієї моделі метода підконструкцій визначає число ступенів вільності редукованої моделі. Узагальненим координатам присвоюються номери. Далі формується матриця базисних векторів як результат розрахунку кожного фрагмента основної системи на змушені зміщення границь від кожної узагальненої координати.

Складовими базисного вектора є переміщення вузлів СЕМ фрагмента від змушеного зміщення стиковочної границі для відповідної узагальненої координати. Тобто розмірність базисного вектора співпадає з числом ступенів вільності фрагмента.

Задача обчислення базисних векторів зведена до розв'язку системи рівнянь МСЕ для кожного фрагмента

$$[K][U]=[P]. \quad (1.1)$$

Тут $[K]$ – матриця жорсткості фрагмента побудована з урахуванням накладених в'язей на границях стиковки з іншими фрагментами; $[P]$ – матриця, складена із стовпчиків матриці жорсткості фрагмента, які відповідають переміщенням вузлів на стиковочній границі фрагмента. Число таких стовпчиків відповідає кількості узагальнених координат моделі фрагмента, що розглядається. Результатом розв'язку задачі (1.1) є матриця $[U]$ складена із базисних векторів, що визначають конфігурацію фрагмента від зміщення границі по кожний із узагальнених координат. Базисний вектор – це по суті свій структурний спінінг. Таким чином можна сказати, що матриця $[U]$ утворена із базисних векторів які характеризують реакцію фрагмента на зміщення стиковочних границь.

Система базисних векторів являє собою систему фундаментальних векторів, лінійна комбінація яких дає змогу реалізувати варіанти стану фрагмента. Матриця $[U]$ формується для кожного фрагмента моделі метода підконструкцій. Базисні вектори повинні відповідати умовам лінійної незалежності. Забезпечення цієї вимоги досягається шляхом введення узагальнених координат для фрагмента таким чином, щоб вони обмежували рух основної системи фрагмента як жорсткого цілого.

Для побудови рівняння руху редукованої моделі фрагмента скористаємось варіаційним рівнянням руху його скінченнелементної моделі

$$\sum_e \delta\{v\}_e^T [K]_e \{v\}_e + \sum_e \delta\{v\}_e^T [M]_e \{\ddot{v}\}_e = \sum_e \delta\{v\}_e^T [Q(t)]_e. \quad (1.2)$$

де $\{v\}_e, \{\ddot{v}\}_e$ – вектори переміщень і прискорень вузлів скінченних елементів (СЕ); $[K]_e, [M]_e [Q(t)]_e$ – відповідно матриці жорсткості, мас і вектор зведених до вузлів сил СЕ; символ $\sum_e$ – означає суму по всіх елементах моделі фрагмента; індексом “ T ” відмічені транспоновані вектори.

Якщо компонентами вектора $\{V\}$ є переміщення вузлів СЕМ фрагмента, а переміщення вузлів одного СЕ визначаємо рівністю

$$\{v\}_e = [I]_e \{V\}, \quad (1.3)$$

де $[I]_e$ – матриця інциденцій, яка забезпечує вибірку переміщень стосовно одного СЕ з повного набору переміщень, то співвідношення (1.2) з урахуванням (1.3) набуває вигляду

$$\sum_e \delta\{V\}^T [I]_e^T [K]_e [I]_e \{V\} + \sum_e \delta\{V\}_e [I]_e^T [I]_e^T [M]_e [I]_e \{\ddot{v}\}_e - \sum_e \delta\{V\}^T [I]_e^T [Q(t)]_e = 0, \quad (1.4)$$

$$\delta\{V\}^T [\bar{K}]_e^T \{V\} + \delta\{V\}^T [\bar{M}]_e^T \{\ddot{v}\}_e - \delta\{V\} \{Q\} = 0, \quad (1.5)$$

де $[\bar{K}] = \sum_e [I]_e^T [K]_e [I]_e$ – матриця жорсткості СЕМ фрагмента;

$[\bar{M}] = \sum_e [I]_e^T [M]_e [I]_e$ – матриця мас фрагмента; $\{Q(t)\} = \sum_e [I]_e^T \{Q(t)\}_e$ –

вектор зведених до вузлів сил фрагмента; $\{v\}_e, \{\ddot{v}\}_e$ – N вимірні вектори переміщень і прискорень вузлів дискретної моделі фрагмента.

Для перетворення рівнянь руху фрагмента до нових узагальнених координат, запишемо співвідношення між узагальненими координатами СЕМ фрагмента і його розрахункової моделі:

$$\{v\} = [U] \{q\}. \quad (1.6)$$

Підставимо (1.6) в (1.5) і виконаємо аналогічні перетворення. Остаточнo отримаємо:

$$\delta\{q\}^T ([A] \{q\} + [B] \{\ddot{q}\} - \{q(t)\}) = 0, \quad (1.7)$$

де

$$[A] = [U]^T [\bar{K}] [U], \quad (1.8)$$

$$[B] = [U]^T [\bar{M}] [U], \quad (1.9)$$

$$\{q(t)\} = [U]^T \{Q(t)\}, \quad (1.10)$$

відповідно матриці жорсткості, мас і вектор узагальнених сил, які характеризують рух редукованої моделі фрагмента.

Побудова рівняння руху моделі складеної оболонки метода під конструкцій виконується за схемою (1.3) – (1.5).

Якщо ввести співвідношення

$$\{q\} = [I]_F \{P\}, \quad (1.11)$$

де $\{P\}$ – вектор узагальнених координат повної редукованої моделі оболонки метода під конструкцій; $\{q\}$ – вектор узагальнених переміщень редукованої моделі фрагмента; $[I]_F$ – матриця інциденції фрагмента, яка

забезпечує вибірку з $\{P\}$ узагальнених переміщень, які стосуються конкретного фрагмента в складі повно і редукованої моделі конструкції.

Остаточню рівняння руху редукованої моделі, по аналогії з (1.7), і з урахуванням того, що вектор варіації можливих переміщень $\delta\{q\} \neq 0$ набуває вигляду

$$[A]^*\{p\} + [B]^*\{p\} = \{q(t)\}. \quad (1.12)$$

Задача про власні коливання допускає розв'язок матричного рівняння (1.12) у вигляді

$$\{p\} = \{r\} \sin(\omega t + \alpha)$$

зводиться до розв'язку узагальненої проблеми про власні значення

$$([A]^* - \lambda[B]^*)\{r\} = 0, \quad (1.13)$$

Матричне рівняння (1.13) має нетривіальний розв'язок за умови

$$\det |[A]^* - \lambda[B]^*| = 0, \quad (1.14)$$

яка являє характеристичне рівняння системи.

Корні λ_i ($i=1, 2, \dots, N$) і відповідні їм вектори розв'язку системи (14) $\{r\}^{(i)}$ називаються власними значеннями і власними векторами матриці $[B]^{-1}[A]^*$. Підстановка їх у (1.13) приводить до рівності

$$[A]^*[R] = [\Lambda][B]^*[R], \quad (1.15)$$

де $[R]$ – модальна матриця, стовпцями якої є вектори $\{r\}^{(i)}$; $[\Lambda]$ – діагональна матриця складена із власних значень λ_i .

Окрім самостійного використання при оцінюванні частот і форм власних коливань конструкції, що важливо для прогнозування резонансних явищ в конструкціях і спорудах, розв'язок проблеми (1.13) грає фундаментальну роль в теорії малих коливань, а також в методах розв'язку нелінійних задач, таких як метод малого параметра, методи теорії стійкості руху, задачі бифуркації і т.п.

Розв'язок узагальненої проблеми про власні значення (1.13) надає можливість реалізувати перетворення системи рівнянь руху до головного (нормального) базису простору. Для нормованих власних векторів, які взаємно ортогональні отримаємо важливі співвідношення

$$[R]^T [B]^*[R] = [E], \quad [R]^T [A]^*[R] = [\Lambda]. \quad (1.16)$$

Якщо в (1.2) зробити заміну $\{v\} = [R]\{p\}$, то отримаємо

$$\delta\{p\}^T ([R]^T [K][R]\{p\} + [R]^T [M][R]\{\ddot{p}\}) - [R]^T \{Q(t)\} = 0.$$

З урахуванням (1.16), за умов довільної варіації вектора $\{p\}$, маємо:

$$\{p\} + [\Lambda]\{p\} = \{f\}, \quad (1.17)$$

де $\{f\} = [R]^T \{Q(t)\}$.

Якщо матриця $[\Lambda]$ – діагональна, то розв'язок (1.17) зводиться до розв'язку N незалежних рівнянь що мають вигляд

$$\ddot{p}_i + \lambda_{(i)} p_i = f_i(t), \quad (1.18)$$

розв'язок якого визначається інтегралом Дюамеля [1].

2. Урахування попереднього напруження конструкції в задачах динаміки

В деяких випадках виникає необхідність проводити розрахунок динамічних характеристик оболонки в напруженому стані.

Розглядаються малі коливання оболонки відносно природного стану ненапруженої оболонки та відносно скінченно-здеформованого урівноваженого стану, який характеризується напруженнями $\dot{\sigma}^{ij}$, викликаними статичними силами $\dot{F}_i$.

Повне напруження і інтенсивність сил подамо у вигляді сум:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \dot{\sigma}^{ij} + \Delta\sigma^{ij}(t), \\ F_{i'} &= \dot{F}_{i'} + \Delta F_{i'}(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $\Delta\sigma^{ij}(t)$, $\Delta F_{i'}(t)$ – змінювані в часі прирощення відповідних величин.

Зовнішні сили $F_{i'}$ визначаються в декартовій системі координат, пов'язаній з конструкцією $Z^{i'}$. Напруження ж – в місцевій криволінійній системі.

Передбачено виконання умови взаємно однозначної відповідності систем координат:

$$x^i = x^i(Z^{1'}, Z^{2'}, Z^{3'}), \quad Z^j = Z^j(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}). \quad (2.2)$$

Базисні вектори місцевої $\bar{r}_j$, і глобальної $\bar{e}_{i'}$ системи пов'язані співвідношеннями:

$$\bar{r}_j = \frac{\partial \bar{r}'}{\partial x^j} = Z_{j'}^{i'} \bar{e}_{i'}, \quad \bar{e}_j = \frac{\partial \bar{r}'}{\partial z^{i'}} = Z_{i'}^k \bar{r}_k, \quad (2.3)$$

де

$$Z_{j'}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad Z_{i'}^k = \frac{\partial x^k}{\partial z^{i'}} - \quad (2.4)$$

компоненти тензорів перетворення, які в наслідок (2) задовольняють рівнянням:

$$Z_j' Z_i^k = \delta_j^k \begin{cases} 1, & \text{при } j=k \\ 0, & \text{при } j \neq k \end{cases} \quad (2.5)$$

Для кожної часової миті напружено–деформований стан оболонки як тривимірного тіла повинен задовольняти варіаційному рівнянню руху, яке для задачі про вільні коливання у відповідності з принципом Лагранжа–Д’аламбера має вигляд:

$$\delta W - \delta T = 0. \quad (2.6)$$

Перший член в (2.6) представляє варіацію енергії пружної деформації

$$\delta W = \int_v \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} dv, \quad (2.7)$$

де $\sigma^{ij} = C^{ijnm} \epsilon_{nm}$ – компонент тензора напружень середовища [2];

$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(Z_j' \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} + Z_i' \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} + \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} \right)$ – тензор скінченних деформацій, з урахуванням якого (7) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_v \sigma^{ij} \frac{1}{2} \left(Z_j' \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} + Z_i' \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} + \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} + \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} \right) dv = \\ &= \int_v \sigma^{ij} \left(Z_j' + \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} \right) \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} dv. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Остаточню, з урахуванням (2.1), отримаємо (2.7) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_v \left(C^{ijnm} Z_n^{k'} Z_j^{e'} \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^m} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} + \dot{\sigma}^{ij} \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} \right) dv = \\ &= \int_v \left(C^{ijnm} Z_n^{k'} Z_j^{e'} + \dot{\sigma}^{im} \delta^{k'e'} \right) \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^m} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} dv = \\ &= \int_v \left(C^{ijnm} + Z_p^n Z_p^j \dot{\sigma}^{im} \right) Z_n^{k'} Z_j^{e'} \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^m} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} dv = \\ &= \int_v \left(C^{ijnm} + g^{nj} \dot{\sigma}^{im} \right) Z_n^{k'} Z_j^{e'} \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^m} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} dv = \int_v C^{*ijnm} Z_n^{k'} Z_j^{e'} \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^m} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} dv, \end{aligned} \quad (2.9)$$

де

$$C^{*ijnm} = C^{ijnm} + g^{nj} \dot{\sigma}^{im}. \quad (2.10)$$

Співвідношення (2.9) по формі співпадає із співвідношенням варіації енергії нескінченно малих деформацій відносно ненапруженого

(природного) стану. Відміна (2.10) від компонент звичайного тензора пружності полягає в наявності складових, які утримують компоненти початкових напружень, що можна вважати анізотропією матеріалу, яка визначається вибором відлікового стану.

Викладені положення дають змогу суттєво спростити співвідношення методу скінченних елементів для попередньо напружених конструкцій. Побудова матриці жорсткості скінченного елемента у цьому випадку не відрізняється від випадку ненапружених елементів. Корегується тільки блок, що визначає компоненти тензора пружності у відповідності з (2.10).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Клаф, Дж. Пензиен.* Динамика сооружений. –М: Стройиздат, 1981, -345 с.
2. Метод конечных элементов в механике твердых тел (под общ. ред. А.С.Сахарова, И. Альтенбаха) - Киев: Высшая школа. Головное изд., 1982, – 480 с.

Стаття надійшла до редакції 23.10.2012 р.

Легостаев А.Д., Гречух Н.А.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Изложено положение относительно использования алгоритма одновременных итераций в задаче о собственных колебаниях сложных оболочек, для которых используется прием декомпозиции оболочки на фрагменты. Расчет оболочки на вынужденные колебания ориентирован на преобразования уравнений движения к нормальным координатам – формам собственных колебаний фрагментов. Определены соотношения для предварительно напряженного конечного элемента оболочки.

Legostaev A.D., Grechukh N.A.

SOME TASKS OF DYNAMICS OF SHELL STRUCTURES

There are formulated the principle concerning realization of algorithm of simultaneous iterations for the problem of natural vibrations of complex shells for which decomposition technique to shell fragments is used. Investigation of shell on forced vibrations is focused on transformation the equations of motion to the normal coordinates- forms of natural vibrations of fragments. The relations for prestressed finite element of shell are determined.