УДК 721.011:56:539.3

Кобієв В.Г., к.т.н., с.н.с.
Барабаш М.С., к.т.н., мл.н.с.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ РОЗРАХУНКУ ТОНКОСТІННИХ ОБ'ЄКТІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДЕМО-ВЕРСІЇ СИСТЕМИ NASTRAN

Потреба проектних і науково-дослідних організацій в універсальних, швидких, надійних і зручних для користувача програмних засобах, що реалізують широкий спектр розрахунків (статичних, динамічних, теплових і ін.) зростає. В даний час широко відомими промисловими комплексами скінченноелементного аналізу є NASTRAN, ANSYS, ЛІРА, SCAD, STARK [1,2].

Певний інтерес представляє програмний комплекс NASTRAN, орієнтований в першу чергу на підготовку повноцінної скінченноелементної моделі з максимальними можливостями моделювання, обліку особливостей геометричного, силового характеру і виконання різних видів розрахунків. NASTRAN має велику скінченноелементну базу, тому його використання є ефективним для моделювання процесів деформування конструкцій, опис властивостей яких вимагає застосування різних типів скінченних елементів.

Проте урахування ряду специфічних явищ, що виникають в реальних умовах експлуатації різного виду відповідальних просторових інженерних споруд складної конфігурації, які мають форму тонкостінних об'єктів, зокрема пластин та оболонок, вимагає розширення скінченноелементної бази. Споруди в екстремальних умовах можуть зазнавати впливів динамічного навантаження значної інтенсивності, при яких переміщення пластин та оболонок можуть перевищувати їхню товщину. Розгляд таких явищ приводить до необхідності розв'язання складних нестаціонарних задач геометрично нелінійного динамічного деформування тонкостінних просторових конструкцій.

Розглянемо нелінійне пружне деформування тонкостінного об'єкта у вигляді оболонки довільної конфігурації, що знаходиться під впливом динамічних навантажень на інтервалі часу $\tau \in [t_0, t_1]$. Задача розв'язується у тривимірній постановці [3]. Опис кінематики руху, геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в базисній декартовій системі координат $Z^{i'}$ (тут і далі латинські індекси, крім оговорених, мають значення від 1 до 3). Для опису напружено-деформованого

© Кобієв В.Г., Барабаш М.С.

стану оболонки запроваджується місцева лагранжева криволінійна система координат X^i, природно пов'язана з геометрією тіла оболонки. Зв'язок між базисною і місцевою системами координат у будь-якій точці тіла оболонки визначається однозначно за допомогою прямого і зворотнього тензорів перетворення координат [4].

Метрика базисної системи координат $Z^{i'}$ характеризується метричним тензором $g^{'}$. Переміщення будь-якої точки тіла оболонки визначається вектором переміщень u з компонентами в базисній системі координат $u_{i'}$. Деформації виражаються тензором деформацій Коші-Гріна ε, що характеризує різницю між значенням метричних тензорів місцевої системи координат g до і G після деформації оболонки. Цей тензор представляється у вигляді двох складових – лінійної $\varepsilon_{ij}^{л}$ (тензор нескінченно малих деформацій) та нелінійної $\varepsilon_{ij}^{н}$ частин. Компоненти тензора деформацій ε в місцевій системі координат можуть бути виражені через компоненти переміщень у базисній системі координат.

Компоненти тензора напружень σ в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій ε на основі узагальненого закону Гука.

Використовуючи варіаційний принцип Гамільтона (принцип стаціонарності функціоналу енергії рухомої системи матеріальних точок на її дійсних переміщеннях у межах скінченного інтервалу часу), рух тіла можна описати наступним варіаційним рівнянням [5]:

$$\int_{t_0}^{t_1}\{\int_V \rho \ddot{u}^{i'} \delta u_{i'} dV + \int_V \sigma^{ij} \delta\varepsilon_{ij} dV - \int_V f^{i'} \delta u_{i'} dV - \int_S p^{i'} \delta u_{i'} dS\} dt = 0 . \quad (1)$$

Розв'язання цього рівняння при початкових умовах

$$u(Z^{i'}, t_0) = u_0(Z^{i'})\,;\; \dot{u}(Z^{i'}, t_0) = \dot{u}_0(Z^{i'})\,,\; Z^{i'} \in V\,, \quad (2)$$

дає змогу отримати всі характеристики руху тіла ($u, \dot{u}, \ddot{u}$ та інші).

Для розв'язання задачі використовується просторова дискретизація на базі моментної схеми методу скінченних елементів (МССЕ) [6]. Використовується призматичний шестигранний ізопараметричний скінченний елемент із полілінійним законом розподілу розв'язуючих функцій у його межах.

Відповідно до процедури МССЕ область, яку займає скінченний елемент (СЕ), відображається на куб з одиничними ребрами. Початок місцевої системи координат X^i знаходиться у геометричному центрі О скінченного елемента, а її вісі спрямовані уздовж ребер СЕ.

Вводяться такі гіпотези: щільність матеріалу ρ, тензор пружних констант d^{ijkl} та визначник метричного тензора g незначно змінюються в межах СЕ і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі.

Компоненти вузлових переміщень, швидкостей та прискорень СЕ в базисній системі координат $(u:\dot{u}:\ddot{u})^{k'}$ апроксимуються лінійними поліномами Лагранжа і представляються згідно з полілінійним законом їхнього розподілу у межах СЕ. У центрі СЕ ці характеристики виражаються через вузлові значення означених функцій.

Ізопараметричність СЕ полягає в тому, що для опису його параметрів застосовуються ті ж самі вузлові (опорні) точки і та ж сама функція форми, що і при апроксимації розв’язуючих функцій. Тензори деформацій ε і напружень σ представляються у центрі О ($X^i = 0$) у вигляді ряду Маклорена, число членів якого знаходиться у точній відповідності із порядком полінома, що апроксимує переміщення.

Вихідним співвідношенням при визначенні вузлових реакцій СЕ є вираз варіації потенціальної енергії системи. Зауважимо, що побудова основних співвідношень МССЕ для геометрично нелінійних задач виконується за методикою, аналогічною до випадку отримання основних співвідношень у лінійній постановці. Ця особливість дозволяє значно спростити процедуру побудови геометрично нелінійних рівнянь на основі лінійних співвідношень МССЕ. Матрицю мас отримуємо, розглядаючи варіацію кінетичної енергії СЕ.

Варіація роботи зовнішніх сил δA_{CE}, прикладених до СЕ, визначається через вузлові компоненти вектора проекцій у базисній системі координат масових $\{\{f^{k'}\}_{(S_1S_2S_3)}\}$ та поверхневих $\{\{p^{k'}\}_{(S_1S_2S_3)}\}$ навантажень.

Виконуючи просторову та часову дискретизацію виразу (1), отримуємо наступне рівняння руху для скінченного інтервалу часу $\tau(\,t_0 \le \tau \le t_1\,)$:

$$[M]\{\ddot{u}\}^{\tau} + \{R_{\sigma}\}^{\tau} = \{Q\}^{\tau}, \quad t_0 \le \tau \le t_1\,. \tag{3}$$

В цьому виразі матриця $[M]$ та вектори $\{R\sigma\}$ і $\{Q\}$ отримані внаслідок обходу скінченноелементної області та процедури об’єднання відповідних компонентів матриці мас - $[m]$ і матриці реакцій - $\{r\sigma\}$ кожного СЕ та вектора $\{q\}$ – для зовнішнього навантаження. Вектор $\{\,\ddot{u}\,\}$ скомпонований із прискорень вузлів повної скінченноелементної моделі об’єкта.

Чисельне інтегрування рівнянь руху (3) за часом здійснюється на основі неявної скінченно-різницевої схеми прямого інтегрування Ньюмарка

[7]. Ця схема забезпечує безумовну стійкість процесу обчислення незалежно від кроку інтегруванням за часом та належну точність результатів.

Виходячи із загального підходу Ньюмарка – методу лінійної залежності між прискореннями на проміжку часу τ – значення переміщень, швидкостей та прискорень у момент часу t+Δt представляються через значення цих же параметрів на попередньому кроці за часом по відповідних скінченно-різницевих формулах. На основі цих формул перший член рівняння руху (3) на часовому кроці t+Δt представляється у формі

$$[M]\{\ddot{u}\}^{t+\Delta t} = \{\overline{R}_\rho\}^{t+\Delta t} - \{\overline{\overline{R}}_\rho\}^{t}, \tag{4}$$

де $\{\overline{R}_\rho\}^{t+\Delta t} = a_0[M]\{u\}^{t+\Delta t}$, $\{\overline{\overline{R}}_\rho\}^{t} = [M]\{a_0\{u\}^t + a_2\{\dot{u}\}^t + a_3\{\ddot{u}\}^t\}$.

Вищеозначене дозволяє записати ситему рівнянь руху тіла у вигляді:

$$\{R_\sigma\}^{t+\Delta t} + \{\overline{R}_\rho\}^{t+\Delta t} = \{\hat{Q}\}^{t+\Delta t}, \tag{5}$$

де $\{\hat{Q}\}^{t+\Delta t} = \{Q\}^{t+\Delta t} + \{\overline{\overline{R}}_\rho\}^{t}$ - ефективний вектор зовнішнього навантаження, який враховує інерційні сили попереднього кроку.

На кожному кроці процедури інтегрування системи рівнянь руху за часом виконується процедура розв'язання системи нелінійних рівнянь за методом Ньютона-Канторовича [8]. Згідно з цим методом розв'язання рівнянь (5) зводиться до ітерацій за Ньютоном по формулах

$$\{u\}_{i+1}^{t+\Delta t} = \{u\}_i^{t+\Delta t} + [\hat{K}]_{t+\Delta t}^{-1}[\{\hat{Q}\}^{t+\Delta t} - \{R\}_i^{t+\Delta t}], \tag{6}$$

де $\{R\}_i^{t+\Delta t}$ - вектор вузлових реакцій на ітерації i кроку $t+\Delta t$ ($i = 1, 2, ...$); $\{R\}_t^{t+\Delta t} = \{R_\sigma\}_i^{t+\Delta t} + \{\overline{R}_\rho\}_i^{t+\Delta t}$; $[K]$ – ефективна матриця жорсткості,що враховує вплив динамічних зусиль на кроці t+Δt, $\{u\}_{i+1}^{t+\Delta t}$, $\{u\}_i^{t+\Delta t}$ - значення вузлових переміщень в момент часу $t+\Delta t$ на ітераціях $i+1$ та i відповідно.

На кожному кроці за часом ітераційний процес закінчується на ітерації i, при умові:

$$\left\|\{\Delta u\}_i^{t+\Delta t}\right\| \le \varepsilon \left\|\{\Delta u\}^{t+\Delta t}\right\|, \tag{7}$$

де $\{\Delta u\}_i^{t+\Delta t}$ - прирости переміщень на ітерації i у момент часу $t+\Delta t$; $\{\Delta u\}^{t+\Delta t} = \sum_{i=1}^{I}\{\Delta u\}_i^{t+\Delta t}$ - вектор прирощень переміщень у момент часу

$t+\Delta t$; $\|\{\Delta u\}\| = |\{\Delta u\}|^2$; ε - наперед задане мале додатнє число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

Після одержання значень переміщень у момент часу $t+\Delta t$ за відповідними формулами обчислюються швидкості та прискорення для даного моменту часу. Далі остаточно визначаються координатні значення переміщень і інших параметрів деформованого стану оболонки у момент часу $t+\Delta t$.

Представлена методика розв'язання нелінійних рівнянь руху оболонок реалізована у вигляді комплексу структурованих обчислювальних блоків. Основними етапами процесу розв'язання задачі є послідовно вкладені цикли по кроках інтегрування за часом та ітераціями. Формування і розв'язання нелінійних рівнянь руху виконується на кожному кроці за часом. Формування ефективних матриць жорсткості $[\tilde{K}]^{t+\Delta t}$, матриць жорсткостей $[K]=[[K]_{(S_1S_2S_3)}]$, матриці мас $[M]=[[M]_{(S_1S_2S_3)}]$ та прямий хід методу Гауса відбувається на першій ітерації першого кроку за часом. Навантаження визначаються окремим блоком, що базується на формулах для $\{q\}=\{\{q^{k'}\}_{(S_1S_2S_3)}\}$, $\{\overline{\overline{R}}_\rho\}^t$ і відповідно обчислює поелементні вклади поверхневих та об'ємних сил, додаткових інерційних сил та внутрішніх реакцій. Розв'язання систем рівнянь для поточного переміщення здійснюється обчислювальним блоком, що реалізує метод Гауса. Обчислення швидкостей та прискорень для поточного моменту часу рухомого об'єкту здійснює спеціальний блок за методом Ньюмарка.

Запропонована вище методика та її програмна реалізація, засновані на використанні МССЕ і безумовно стійкої неявної різницевої схеми наскрізної лічби за Ньюмарком в поєднанні з процедурою Ньютона-Канторовича, дозволяють розв'язувати широке коло геометрично нелінійних задач динамічного деформування пружних оболонок при різних інтервалах часу дії зовнішніх навантажень, включаючи імпульсивні навантаження.

Нижче наведено порівняння збіжності результатів розрахунку при розв'язанні низки тестових задач за допомогою програмного комплексу NASTRAN та МССЕ [9]. Для порівняльного аналізу скінченноелементної бази програмного комплексу NASTRAN і комплексу, що використовує МССЕ, було проведено ряд досліджень стосовно різних типів скінченних елементів.

В першій тестовій задачі була розглянута пластина розміром 2.0х2.0 м, товщиною 0.01 м під дією рівномірно-розподіленого навантаження, спрямованого перпендикулярно до поверхні пластини (q = 10^5 Н/м^2). В розрахунковій схемі використана чверть пластини із скінченноелементним розбиттям сіткою 5х5. Для її розрахунку в програмному комплексі NASTRAN використовувався двовимірний скінчений елемент типу «Plate» - «Пластина». Граничні умови – жорстке закріплення від переміщень і від поворотів. Порівняльний аналіз результатів розрахунку наведено в таблицях 1, 2. Деформована схема представлена на рис. 1.

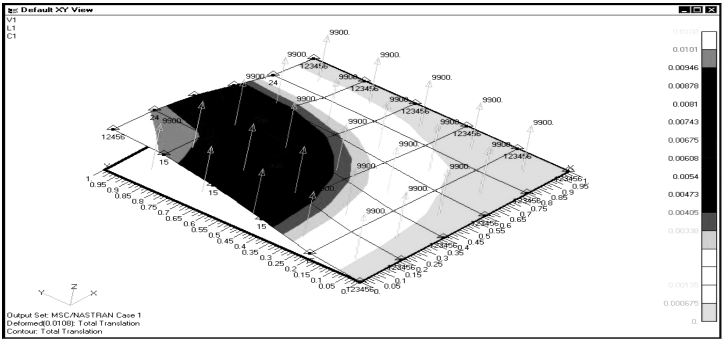

Рис. 1. Деформована схема пластини

Таблиця 1

Статичний лінійний розрахунок пластини

Методика	Максимальне переміщення, м	Похибка, %
МССЕ	0.01048	0.007
NASTRAN	0.01080	3.050
Еталон [10]	0.01040	-

Таблиця 2

Статичний нелінійний розрахунок пластини

Методика	Максимальне переміщення, м	Похибка, %
МССЕ	0.00785	0.60
NASTRAN	0.00813	2.91
Еталон[11]	0.00790	-

З таблиць 1 та 2 видно, що застосування МССЕ забезпечує менші похибки обчислення переміщень.

У наступній тестовій задачі розглянута циліндрична оболонка $\left(\dfrac{R}{L} = 0.45\right)$, розміром у плані $R\sqrt{2}$ x$L/2$, (де R – радіус кривизни серединної поверхні, R=1.12 м; L = 2.5 м – розмір в плані), навантажена рівномірно розподіленим зовнішнім тиском (q = 10^5 Н/м^2). При розрахунку, як і в попередньому прикладі, використовується двовимірний скінченний елемент типу «Plate» («Пластина»), розбиття скінченноелементною сіткою 4х8. Розрахункова схема показана на рис. 2, деформована схема на рис. 3. Результати порівняльного аналізу наведені в таблиці 3. В таблиці 4 наведені результати динамічного розрахунку.

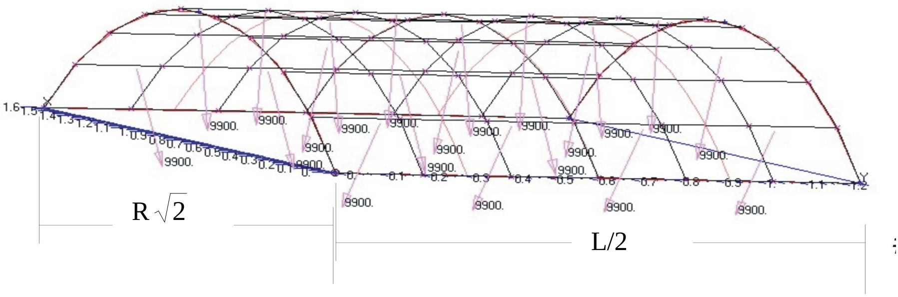

Рис. 2. Розрахункова схема циліндричної оболонки

Таблиця 3

Статичний лінійний розрахунок оболонки

Методика	Максимальне переміщення, м	Похибка, %
МССЕ	0.0609	2.30
NASTRAN	0.0529	11.0
Еталон[12]	0.0595	-

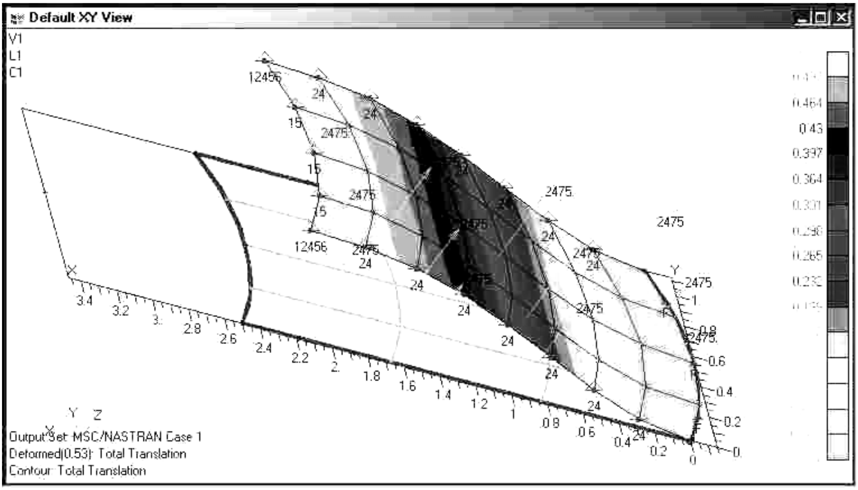

Рис. 3. Деформована схема циліндричної оболонки

Таблиця 4

Динамічний розрахунок оболонки

Постановка задачі	Прогин в точці А по МССЕ, м	Еталонний розв’язок [13], м	Похибка, %
Лінійна	0.12001	0.11350	1.9
Нелінійна	0.08038	0.08010	1.1

Як видно, у даних випадках розв’язок, отриманий за МССЕ, має значно меншу похибку.

В цілому, наведені результати дозволяють зробити висновок, що застосування моментної схеми методу скінченних елементів дає більш точний розв’язок вищезазначеного класу задач. Результати інженерних розрахунків для широкого кола задач можуть бути отримані на основі одного, розробленого за МССЕ, просторового скінченного елемента без залучення скінченних елементів спеціального виду.

1. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows.- М.: ДМК Пресс, 2001. – 448с.
2. *Городецкий А.С., Евзеров И.Д., Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Городецкий Д.А,* Метод конечных элементов: теория и численная реализация. Программный комплекс «ЛИРА-WINDOWS». К., 1997, Факт, 137с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Кобієв В.Г., Поминальник С.М.* Чисельне розв’язання диференціальних рівнянь руху оболонок на основі неявної скінченноелементної схеми прямого інтегрування Ньюмарка. Зб. Опір матеріалів і теорія споруд, вип. 72, Київ: КНУБА, 2003. – с.3 – 19.
4. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков, ХГУ, 1964г. – 481с.
5. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. –М.: Мир, 1965. –408 с.
6. *Сахаров А.С., Кислоокий В.Н.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев: Вища школа, 1982. – 478с.
7. *Бате К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. –М.: Стройиздат, 1982. – 447с.
8. *Баженов В.А., Цихановський В.К., Кислоокий В.М.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м’яких оболонок. – Київ: КНУБА, 2000. – 386с.
9. *Барабаш М.С., Кобієв В.Г.* Інструментальні засоби автоматизованого розрахунку просторових конструкцій на дію статичних та динамічних навантажень. Сб. Опір матеріалів і теорія споруд, вип. 73, Київ: КНУБА, 2003. – с.45 – 52.
10. *Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д.* Расчет пластин. – Киев: Будівельник, 1970.
11. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки. –М: Физматиздат, 1948. – 460 с.
12. *Авдонин А.С.* Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1969.
13. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 983 с.

Матеріал надійшов до редакції 02.06.04.