УДК 536.242:66.045.12

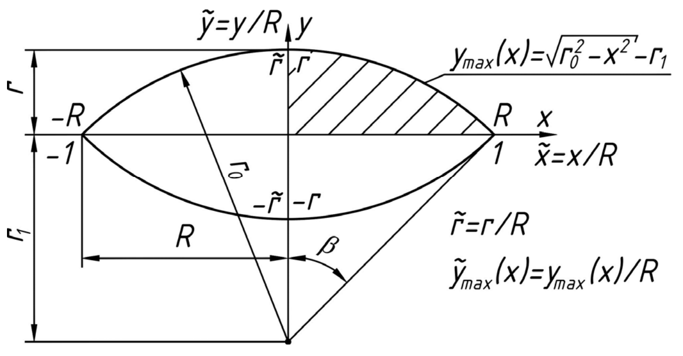
О.М. Гумен, д.т.н. професор
В.О. Мілейковський, к.т.н., доцент
В.Г. Дзюбенко, к.т.н., доцент

АНАЛІЗ ГЕОМЕТРІЇ ПРОФІЛЮ ТЕМПЕРАТУРИ ПРИ ЛАМІНАРНОМУ РУСІ У ДВОКУТНОМУ КАНАЛІ З ПОСТІЙНОЮ ТЕМПЕРАТУРОЮ СТІНОК

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут", Україна
Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

Виконано розрахунок і розглянуто геометричні особливості профілю температури стабілізованої усталеної ламінарної течії в каналі двокутного перерізу при постійній температурі стінок та стабілізованому теплообміні. Проаналізовано вплив особливостей форми профілю на тепловіддачу. Показано, що профіль температури має сідловидну форму біля вершин двокутника. Зі зменшенням відношення довжини осей перерізу профіль біля кінців короткої осі також набуває сідловидної форми. Це знижує інтенсивність теплообміну. При малих відношеннях – до 0,1 – профіль набуває форми, подібної до капелюха з полями, що призводить до лінійного зменшення коефіцієнта тепловіддачі

Постановка проблеми. На кафедрі теплогазопостачання і вентиляції Київського національного університету будівництва і архітектури розроблені плівкові теплоутилізатори [1], секції яких зварені прямими швами з двох полімерних листів. При русі теплоносія листи натягуються і набувають форми, близької до дуг кола. Геометрична фігура (рис. 1,а), утворена двома однаковими дугами колами, називається двокутником [1, 2] за аналогією до відповідної фігури сферичної геометрії.



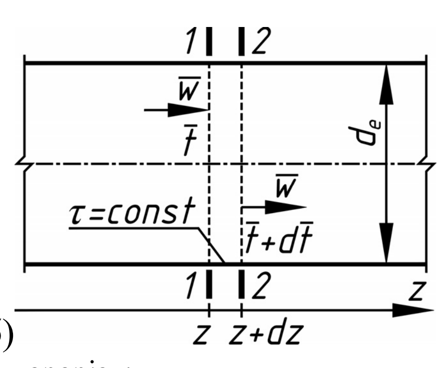


Рис 1. Схема каналу двокутного перерізу:
а – схема перерізу, б – схема поздовжнього розрізу каналу-змійовика

Аналогічні канали утворюються в окремих розламах гірських порід, якими рухаються підземні води [2]. Таким чином, аналіз теплообміну в каналах двокутної форми є актуальною задачею для теплообмінної техніки, при аналізі руху геотермальних вод тощо.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Двокутний канал сформований двома дугами кола. Це спричиняє думку спробувати використати аналогію між двокутним каналом і круглим трубопроводом. У роботі [1] прийнято припущення, що швидкість руху потоку зростає вздовж радіуса кожної межі перерізу за параболічним законом (рис. 2). Такий профіль швидкості має злам на великій осі двокутника x, тому не відповідає фізичному змісту.

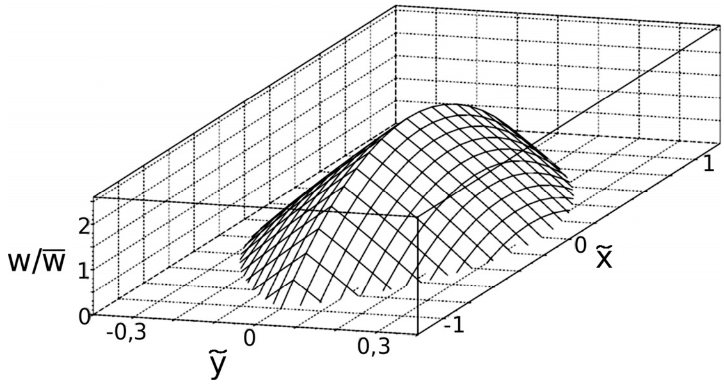


Рис 2. Двокутний переріз

Цей профіль має бути знайдений з рівнянь Нав'є-Стокса [2]. Але М.Г. Алішаєву [2], який знайшов точні розв'язки для багатьох частинних випадків некруглих перерізів, не вдалося знайти простий точний математичний опис профілю швидкості у двокутному каналі. Таким чином, визначення форми профілю швидкості на сьогодні можливе лише шляхом наближеного розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса за допомогою спеціалізованого пограмного забезпечення обчислювальної гідродинаміки [3-6] або шляхом використання відомих чисельних методів [7,8]. Тим паче, залишається нерозв'язаною задача визначення профілю температури і розрахунку тепловіддачі, оскільки вона напряму залежить від форми профілю швидкості.

Основною проблемою вирішення даних задач є те, що рівнняння Нав'є-Стокса та енергії [1] є диференційними рівняннями в частинних похідних еліптичного типу [8]. При розв'язуванні їх кінцево-різницевими методами виникають погано обумовлені системи рівнянь. Малі похибки коефіцієнтів призводять до великих похибок результату. Це накладає обмеження на форму запису математичної моделі, за якої усі коефіцієнти рівнянь повинні бути відомими з довільною точністю. Також при розв'язанні необхідно використовувати такий чисельний метод, який мінімізує обчислювальні похибки.

Формулювання цілей і завдання статті. Метою роботи є аналітичне визначення профілю температури, дослідження його геометричних особливостей та вивчення тепловіддачі при рівномірному усталеному стабілізованому русі рідини двокутним каналом при постійних фізичних властивостях.

Основна частина. Рівномірний стабілізований усталений рух рідини в каналі характеризується незмінним статичним тиском у межах кожного перерізу та однаковим профілем швидкості *w*. Фізичні властивості – питому теплоємність *c*, густину ρ, кінематичну в’язкість ν, коефіцієнт температуропровідності *a*, коефіцієнт теплопровідності λ, число Прандтля $Pr = \nu/a$ – вважаємо постійними. Також вважаємо приблизно постійною температуру стінки τ. На певній відстані від початку каналу теплообмін стабілізується й коефіцієнт тепловіддачі α стає приблизно постійним – α_∞. У такому випадку задача стає двовимірною. Рівняння Нав’є-Стокса набуває простого вигляду (рівняння Пуассона):

$$\mathbf{\Delta}\tilde{w} = (\partial \tilde{w}/\partial \tilde{x}) + (\partial \tilde{w}/\partial \tilde{y}) = const, \tag{1}$$

де $\tilde{x} = x/R$ та $\tilde{y} = y/R$ – відносні координати, *R* – довжина великої півосі, $\tilde{w} = w/w_m$ – відносна швидкість, w_m – швидкість на осі каналу, **Δ** – оператор Лапласа.

Профіль температури визначається з рівняння енергії у формі [1]:

$$w\,\partial t/\partial z = a\left((\partial^2 t/\partial x_c^2) + (\partial^2 t/\partial y_c^2)\right). \tag{2}$$

Диференційне рівняння (2) після перетворень набуває вигляду:

$$Re\,Pr\frac{k_{\Delta t}}{k_w}\frac{\tilde{w}}{\tilde{d}_e}\frac{1}{(\bar{t}-\tau)}\frac{\partial t}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial^2 \tilde{\Delta} t}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Delta} t}{\partial \tilde{y}^2} = \mathbf{\Delta}\tilde{\Delta} t, \tag{3}$$

де $Re = w\, d_e/\nu$ – число Рейнольдса; $d_e = 4\,A\,/\,\chi$ – еквівалентний діаметр перерізу; *A* – площа перерізу; χ – периметр перерізу; $\tilde{\Delta} t = (t-\tau)/(t_m-\tau)$ – відносна надлишкова температура; t_m – температура теплоносія на осі перерізу; $\bar{t}$ – середня температура за витратою; $k_{\Delta t} = (\bar{t}-\tau)/(t_m-\tau)$ – коефіцієнт поля надлишкової температури; $k_w = \bar{w}/w_m$ – коефіцієнт поля швидкості, $\bar{w}$ – середня швидкість потоку.

Оскільки температура стінки стала, а профілі температури в перерізах подібні, то частинна похідна температури вздовж осі каналу *z* не залежить від інших координат та дорівнює похідній середньої температури за *z*. Тоді рівняння (3) спрощується:

$$
Re\,Pr\frac{1}{k_w}\frac{\tilde{w}\tilde{\Delta}t}{\tilde{d}_e}\frac{d\overline{t}}{(\overline{t}-\tau)d\tilde{z}}=\frac{\partial^2\tilde{\Delta}t}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{\Delta}t}{\partial\tilde{y}^2}=\mathbf{\Delta}\tilde{\Delta}t \quad (4)
$$

Визначаємо коефіцієнт тепловіддачі α. Баланс теплоти нескінченно короткої ділянки між перерізами 1-1 та 2-2 трубопроводу постійного перерізу (рис. 1,б) завдовжки dz, яким рухається рідина з постійними фізичними властивостями: $c\rho\overline{w}A(\partial\overline{t}/\partial z)dz=-\alpha_\infty\chi\,dz(\overline{t}-\tau)$. Звідси число Нусельта або безрозмірний коефіцієнт тепловіддачі:

$$
Nu_\infty=\frac{\alpha_\infty d_e}{\lambda}=-\frac{1}{4}Pr\,Re\,\overline{d}_e\frac{1}{\overline{t}-\tau}\frac{d\overline{t}}{d\overline{z}} \quad (5)
$$

Залежності (4) та (5) дають рівняння еліптичного типу:

$$
\left(\frac{4\,Nu_\infty}{k_w\tilde{d}_e^{\,2}}\right)\tilde{w}\tilde{\Delta}t=\frac{\partial^2\tilde{\Delta}t}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{\Delta}t}{\partial\tilde{y}^2}=\mathbf{\Delta}\tilde{\Delta}t \quad (6)
$$

Розв’язання диференційного рівняння (6) ускладнюється наявністю добутку невідомих – числа Нусельта та відносної надлишкової температури. Таким чином, кінцево-різницева схема дасть систему нелінійних рівнянь.

Коефіцієнт поля швидкості k_w визначається шляхом наближеного інтегрування профілю швидкості, тому він відомий лише наближено. Щоб вилучити наближений коефіцієнт k_w з рівняння (6) замість числа Нусельта приймаємо як невідому весь вираз у дужках.

Граничні умови в даній математичній моделі відомі абсолютно точно: на межі перерізу при $y=y_{max}(x)$ $\tilde{w}=\tilde{\Delta}t=0$, а при $x=y=0$ $\tilde{w}=\tilde{\Delta}t=1$.

У чверті двокутного перерізу вводимо нерівномірну сітку (рис. 3 а) таким чином, щоб крайні вузли знаходилися на межі перерізу. Це дозволяє абсолютно точно врахувати граничні умови.

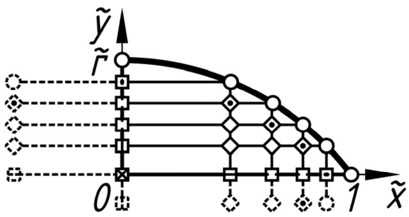
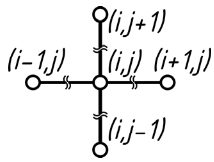
а)  б) 

Рис. 3. Сітка на чверті перерізу: а – схема сітки, б – шаблон сітки. Пунктиром позначені фантомні вузли.

Відкинуті три чверті перерізу замінюються умовами симетрії параметрів течії. Для цього вузли, що мають сусідні вузли на осях перерізу, віддзеркалюються відносно відповідних осей з утворенням фантомних вузлів. Умова симетрії: параметри течії кожного фантомного вузла дорівнюють параметрам відповідного вихідного вузла.

Оскільки градієнт швидкості біля осі перерізу є мінімальним, а ближче до вершин зростає, то доцільно ввести сітку, що згущується до вершини перерізу. Хороший результат показала така сітка, що вузли на межі перерізу ділять її на рівні частини.

Приймаємо шаблон сітки "хрест" (рис. 3 б). Апроксимація похідних на нерівномірній сітці та рівняння (1) та (6) набувають громіздкого вигляду. При розв'язання рівняння (6) на певній сітці використовується розв'язок рівняння (1) на такій же сітці. Цей розв'язок підставляється до рівняння (6). Розв'язання виконується за допомогою функції fsolve програми SciLab [9].

Результати розв'язання рівняння дають гладку криву (рис. 4). При відношенні довжини малої півосі r до довжини великої півосі R $\tilde{r} = r/R = 1$ маємо значення $Nu_\infty = 3{,}6565$, яке відрізняється на 0,011 % від довідникового [10] – $Nu_\infty = 2{,}70442/2 = 3{,}6569$. Останнє як більш достовірне використано при апроксимації.

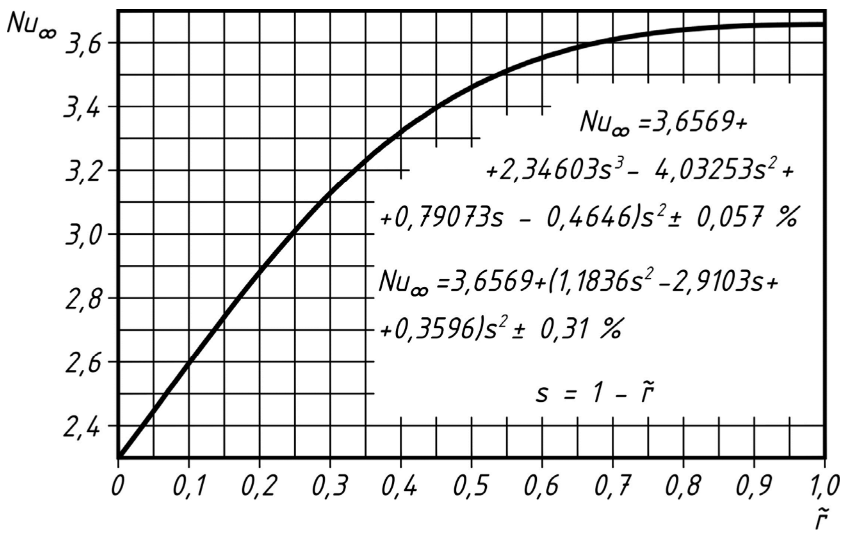


Рис. 4. Число Нусельта

Проаналізуємо геометричні особливості відносного профілю температури (рис. 5). При $\tilde{r} = 1$ (рис. 5 а,б) маємо вісесиметричний профіль з найбільшим градієнтом температури біля меж. Чим більшим є градієнт температури біля межі перерізу [10], тим більш інтенсивно відбувається теплообмін. Тому число Нусельта (рис. 4) є найбільшим саме при круглому перерізі ($\tilde{r} = 1$).

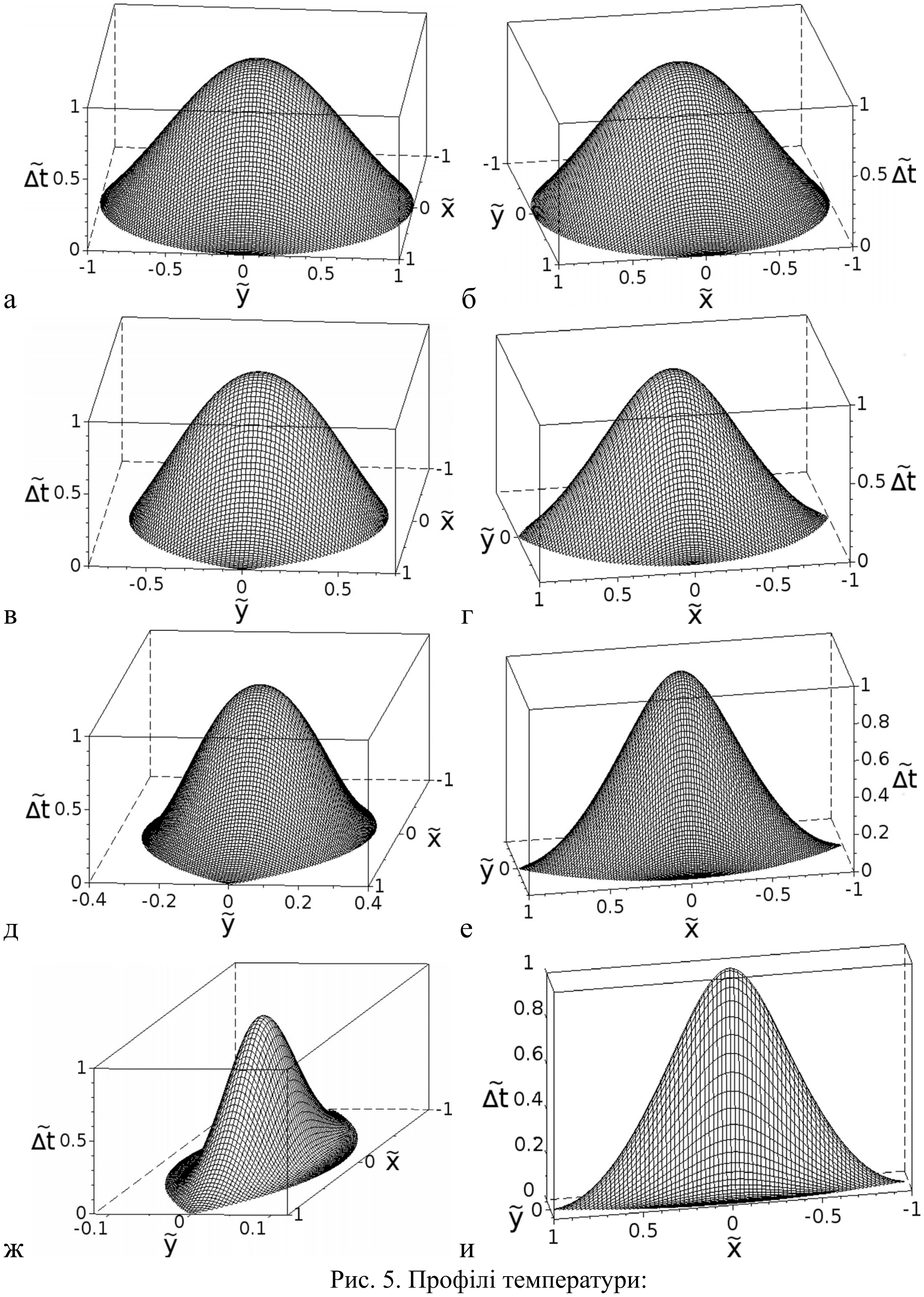


Рис. 5. Профілі температури:
а, б – $\tilde{r} = 1$; в, г – $\tilde{r} = 0{,}67$; д, е – $\tilde{r} = 0{,}33$; ж, и – $\tilde{r} = 0{,}1$;

При $\tilde{r} = 0{,}67$ (рис. 5 в,г) біля вершин перерізу профіль набуває сідлоподібної форми. Це призводить до зниження градієнта температури біля вершин. Але в більшій частині меж перерізу він зберігається на високому рівні. Саме тому число Нусельта зменшується порівняно з круглим перерізом лише на 1,67 %. При $\tilde{r} = 0{,}52$ спостерігається зменшення числа Нусельта на 4,78 %, а при 0,51 – 5,08 %. Десятивідсотковий бар'єр досягається біля $\tilde{r} = 0{,}4$. При $\tilde{r} = 0{,}4$ маємо зниження числа Нусельта на 9,20 %, а при $\tilde{r} = 0{,}38$ – 10,14 %. Подальше зменшення відношення довжини осей $\tilde{r}$ призводить до суттєвого і близького до лінійного (рис. 4) зменшення числа Нусельта, тобто інтенсивності теплообміну. Причина цього явища добре видна з рис. 5 д. Біля кінців малої осі перерізу також формується сідлоподібний профіль температури. При $\tilde{r} = 0{,}1$ вздовж усього перерізу маємо значно менший градієнт ніж у центральній частині. Профіль набуває капелюхоподібної форми з "полями" вздовж стінок. При цьому залежність між числом Нусельта і співвідношенням довжини осей $\tilde{r}$ стає лінійною.

Отже, інтенсивний теплообмін спостерігається при відношеннях довжини осей $\tilde{r} \le 0{,}52$. При цьому тепловіддача відрізняється не більше ніж на 5 % від круглого трубопроводу. При $\tilde{r} \le 0{,}4$ інтенсивність теплообміну знижується зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі до 10 %. Подальше зменшення відношення $\tilde{r}$ суттєво погіршує умови теплообміну і не рекомендується при конструюванні теплообмінників.

Висновки. Отримано двовимірний профіль температури стабілізованої усталеної ламінарної течії у двокутному каналі при стабілізованому теплообміні. Проаналізовано геометричні особливості профілю температури. Біля вершин він має сідловидну форму. При зменшенні відношення довжин осей аналогічна форма профілю спостерігається біля кінців малої осі. При малих відношеннях довжин осей перерізу – біля 0,1 або менше – профіль набуває капелюхоподібної форми з полями, оскільки вздовж усього периметру утворюється смуга з малим градієнтом температури. Показано, що при значеннях відношення довжин осей менше 0,4 інтенсивність тепловіддачі є низькою. Такі співвідношення не рекомендуються при розробці теплообмінників.

Література

1. *Кезля Е.А*. Воздухонагреватель из полимерной плёнки для систем воздушного отопления теплиц. – Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук. -К., 1988.

2. *Алишаев М.Г.* Точные решения ламинарного движения вязкой жидкости по прямолинейным трубам некруглых сечений. // Дагестанские электронные математические известия: Научно-образовательный журнал: Электронное периодическое издание. Т. 1 2013 С. 88-102 [http://mathreports.ru/static?id=130]

3. *Алямовский А.А.* SolidWorks 2007/2008. Компьютерное моделирование в инженерной практике / А.А. Алямовский, А.А. Собачкин, Е.В. Одинцов, А.И. Харитонович, Н.Б. Пономарёв. – Спб.: БХВ-Петербург, 2008. – 1040 с.
4. *Алямовский А.А.* SolidWorks Simulation. Как решать практические задачи. – Спб.: БХВ-Петербург, 2012. – 448 с.
5. *Белов И.А.*, Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений: Учеб. пособие. – СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2001. –108 с.
6. *Maric T.*, Mooney K., Höpken. J. Getting Started with OpenFOAM Technology: RAW. – Birmingham-Mumbai.: PACKT Publishing, 2014. – 59 p. [https://www.safaribooksonline.com/library/view/getting-started-with/9781782161769/]
7. *Walter E.* Numerical Methods and Optimization: a Consumer Guide /- Springer, 2014.- 476 p.
8. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. – М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. - 848 с.
9. *Алексеев Е.Р.* Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова, Е.А. Рудченко. – М.: ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 260 с.
9. *Цветков Ф.Ф.* Тепломассообмен: учебник для ВУЗов / Ф.Ф. Цветков, Б.А. Григорьев. – М.: Издательский дом МЭИ, 2011. – 562 с.

АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИИ ПРОФИЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ В ДВУУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ СТЕНОК

Е.Н. Гумен, В.А. Мілейковський, В.Г. Дзюбенко

Выполнен расчёт и рассмотрены геометрические особенности профиля температуры стабилизированного установившегося ламинарного течения в канале двуугольного сечения при постоянной температуре стенок и стабилизированном теплообмене. Проанализировано влияние особенностей формы профиля на теплоотдачу. Показано, что профиль температуры имеет седловидную форму около вершин двуугольника. С уменьшением отношения длины осей сечения около концов короткой оси профиль также приобретает седловидную форму. Это снижает интенсивность теплообмена. При малых отношениях – до 0,1 – профиль приобретает шляпообразную форму, что приводит к линейному уменьшению коэффициента теплоотдачи

ANALYSIS OF TEMPERATURE PROFILE GEOMETRY AT LAMINAR FLOW IN A DIGONAL DUCT WITH CONSTANT WALL TEMPERATURE

O. Gumen, V. Mileikovskyi, V. Dziubenko

We performed calculations and analysis of geometrical features of temperature profile for a stabilized steady laminar flow in a digonal duct at constant wall temperature and stabilized heat transfer. We analysed influence of profile shape features on heat transfer rate. The temperature profile is saddle-shaped near to digon vertices. When section axes length ratio drops the profile becomes saddle-shaped also at short axis ends. It decreases the heat transfer rate. At low relations – under 0,1 – the profile has shape like a hat with brim that cause linear heat transfer rate decrease.