

*total displacement of points (nodes) of the equipment and the horizontal and vertical displacement have correlation module, which indicates that these displacement are actually independent of each other.*

*Early identification and proper use of data on deformations would increase the period of planning and safe operation of industrial equipment.*

**Keywords:** *deformations, partial (angular, horizontal, vertical) deformations, relative deformations.*

Надійшла до редакції

08.12.2015

УДК 528.48

**Р.В. Шульц**, *д-р техн. наук, професор,*

*Київський національний університет будівництва і архітектури*

**М.В. Білоус**, *канд. техн. наук, доцент,*

*ПубАТ Київметробуд, ДП «Укргеодезмарк», директор*

**В.Я. Ковтун**, *головний інженер*

*ПубАТ Київметробуд, ДП «Укргеодезмарк»,*

**Н.В. Куліченко**, *асп.,*

**О. М. Гончарюк**, *асп.,*

*Київський національний університет будівництва і архітектури*

## **ВИЗНАЧЕННЯ КРЕНІВ ІСТОРИЧНИХ СПОРУД ЗА МЕТОДОМ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНУВАННЯ**

*У роботі запропоновано методику визначення кренів історичних споруд за матеріалами наземного лазерного сканування. Розглянуто методику визначення переміщення споруд, що мають значну кількість площинних елементів. Наведено математичну модель апроксимації результатів сканування рівнянням площини за методом найменших квадратів. Отримані у двох циклах за апроксимацією рівняння площини порівняно через величину зміни нормальних векторів площини. Обчислення лінії нульового переміщення виконано за допомогою рівняння площини в неявній формі. Для отримання неявного рівняння площини використано алгоритм, що ґрунтується на обчисленні власних значень та нормованих власних векторів. Використовуючи лінії нульового переміщення, запропоновано алгоритм для визначення лінійного переміщення площини історичної споруди. Розроблену методику апробовано за матеріалами сканування історичної споруди, в зоні будівельних робіт у м. Києві.*

**Ключові слова:** *наземне лазерне сканування, крен, рівняння прямої, рівняння площини, вектор нормалі, проекції вектору нормалі.*

**Вступ.** *Спостереження за кренами інженерних споруд традиційно належить до класичних завдань інженерної геодезії. Особливо актуальними є завдання*

спостереження за об'єктами в зоні інтенсивного ведення будівельних робіт. Нині відомо чимало методів та способів визначення кренів споруд. Традиційні методи спостережень до теперішнього часу не втратили своєї актуальності. Дотепер широко застосовують метод проектування, методи кутів і напрямків, різні варіанти засічок. Останнім часом набувають популярності методи, пов'язані із використанням сучасного геодезичного обладнання. Під час спостережень за кренами висотних споруд значні переваги мають ГНСС-технології у комбінації із високоточними цифровими датчиками нахилу. Для спостереження за історичними спорудами найбільш доцільно використовувати електронні тахеометри, зокрема роботизовані, а також методи наземної фотограмметрії та наземного лазерного сканування [6; 7]. Останні два, окрім безпосереднього визначення крену, дають змогу отримати цілісну картину деформування будівлі завдяки використанню тривимірної моделі. Найбільш перспективним й одночасно найменш дослідженим є метод наземного лазерного сканування. Через великий надлишок даних, особливо у методі наземного лазерного сканування, актуальним завданням є розроблення методики отримання потрібних характеристик деформаційного процесу за матеріалами сканування. До головних деформаційних характеристик, які потрібно визначити, належать безпосередньо крен будівлі та загальне переміщення споруди. Розроблення методики для визначення цих характеристик за матеріалами наземного лазерного сканування і висвітлено в представленій роботі.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Аналізуючи можливості методу наземного лазерного сканування, не будемо зупинятись на відомих геодезичних методах спостереження за кренами. Такий аналіз наведено у більшості класичних робіт з інженерної геодезії [8]. Загалом можливості наземного лазерного сканування для вирішення завдань інженерної геодезії детально подано в роботах [4; 9]. В цих роботах розглянуто технологічні схеми та алгоритми застосування сканування для розв'язання завдань з топографічного знімання, моніторингу, виконавчого знімання та ін. Спостереження за кренами є частиною загального завдання геодезичного моніторингу. Розглянемо можливості та особливості застосування лазерного сканування для вирішення завдань саме з геодезичного моніторингу. Особливості геодезичного моніторингу тісно пов'язані з категорією об'єктів, для яких його виконують. Зокрема, в роботах [1; 11; 15; 17] наведено приклади виконання моніторингу висотних споруд. Розглянуто переваги та особливості моніторингу висотних будівель, градирень, телевізійних веж. У такому випадку наземне лазерне сканування є допоміжним засобом у застосуванні геодезичних технологій, у яких використовують ГНСС та електронні тахеометри. Основні деформаційні характеристики визначають за результатами геодезичних спостережень, а дані лазерного сканування використовують для підтвердження отриманих характеристик або для виявлення локальних переміщень поверхонь об'єктів. Використання наземного лазерного сканування як самостійного засобу для визначення деформаційних характеристик потребує зовсім інших підходів. Для прикладу у праці [10] розглянуто методику застосування лазерного сканування для моніторингу житлових споруд. У цій ситуації результати, отримані із сканування, є фактично

безконтрольними, отже, виконання робіт слід планувати і виконувати більш ретельно. Проте головна проблема полягає у виконанні моделювання споруд за результатами сканування, оскільки деформаційні характеристики визначають безпосередньо за геометричними змінами моделей споруд між циклами спостережень. Нагадаємо, що поверхні будь-яких штучних споруд обов'язково утворені комбінацією геометричних примітивів та їх елементів. До таких примітивів належать площина, конус, циліндр, сфера і тор. У більшості робіт [3;13;16] дослідники, на жаль, обмежуються простим порівнянням двох хмар сканування з обчисленням різниць координат між двома поверхнями. Не є винятком і виконання моніторингу історичних споруд за даними наземного лазерного сканування [18], хоча зрозуміло, що отримані безпосередньо різниці координат дають лише загальне уявлення про перебіг деформаційного процесу. З цієї позиції найбільш адекватним є підхід, розглянутий у праці [14], де наземне лазерне сканування використано для моніторингу тунелів метрополітену. Для отримання деформаційних характеристик за результатами сканування у кожному циклі виконують моделювання хмари сканування поверхнею циліндра із визначенням його геометричних параметрів. У подальшому завдяки порівнянню математичних моделей можна визначити не тільки переміщення окремих точок споруди, а й нахил, поперечне зміщення, крутіння тощо. Саме такий підхід, що базується на використанні рівняння площини, буде розглянутий далі.

**Мета роботи.** Метою публікації є висвітлення запропонованої авторами методики визначення кренів історичних споруд за результатами наземного лазерного сканування. Методику оснований на використанні площинних елементів із подальшим обчисленням взаємного переміщення цих елементів.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо методику визначення деформаційних характеристик історичних споруд за матеріалами наземного лазерного сканування. Перш за все вважатимемо, що виконуємо дослідження споруд, які мають форму поверхні, утворену здебільшого площинними елементами. До початку моделювання площинних елементів виконують фільтрацію хмари точок сканування та видаляють грубі помилки. Після попереднього оброблення на хмарі точок виконують сегментацію з метою виділення всіх площинних елементів. Методики й алгоритми фільтрації і сегментації докладно викладені у роботах [2; 9]. Остаточно отримують хмару точок, на якій виділено множини точок, що належать різним площинам. На цьому підготовчий етап аналізу переміщень завершується.

Наступним кроком є отримання рівнянь площини. З метою визначення рівняння апроксимаційної площини в нормальній формі, скористаємося алгоритмом, запропонованим в літературі [12]. Від рівняння площини в неявній формі, що задається як

$$AX + BY + CZ + D = 0, \quad (1)$$

перейдемо до рівняння площини у вигляді (2):

$$\left(\frac{A}{D}\right)X + \left(\frac{B}{D}\right)Y + \left(\frac{C}{D}\right)Z = -1. \quad (2)$$

Оскільки рівняння має лінійну форму, то достатньо просто перейти до рівнянь поправок:

$$aX_i + bY_i + cZ_i = -1 + v_i. \quad (3)$$

У рівнянні поправок (3) поправки  $v_i$  відповідають відстані між точкою та площиною. Подальші обчислення виконують за класичною схемою методу найменших квадратів. Система рівнянь поправок у матричному вигляді записують таким чином:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{l} - \mathbf{v}, \quad (4)$$

звідки оцінку параметрів площини знаходять, як

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l}.$$

Вектор поправок визначають з системи рівнянь (4).

$$\mathbf{v} = \mathbf{l} - \mathbf{AX}.$$

У системі рівнянь (4) використано такі позначення:  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  - вектор

параметрів площини;  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ X_n & Y_n & Z_n \end{bmatrix}$  - матриця коефіцієнтів рівнянь поправок;

$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \dots \\ -1 \end{bmatrix}$  - вектор-стовпчик вільних членів.

Вважатимемо, що з двох циклів спостережень з однієї і тієї самої станції сканування ми отримали дві множини точок, які апроксимовано рівнянням площини. Тоді матимемо відповідно дві матриці коефіцієнтів рівнянь поправок  $\mathbf{A}_1$  і  $\mathbf{A}_2$ , два вектори оцінок параметрів  $\mathbf{X}_1$  і  $\mathbf{X}_2$  та два вектори поправок  $\mathbf{v}_1$  і  $\mathbf{v}_2$ . Для отриманих рівнянь площини у двох циклах виконаємо оцінку точності. Розрахуємо середні квадратичні похибки одиниці ваги:

$$\mu_1^2 = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1}{n-k}; \quad \mu_2^2 = \frac{\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2}{n-k}, \quad (5)$$

і кореляційні матриці оцінок параметрів:

$$\mathbf{K}_1 = \mu_1^2 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1}; \quad \mathbf{K}_2 = \mu_2^2 (\mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2)^{-1}. \quad (6)$$

Аналіз переміщень між циклами пропонуємо виконувати за двома характеристиками:

- зміна кутового орієнтування площини між циклами (крен та кручення споруди);
- лінійне зміщення площини у просторі (загальне переміщення споруди).

Отримаємо алгоритм для визначення зміни кутового орієнтування площини. Для цього використаємо вектори нормалі до площини у різних циклах. Від

визначених параметрів площини перейдемо до одиничних векторів нормалей площини у кожному циклі за виразами:

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{X}_1}{\|\mathbf{X}_1\|}; \quad \mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{X}_2}{\|\mathbf{X}_2\|}, \quad (7)$$

де використано норми векторів нормалей

$\|\mathbf{X}_1\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$ ,  $\|\mathbf{X}_2\| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$ . Елементи векторів у виразі (7) можна представити так:

$$n_1^x = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}; \quad n_1^y = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}; \quad n_1^z = \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}};$$

$$n_2^x = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}; \quad n_2^y = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}; \quad n_2^z = \frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Для визначення кутового розвороту площини між двома циклами утворимо різницю двох одиничних векторів:

$$\mathbf{d} = \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1. \quad (8)$$

Норма цієї різниці визначає кут між одиничними векторами нормалей

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}.$$

Отримані величини мають чітку геометричну інтерпретацію, яку представлено на рис. 1.

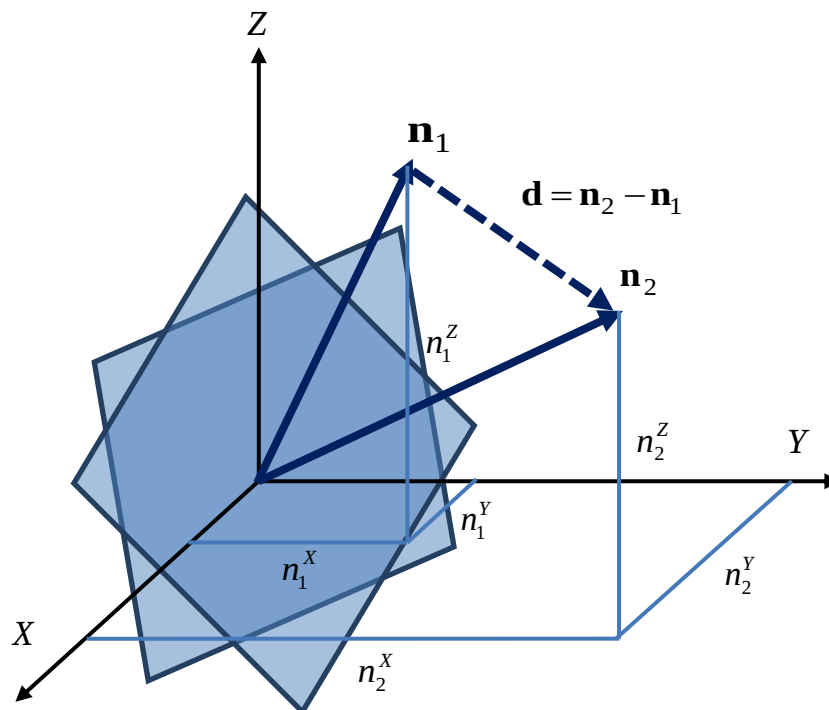


Рис. 1. Взаємне розміщення двох одиничних векторів нормалей площини

Переміщення в інших напрямках можна обчислити через напрямні косинуси вектора відхилень нормалі до площини:

$$\gamma_X = \rho d_X, \gamma_Y = \rho d_Y, \gamma_Z = \rho d_Z.$$

Для обчислення переміщень в лінійній мірі для крайніх точок споруди можна використати максимальні різниці координат  $\Delta X_{\max}, \Delta Y_{\max}, \Delta Z_{\max}$ :

$$\Delta_X = \Delta X_{\max} \rho d_X, \Delta_Y = \Delta Y_{\max} \rho d_Y, \Delta_Z = \Delta Z_{\max} \rho d_Z.$$

Для оцінювання точності різниці одиничних векторів використаємо вираз, запропонований у літературі [12]:

$$\mathbf{K}_d = \frac{1}{\|\mathbf{X}_1\|^2} \mathbf{K}_1 + \frac{1}{\|\mathbf{X}_2\|^2} \mathbf{K}_2. \quad (9)$$

Позначення у рівнянні (8) зрозумілі із виразів (5) і (6). Для визначення точності, з якою оцінено різницю векторів, застосуємо правило перетворення кореляційних матриць. Різниця векторів є функцією  $\|\mathbf{d}\|$ , тому треба знайти матрицю частинних похідних:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \|\mathbf{d}\|}{\partial d_X} & \frac{\partial \|\mathbf{d}\|}{\partial d_Y} & \frac{\partial \|\mathbf{d}\|}{\partial d_Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_X}{\sqrt{d_X^2 + d_Y^2 + d_Z^2}} & \frac{d_Y}{\sqrt{d_X^2 + d_Y^2 + d_Z^2}} & \frac{d_Z}{\sqrt{d_X^2 + d_Y^2 + d_Z^2}} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Середню квадратичну похибку різниці двох векторів знаходимо з виразу

$$m_{\|\mathbf{d}\|}^2 = \mathbf{C} \mathbf{K}_d \mathbf{C}^T. \quad (11)$$

За загальновідомим в інженерній геодезії підходом величину різниці між векторами  $\|\mathbf{d}\|$  вважають значущою, якщо вона перевищує  $t \cdot m_{\|\mathbf{d}\|}$ , де параметр  $t$  вважають рівним 2-3 залежно від прийнятої довірчої ймовірності.

За викладеною методикою оцінюють параметри кутового орієнтування площини. Недолік полягає в тому, що за загального лінійного переміщення споруди параметри площини у рівнянні (2) не змінюються. Загальне переміщення споруди можна визначити за зміною коефіцієнта  $D$  у рівнянні (1). Для отримання рівняння площини у формі (1) розглянемо методику, запропоновану в літературі [5].

Як і раніше, скористаємося матрицею координат точок:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ X_n & Y_n & Z_n \end{bmatrix}.$$

Знайдемо матрицю  $\mathbf{C}$ , що складається із середніх значень координат:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i (Y_i, Z_i). \quad (12)$$

Далі знаходимо матрицю  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = n \mathbf{C}^T \mathbf{C} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}. \quad (13)$$

Для матриці  $\mathbf{M}$  знаходимо власні значення  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  та відповідні їм нормовані власні вектори  $\mathbf{N}_{11}, \mathbf{N}_{12}, \mathbf{N}_{13}$ . Вибираємо максимальне власне значення та нормований власний вектор, відповідний цьому значенню. Відповідно матимемо  $\mathbf{N}_{1i}^{\max} = (A \ B \ C)$ , за якими обчислюємо коефіцієнт  $D$ :

$$D = -\mathbf{N}_{1i}^{\max} \mathbf{C}^T. \quad (14)$$

За виразами (12) – (14) отримуємо значення коефіцієнтів для двох циклів  $D_1$  і  $D_2$ . Значення цих коефіцієнтів дають змогу обчислити відстані по нормалі до площини відносно будь-якої точки. У найпростішому випадку, коли сканування у двох циклах виконується з однієї і тієї самої станції з координатами  $X_S, Y_S, Z_S$ , можна обчислити відстані  $\Delta_1, \Delta_2$  від станції сканування до площини споруди за виразами:

$$\Delta_1 = \frac{A_1 X_S + B_1 Y_S + C_1 Z_S + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad \Delta_2 = \frac{A_2 X_S + B_2 Y_S + C_2 Z_S + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (15)$$

Утворимо різницю:

$$\delta = \Delta_2 - \Delta_1, \quad (16)$$

яка характеризує загальне переміщення споруди у напрямку, перпендикулярному до площини.

Відмітимо особливість цієї методики визначення кренів і переміщень, яка пов'язана із особливістю вимірювання системами наземного лазерного сканування. Оскільки вимірювання виконують не до конкретних марок, а до поверхні об'єкта, то загальне переміщення можна визначити у напрямку, перпендикулярному до площини. Найчастіше саме ця величина цікавить замовника. Якщо потрібно визначити складові загального переміщення за координатними осями, використовують величину  $\delta$ , яку через напрямні косинуси площини проєктують на координатні осі.

Для більш докладного аналізу закону переміщення треба розрахувати лінію нульового переміщення. Це просторова лінія, яка проходить через досліджувану поверхню і вздовж якої переміщення дорівнюють нулю (рис. 2). Відносно цієї лінії переміщення мають різне спрямування. Пряма, що не проходить через досліджувану поверхню, свідчить про загальне переміщення споруди.

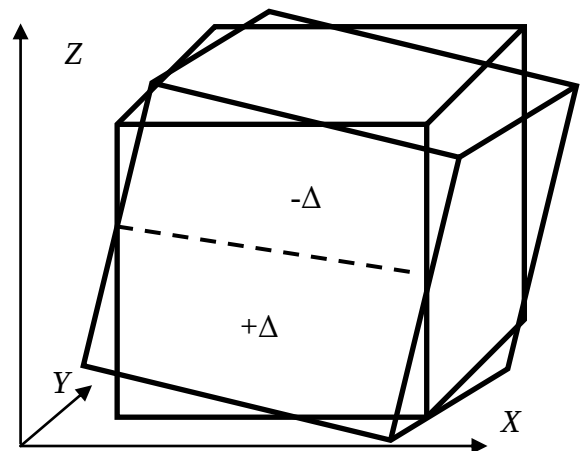


Рис. 2. Лінія нульового переміщення

Розглянемо методику визначення лінії нульового переміщення. Знайшовши коефіцієнти площини у двох циклах у формі (1), визначимо лінію перетину між площинами, яка визначає лінію нульового переміщення. Для цього слід знайти рівняння прямої як результат перетину двох площин. У векторній формі рівняння просторової прямої має вигляд  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 + \mathbf{V}t$ . У параметричній формі рівняння записують так [5]:

$$X(t) = X_0 + lt, \quad Y(t) = Y_0 + mt, \quad Z(t) = Z_0 + nt. \quad (17)$$

Якщо пряма визначається як результат перетину двох площин, заданих  $\mathbf{F}_1 = (\mathbf{N}_1 \ D_1)$  та  $\mathbf{F}_2 = (\mathbf{N}_2 \ D_2)$ , то пряма, на якій вони перетинаються, має невідомі вектори  $\mathbf{P}_0, \mathbf{V}$ .

Скористаємось алгоритмом, поширеним в обчислювальній геометрії [5]. Напишемо систему рівнянь двох площин:

$$(\mathbf{p} \ 1) \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1^T & \mathbf{N}_2^T \\ D_1 & D_2 \end{pmatrix} = (0 \ 0) \Rightarrow \mathbf{p} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1^T & \mathbf{N}_2^T \\ D_1 & D_2 \end{pmatrix} = (-D_1 \ -D_2).$$

Отримане векторне рівняння є еквівалентним невизначеній системі двох рівнянь з трьома невідомими. Рішення системи знаходять, застосовуючи метод множників Лагранжа. Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \frac{1}{2}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T) + \mathbf{k} \cdot \varphi(\mathbf{p}),$$

де  $\mathbf{k}$  – вектор множників Лагранжа;  $\varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1^T & \mathbf{N}_2^T \\ D_1 & D_2 \end{pmatrix} + (-D_1 \ -D_2)$  – векторна функція зв'язку координат точки  $\mathbf{p}$ .

Вектор множників Лагранжа отримують як

$$\mathbf{k} = (D_1 \ D_2) \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1^T & \mathbf{N}_2^T \end{pmatrix} \right]^{-1}. \quad (18)$$

Координати точки  $p$  знаходять за виразом

$$\mathbf{p} = -(D_1 \ D_2) \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_1^T & \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2^T \\ \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{N}_1^T & \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{N}_2^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Якщо рівняння двох площин задані у вигляді рівностей

$$A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1 = 0; \quad A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2 = 0,$$

то напрямні косинуси прямої, на якій перетинаються площини, визначають за виразами (20).

$$l = B_1C_2 - B_2C_1, \quad m = C_1A_2 - C_2A_1, \quad n = A_1B_2 - A_2B_1. \quad (20)$$

Ця лінія визначає пряму нульового переміщення.

Розглянута вище комплексна методика аналізу переміщень за матеріалами наземного лазерного сканування була апробована під час спостережень за кренами однієї з історичних будівель в Києві (рис. 3). Причиною виникнення кренів споруди

є виконання будівельних робіт в безпосередній близькості до будівлі, зокрема котлована глибиною вісім метрів. Спостереження виконували за двома незалежними методами. Як основне джерело інформації використано матеріали геодезичних спостережень. На стіні будівлі закріплено шість марок, для яких визначили просторові координати в кожному циклі. В цокольній частині будівлі були встановлені деформаційні марки, для яких у кожному циклі виконували геометричне нівелювання за програмою III класу. Для перевірки результатів геодезичних спостережень виконано два цикли спостережень за методом наземного лазерного сканування.

У кожному циклі лазерного сканування як опору використано геодезичні пункти, розташовані поза зоною осідання споруди.

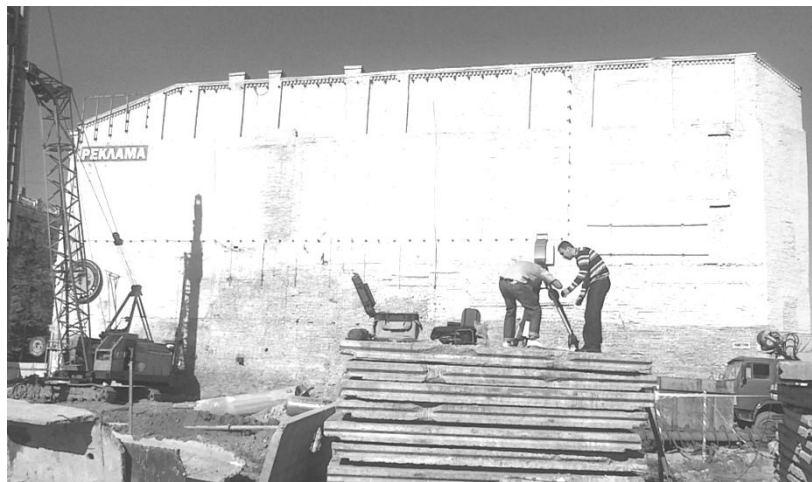


Рис. 3. Досліджувана будівля

Марки сканера для прив'язки сканів в геодезичну систему координат встановили на геодезичних пунктах та деформаційних марках будівлі (рис. 4).

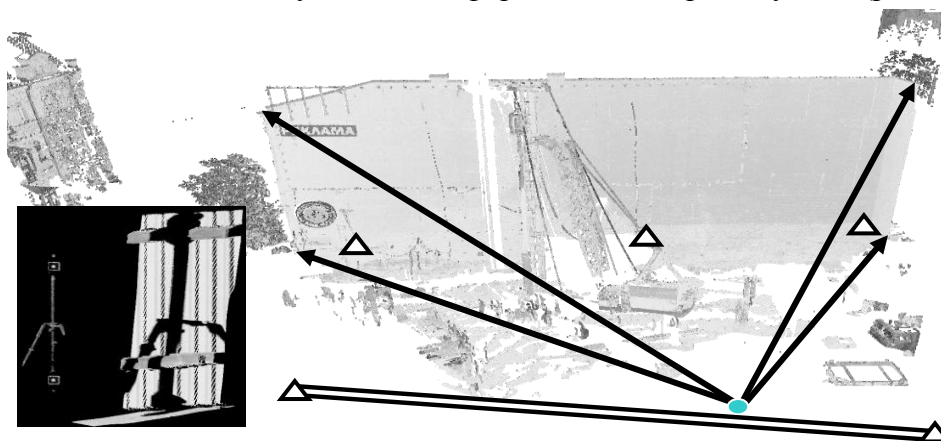


Рис. 4. Прив'язка станцій сканування в геодезичну систему координат

У першому циклі роботи були виконані з однієї станції сканування. На рис. 5 і 6 прямокутником показано область, яка була виділена після сегментації і для якої у першому і другому циклах виконано апроксимацію площиною. Далі наводимо результати розрахунків та визначення переміщень.

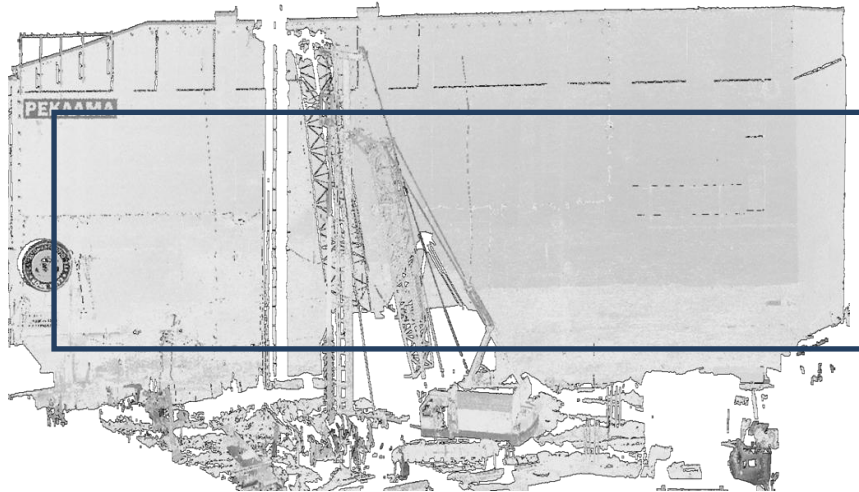


Рис. 5. Перший цикл спостережень

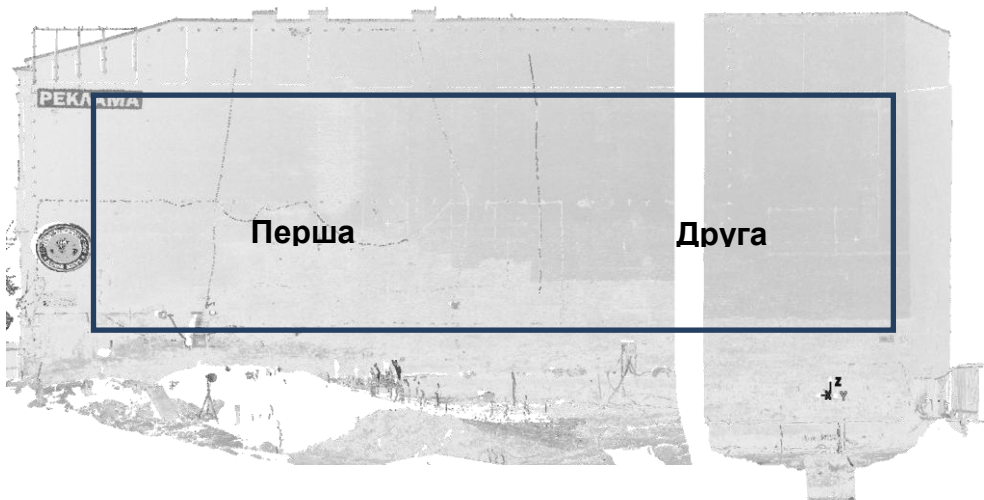


Рис. 6. Третій цикл спостережень

Визначимо за виразом (4) оцінки параметрів у двох циклах:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0.00996 \\ -0.01993 \\ -1.5934 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0.009997 \\ -0.019986 \\ 3.2851 \times 10^{-6} \end{bmatrix},$$

з оцінкою точності апроксимації за формулами (5):

$$\mu_1 = 1.8 \times 10^{-3} \text{ мм}; \quad \mu_2 = 1.8 \times 10^{-3} \text{ мм}.$$

За отриманими оцінками параметрів визначимо одиничні вектори нормалей до площини за виразом (7).

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 0.4470 \\ -0.8945 \\ -7.15 \times 10^{-4} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0.4474 \\ -0.8944 \\ 1.47 \times 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи вираз (8), розраховуємо переміщення вектора нормалі:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3.380 \times 10^{-4} \\ 1.687 \times 10^{-4} \\ 8.621 \times 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Норма загального переміщення дорівнює  $\|\mathbf{d}\| = 9.413 \times 10^{-4}$  рад, або у кутовій мірі  $\gamma = 3.24'$

Кореляційні матриці параметрів знаходять за формулами (6)

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2.65 \times 10^{-9} & -4.08 \times 10^{-9} & 1.24 \times 10^{-9} \\ -4.08 \times 10^{-9} & 6.83 \times 10^{-9} & -2.48 \times 10^{-9} \\ 1.24 \times 10^{-9} & -2.48 \times 10^{-9} & 1.16 \times 10^{-9} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2.64 \times 10^{-9} & -4.06 \times 10^{-9} & 1.24 \times 10^{-9} \\ -4.06 \times 10^{-9} & 6.81 \times 10^{-9} & -2.47 \times 10^{-9} \\ 1.24 \times 10^{-9} & -2.47 \times 10^{-9} & 1.16 \times 10^{-9} \end{pmatrix}.$$

Для оцінювання точності визначення зміщення між векторами знаходимо матрицю частинних похідних (10):

$$\mathbf{C} = (-0.359 \quad -0.179 \quad -0.916)$$

та кореляційну матрицю (9)

$$\mathbf{K}_d = \begin{pmatrix} 5.30 \times 10^{-9} & -8.14 \times 10^{-9} & 2.48 \times 10^{-9} \\ -8.14 \times 10^{-9} & 1.36 \times 10^{-9} & -4.96 \times 10^{-9} \\ 2.48 \times 10^{-9} & -4.96 \times 10^{-9} & 2.32 \times 10^{-9} \end{pmatrix}.$$

Оцінку точності виконаємо за виразом (11). Знайдемо

$$m_{\|\mathbf{d}\|} = 4.5 \times 10^{-5} \text{ рад, або у кутовій мірі } m_\gamma = 0.2',$$

тобто отримане переміщення є значущою величиною і визначене із достатньою точністю.

Для того, щоб знайти загальне переміщення споруди за виразом (13), обчислимо матриці  $\mathbf{M}$ , для яких знайдемо власні значення

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} -1.360 \times 10^4 \\ -2.688 \times 10^3 \\ -0.786 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} -1.361 \times 10^4 \\ -2.688 \times 10^3 \\ -0.775 \end{pmatrix}$$

та нормовані власні вектори

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} 0.894 & 3.4 \times 10^{-5} & 0.447 \\ 0.447 & 3.529 \times 10^{-5} & -0.894 \\ 4.62 \times 10^{-5} & 1 & -1.636 \times 10^{-5} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{N}_2 = \begin{pmatrix} 0.894 & 4.852 \times 10^{-4} & 0.448 \\ 0.448 & -6.941 \times 10^{-4} & -0.894 \\ 1.233 \times 10^{-4} & 1 & 8.378 \times 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

За виразом (14) визначаємо коефіцієнти

$$D_1 = 44.711; D_2 = 44.566.$$

Знаючи координати станції сканування:  $X_S = 120.451$ ,  $Y_S = 68.452$ ,  $Z_S = 104.012$ , розрахуємо переміщення площини між циклами за виразами (15):

$$\Delta_1 = 37.409 \text{ м}; \Delta_2 = 37.424 \text{ м}$$

та знайдемо загальне переміщення площини  $\delta = 15$  мм. Наявність загального переміщення свідчить про те, що лінія нульового переміщення не проходить через фасад будівлі, тобто всі переміщення мають однаковий знак.

Для прикладу розрахуємо параметри лінії нульового переміщення. Визначимо множники Лагранжа  $\mathbf{k} = (189.79 \quad -727.7151)$ . За цими множниками знайдемо вектор, що належить лінії нульового переміщення

$$\mathbf{p} = (44.398 \quad 72.200 \quad 126.106)$$

та напрямні косинуси лінії

$$l = -8.5 \times 10^{-4}; m = -3.899 \times 10^{-4}; n = 0.401.$$

Наостанок розрахуємо переміщення крайніх точок споруди:

$$\Delta_X = \Delta X_{\max} \rho d_X = 10; \Delta_Y = \Delta Y_{\max} \rho d_Y = 2.5 \text{ мм}; \Delta_Z = \Delta Z_{\max} \rho d_Z = 12 \text{ мм}.$$

У лінійній мірі ця величина є відповідною зміщенню у верхній частині будівлі на +16 мм, що добре кореспондується з даними геодезичних вимірювань, які підтверджують факт крену стіни в напрямку, протилежному котловану, до 20 мм, а загальне осідання становить 12 мм.

Отже, запропонована методика дає змогу розв'язати задачу з визначення кренів історичних споруд за методом наземного лазерного сканування. Подальші дослідження слід виконати для об'єктів, що мають не лише площинну, а й більш складну форму. До об'єктів такого класу належать, наприклад, просторові оболонки.

**Висновок.** Досліджено метод наземного лазерного сканування для визначення кренів історичних споруд. Виявлено, що метод наземного лазерного сканування дає можливість оперативно з необхідною точністю виконувати спостереження за переміщеннями історичних споруд та отримати загальну картину крену споруди, а також відстежити локальні деформації споруди. В результаті виконаного дослідження запропоновано методику визначення деформаційних характеристик за допомогою методу наземного лазерного сканування, апробовану на прикладі спостережень за креном історичної споруди у м. Києві.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Вальков В.А. Геодезические наблюдения за процессом деформирования высотных сооружений с использованием технологии наземного лазерного сканирования [Текст]: дис.... канд. техн. наук: 25.00.32 / В. А. Вальков. – СПб., 2015. – 158 с.
2. Войтенко С.П. Визначення кренів інженерних споруд методом наземного лазерного сканування / Войтенко С.П., Шульц Р.В., Білоус М.В. // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2009. – Вип. I (17). – С. 144-150.
3. Ермаков В.А. Усовершенствование методики мониторинга пространственных деформаций стержневых конструкций сооружений с помощью лазерного сканирования // Вестник МГСУ. – 2011. – № 8. – С. 206–211.
4. Наземное лазерное сканирование: монография / В.А. Середович, А.В. Комиссаров, Д.В. Комиссаров, Т.А. Широкова. – Новосибирск: СГГА, 2009. – 261 с.
5. Никулин Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 560 с.
6. Рубцов И.В. Назначение и современные способы проведения инструментального геодезического мониторинга памятников гражданской архитектуры / И.В. Рубцов, Т.А. Пятницкая // Вестник МГСУ. – 2013. – № 5. – С. 80–86.
7. Симонян В.В. Инструментальное определение кренов стен Борисоглебского монастыря / В.В. Симонян, А.И. Кузнецов, Э.С. Черненко, Т.А. Пятницкая // Вестник МГСУ. – 2011. – № 1(2). – С. 239–243.
8. Сытник В.С. Геодезический контроль точности возведения монолитных зданий и сооружений. / В.С. Сытник, А.Б. Ключин. – М.: Стройиздат, 1981. – 119 с.
9. Шульц Р.В. Теорія і практика наземного лазерного сканування в задачах інженерної геодезії [Текст]: дис.... доктора техн. наук: 05.24.01 / Р. В. Шульц. – К., 2012. – 364 с.
10. Chang Y.-M., Lai S.-H., Peng S.-M., Chang K.-T., Tu Y.-S. Data Processing of 3D Laser Scanning on Structural Deformation. // Integrating Generations FIG Working Week 2008, Stockholm, Sweden 14-19 June 2008, TS 5C – Structural Monitoring. 11p.
11. Ioannidis C., Valani A., Georgopoulos A., Tsiligiris E. 3D model generation for deformation analysis using laser scanning data of a cooling tower. / 3rd IAG / 12th FIG Symposium, Baden, May 22-24, 2006.
12. Kefyalew, H. Investigation of the use of Laser Scanning for Deformation Monitoring [Text]: Master of Science Thesis / H.Kefyalew. - Stockholm, 2013. – 67 p.
13. Koska B., Křemen T., Pospíšil J., Kyrinovič P., Halíčková J. Monitoring Of Lock Chamber Dynamic Deformation // 13<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurement and Analysis, Lisbon, 12-15 May 12-15 2008 10p.
14. Lindenbergh R., Pfeifer N., Rabbani T. Accuracy analysis of the leica HDS3000 and feasibility of tunnel deformation monitoring. ISPRS WG III/3 Workshop "Laser scanning 2005", Enschede, the Netherlands, September 12-14, 2005 6p.

15. *Schafer T., Wasmeier P., Ratke K., Foppe K., Preu G.* Motion detection at Munich's Olympic Tower with a multi-sensor system operating at different sampling rates / XXIII FIG Congress Munich, Germany, October 8-13, 2006.

16. *Schäfer T., Weber T., Kyrinovič P., Zámečnicková M.* Deformation Measurement Using Terrestrial Laser Scanning at the Hydropower Station of Gabčíkovo // INGE0 2004 and FIG Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying Bratislava, Slovakia, November 11-13, 2004 TS2 – Terrestrial Laser Scanning, 10p.

17. *Schneider D.* Terrestrial laser scanning for area based deformation analysis of towers and water damns. / 3rd IAG / 12th FIG Symposium, Baden, May 22-24, 2006.

18. *Sternberg H.* Deformation Measurements at Historical Buildings with Terrestrial Laser Scanners. // IAPRS Volume XXXVI, Part 5, Dresden 25-27 September 2006, 6p.

### REFERENCES

1. Valkov, V.A. (2015). Geodezicheskie nablyudeniya za protsessom deformirovaniya vyisotnykh sooruzheniy s ispolzovaniem tehnologii nazemnogo lazernogo skanirovaniya [Geodetic monitoring of the deformation process of high-rise buildings using the technology of terrestrial laser scanning]. *Candidate's thesis*. St. Petersburg [in Russian].

2. Voitenko, S.P., Shults, R.V., Bilous, M.V. (2009) *Vyznachennia kreniv inzhenernykh sporud metodom nazemnoho lazernoho skanuvannia* [Determination rolls engineering structures by terrestrial laser scanning]. Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva. – Modern achievements of geodetic science and industry, (Is. I (17)), (pp. 144-150) [in Ukrainian].

3. Ermakov, V.A. (2011) *Uovershenstvovanie metodiki monitoringa prostranstvennykh deformatsiy sterzhnevyykh konstruktsiy sooruzheniy s pomoschy lazernogo skanirovaniya* [The Improvement of the Method for Monitoring Strain Space Bar Structures Using Laser Scanning]. Vestnik MGSU – Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering, 8, pp. 206-211 [in Russian].

4. Seredovich V.A., Komissarov A.V., Komissarov D.V., Shirokova T.A. (2009) *Nazemnoe lazernoe skanirovanie* [Terrestrial laser scanning]. Novosibirsk: SGGA [in Russian].

5. Nikulin, E.A. (2005) *Kompyuternaya geometriya i algoritmy mashinnoy grafiki* [Computer geometry and computer graphics algorithms]. St. Petersburg: BHV-Peterburg [in Russian].

6. Rubtsov, I.V., Pyatnitskaya, T.A. (2013) *Naznachenie i sovremennyye sposoby provedeniya instrumentalnogo geodezicheskogo monitoringa pamyatnikov grazhdanskoy arhitekturyi* [Purpose and Advanced Methods of Geodetic Tool Monitoring for Monuments of Civil Architecture]. Vestnik MGSU – Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering, 5, 80–86 [in Russian].

7. Simonyan, V.V., Kuznetsov, A.I., Chernenko E.S., Pyatnitskaya T.A. (2011) *Instrumentalnoe opredelenie krenov sten Borisoglebskogo monastyirya* [Express

Estimation Detection of the Borisoglebsky Monastery Walls Slants]. Vestnik MGSU – Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering, 1(2), 239–243 [in Russian].

8. Syitnik, V.S., Klyushin, A.B. (1981) *Geodezicheskiy kontrol tochnosti vozvedeniya monolitnyih zdaniy i sooruzheniy* [Geodetic control precision monolithic construction of buildings and structures]. Moscow: Stroyizdat [In Russian].

9. Schultz, R. V. (2012). *Teoriya i prakty`ka nazemnogo lazernogo skanuvannya v zadachax inzhenernoyi geodeziyi* [Theory and practice of terrestrial laser scanning in the tasks of applied geodesy]. *Doctor's thesis*. Kyiv [in Ukrainian].

10. Chang Y.-M., Lai S.-H., Peng S.-M., Chang K.-T., Tu Y.-S.(2008) Data Processing of 3D Laser Scanning on Structural Deformation. // Integrating Generations FIG Working Week 2008, Stockholm, Sweden 14-19, TS 5C – Structural Monitoring.

11. Ioannidis C., Valani A., Georgopoulos A., Tsiligiris E. (2006) 3D model generation for deformation analysis using laser scanning data of a cooling tower. / 3rd IAG / 12th FIG Symposium, Baden.

12. Kefyalew, H. (2013) Investigation of the use of Laser Scanning for Deformation Monitoring [Investigation of the use of Laser Scanning for Deformation Monitoring]. Stockholm, 67.

13. Koska B., Křemen T., Pospíšil J., Kyrinovič P., Halíčková J. (2008) Monitoring Of Lock Chamber Dynamic Deformation // 13<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurement and Analysis, Lisbon.

14. Lindenbergh R., Pfeifer N., Rabbani T. (2005) Accuracy analysis of the leica HDS3000 and feasibility of tunnel deformation monitoring. ISPRS WG III/3 Workshop "Laser scanning 2005", Enschede, the Netherlands.

15. Schafer T., Wasmeier P., Ratke K., Foppe K., Preu G. (2006) Motion detection at Munich's Olympic Tower with a multi-sensor system operating at different sampling rates / XXIII FIG Congress Munich, Germany.

16. Schäfer T., Weber T., Kyrinovič P., Zámečnicková M. (2004) Deformation Measurement Using Terrestrial Laser Scanning at the Hydropower Station of Gabčíkovo // INGENIO 2004 and FIG Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying Bratislava, Slovakia, TS2 – Terrestrial Laser Scanning.

17. Schneider D. (2006) Terrestrial laser scanning for area based deformation analysis of towers and water dams. / 3rd IAG / 12th FIG Symposium, Baden.

18. Sternberg H.(2006) Deformation Measurements at Historical Buildings with Terrestrial Laser Scanners. // IAPRS Volume XXXVI, Part 5, Dresden.

Р.В. Шульц,  
Н.В. Белоус,  
В.Я. Ковтун,  
Н.В. Куличенко  
О.М. Гончарюк

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРЕНОВ ИСТОРИЧЕСКИХ ЗДАНИЙ МЕТОДОМ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ

*В работе предложена методика определения кренов исторических сооружений по материалам наземного лазерного сканирования. Рассмотрена методика определения перемещения сооружений, имеющих значительное количество плоскостных элементов. Приведена математическая модель аппроксимации результатов сканирования уравнением плоскости по методу наименьших квадратов. Полученные в двух циклах из аппроксимации уравнения плоскостей сравниваются через величины изменения нормальных векторов плоскостей. Вычисление линии нулевого перемещения выполнено по уравнениям плоскости в неявной форме. Для получения неявного уравнения плоскости использован алгоритм, основанный на вычислении собственных значений и нормированных собственных векторов. С использованием линии нулевого перемещения предложен алгоритм для определения линейного перемещения плоскости исторического здания. Разработанная методика апробирована на материалах сканирования исторического сооружения, находящегося в зоне строительных работ в г. Киеве.*

**Ключевые слова:** наземное лазерное сканирование, крен, уравнение прямой, уравнение плоскости, вектор нормали, проекции вектора нормали.

R.V. Schultz,  
N.V. Belous,  
V.Y. Kovtun,  
N.V. Kulichenko,  
O. Honcheryuk

## DETERMINATION OF HISTORIC BUILDINGS ROLLS BY TERRESTRIAL LASER SCANNING

*In this work we propose a method of determining the rolls of the historic buildings by materials of terrestrial laser scanning. The method of determining the movement of buildings, with a significant number of planar elements is reviewed. The mathematical model of the equation approximating the results of scanning plane by the method of least squares showed. These two cycles of the approximation of the planes are compared by the*

*amount of change of normal vectors of planes. To do this using the normal vector of the plane pass to its norm. The resulting difference is compared with the norm of valid values, which are obtained by the standard procedure for assessing the accuracy of the parameters of the plane in the method of least squares. The calculation of the zero line of movement performed by the plane equation in implicit form. To obtain the implicit equation of a plane used by the algorithm based on the computation of the eigenvalues and eigenvectors normalized. Using the zero line moving an algorithm for determining the linear displacement of the plane of a historic building is showed. Since linear movement is invariant with respect to the coordinate system, it proposed to calculate the movement relative to coordinates of the laser scan. The developed method was tested on the scanned material of historic buildings located in the area of construction works in Kiev.*

**Keywords:** *terrestrial laser scanning, roll, line equation, plane equation, the normal vector, the projection of the normal vector.*

Надійшла до редакції

10.12.2015