

УДК 539.3

Цихановський В.К., д-р техн. наук,
Прусов Д.Е., канд.техн.наук.

МЕТОД СКИНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАДАЧАХ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕОДНОРІДНОГО ПІВПРОСТОРУ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ І ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

В останній час у зв'язку з розробкою загальних алгоритмів розв'язання задач теорії пружності, пластичності і повзучості та ефективних чисельних методів їх комп'ютерної реалізації, перспектива визначення напружено-деформованого стану (НДС) в неоднорідних та анізотропних матеріальних середовищах була значно розширена. Однак великі труднощі і досі викликає практичне застосування тих чи інших математичних моделей та методів щодо розрахунку реальних об'єктів. Розв'язання задач визначення НДС з позицій механіки деформівного твердого тіла та побудови розрахункових областей, від теорії побудови універсальних розрахункових моделей для ґрунтових масивів та елементів конструкцій і до алгоритмів та програм їх чисельної реалізації, є надзвичайно актуальною задачею.

Лесовидні ґрунти, які при зволоженні є прикладом геометрично та фізично неоднорідної ґрунтової основи, займають більше 70% території України. Відмінна їх особливість полягає у тому, що в напруженому стані під дією зовнішнього навантаження чи власної ваги конструкцій і ґрунту при замочуванні вони дають додаткові осідання та можуть знижувати свою міцність [1,2,3].

Основними признаками лесових ґрунтів, що відрізняються від інших різновидів ґрунтів, які мають з ними близькі фізико-механічні характеристики, являються: пилуватий гранулометричний склад, недоущільненість, наявність макропор, вертикальних каналців, що покриті зовні нальотом вуглекислих солей, вапна, гіпсу або інших цементуючих матеріалів, вміст останків рослин, швидке розмочування у воді, велика водопроникненість, максимальний вміст солей в середньому за глибиною, переважна кількість пилуватих фракцій (до 50%) та незначний (до 20%) вміст глинистих часток, однорідність гранулометричного складу [3]. Лесові ґрунти, у переважній більшості, мають глинисті агрегати, що складаються з зерен кварцу, польових шпатів різних розмірів зв'язаних глинистим або іншого складу цементом. При збільшенні вологості лесових ґрунтів порушується рівновага між гравітаційними силами вільної води і капілярним тиском менісків в межах зони зволоження, виникає інфільтрація, ненасичений потік наближається до зон з тонкими плівками води. По мірі заповнення

пор ґрунту водою та стабілізації її витрат розвивається фільтрація, під дією сил тяжіння волога рухається через увесь шаровий простір.

Неводостійкість водно-колоїдних та кристалізаційних зв'язків при зволоженні лесових ґрунтів під навантаженням приводить до руйнування структури та подальшого ущільнення частинок ґрунту. В ґрунтах з неводостійкою структурою для розвитку осадок достатньо зв'язаної та капілярної вологи. При цьому за рахунок миттєвого розклинювання гідрофільних частинок порушуються зв'язки, а згодом – матеріал цементу розчиняється. Таке явище дестабілізації має затяжний характер [3].

Рекомендовані у нормах заходи, що враховують особливості просідаючих ґрунтів, зводяться лише до виконання умови

$$\sigma_{zp} + \sigma_{zg} \leq P_{sc}, \quad (1)$$

де σ_{zp} – вертикальний додатковий тиск у ґрунті від експлуатаційного навантаження; σ_{zg} – вертикальний тиск від власної ваги ґрунту та дорожнього або аеродромного одягу; P_{sc} – мінімальний тиск, при якому починають з'являтися явища просідання ґрунту при його повному водонасиченні.

При невиконанні умови (1) необхідно окрім ущільнення верхнього шару ґрунтової основи передбачати заходи для запобігання явищ додаткового просідання ґрунту: попереднє замочування просідаючої товщі, повну або часткову заміну слабого ґрунту подушками з піску, гравію, щебеню та інших непросідаючих матеріалів.

При проектуванні дорожніх та аеродромних покриттів, а також захисних споруд ґрунтових укосів і насипів, що знаходяться на ділянках з ґрунтовими умовами II типу по просіданню, для покращення властивостей ґрунту передбачається влаштування водовідвідної та дренажної систем, а також гідроізоляційного шару під дорожнім або аеродромним одягом. Але ці заходи на практиці часто бувають малоефективними або недостатніми.

Для розв'язання вищезазначеної проблеми та вдосконалення розрахунку, особливо нежорстких або полегшених жорстких аеродромних покриттів при наявності у ґрунтовій активній товщі вищезгаданих включень і взагалі при неоднорідності ґрунтової основи, пропонується моделювання ґрунтової основи дискретним неоднорідним півпростором при урахуванні для дискретно-локальних зон рівнянь стану для анізотропного матеріалу, еквівалентного реальному лесовому ґрунту. Враховуючи необхідність урахування додаткових просадок ґрунтової основи під дією експлуатаційного навантаження, що складається з лесових ґрунтів, при постановці задачі дослідження напружено-деформованого стану тривимірного неоднорідного півпростору необхідно враховувати геометричну і фізичну нелінійність. Побудову дискретної моделі тривимірного півпростору пропонується здійснити з використанням методу скін-

ченних елементів на базі модифікованої моментної схеми скінченних елементів [4,5].

Моментна схема методу скінченних елементів (МССЕ) використовує апроксимації функцій переміщень, деформацій і напружень на основі тензорних рядів [6]. Ефективність такого підходу при використанні МССЕ зумовлена, перш за все, об'єднанням переваг двох найбільш ефективних чисельних методів — проекційного і варіаційного, а також інваріантністю тензорних рядів по відношенню до будь-яких довільних криволінійних систем координат. У МССЕ виключення відомого у теорії МСЕ негативного явища некоректного врахування жорстких зміщень на елементарному рівні досягається відкиданням старших членів розкладання функцій деформацій, що описують повороти і зсуви. З точки зору теорії МСЕ це відповідає мінімізації других інваріантів функції деформацій.

Розглянемо шестигранний криволінійний скінченний елемент (СЕ), віднесений до локальних криволінійних координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 (рис. 1).

Відповідно вектори основного і взаємного базисів в елементарних околах скінченних елементів визначаються через радіус-вектор $\vec{r}_{(e)}$ (у точці М):

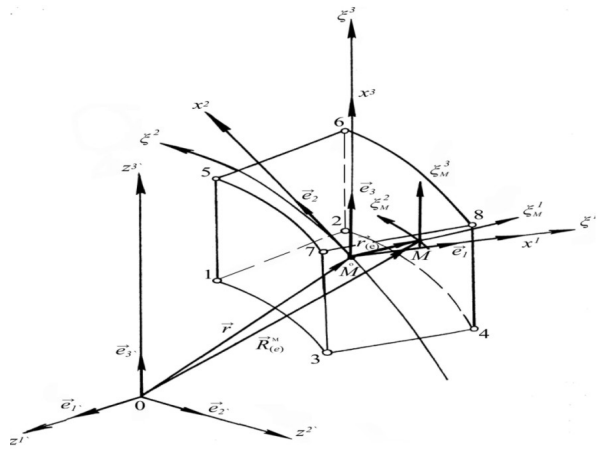


Рис. 1. Шестигранний криволінійний СЕ в локальних криволінійних координатах ξ^1, ξ^2, ξ^3 .

$$\bar{e}_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{\partial \vec{R}_{(e)}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial (\vec{r} + \vec{r}_{(e)})}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}_{(e)}}{\partial \xi^i}. \quad (2)$$

Одночасно з криволінійними координатами ξ^i точкам скінченного елемента (підобласті $r_{(e)}$) можна поставити у відповідність прямолінійні координати x^1, x^2, x^3 (рис. 1), початок яких співпадає з початком ξ^1, ξ^2, ξ^3 , в яких масштабні вектори $\bar{e}_i(0,0,0)$ як частковий випадок для центра СЕ. Враховуємо, що координати ξ^i і x^i зв'язані між собою взає-

мно однозначними достатньо гладкими функціями, а радіус-вектор $\vec{r}_{(e)}$ визначається відповідно початку координат

$$\vec{r}_{(e)} = x_{(e)}^m \vec{e}_m; \quad x_{(e)}^m = x_{(e)}^n (\xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (3)$$

Вектор переміщень $\vec{u}$ в області $r_{(e)}$ наведемо розкладанням у тензорний ряд Маклорена з утриманням чотирьох членів ряду:

$$\begin{aligned} \vec{u} = & \vec{u}_{(0)} + \vec{r}_{(e)} \cdot \nabla \vec{u} \Big|_{(0)} + \frac{1}{2} \vec{r}_{(e)} \vec{r}_{(e)} \times \\ & \times \nabla \nabla \vec{u} \Big|_{(0)} + \frac{1}{6} \vec{r}_{(e)} \vec{r}_{(e)} \vec{r}_{(e)} \cdots \nabla \nabla \nabla \vec{u} \Big|_{(0)} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

У скалярному вигляді відносно системи координат x^i ряд (4) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} u = & u^0_i + x^n \nabla_n u^0_i + \frac{1}{2} x^m x^n \nabla_m \nabla_n u^0_i + \\ & + \frac{1}{6} \nabla_l \nabla_m \nabla_n u^0_i x^l x^m x^n + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

де коваріантні похідні у загальному випадку обчислюються як складні функції відносно координат x^i у відповідності з (3). Тобто у початку координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 маємо:

$$\begin{aligned} \nabla_i u^0_j = & \frac{\nabla \varphi_i}{\partial x^i} \Big|_{(0)} = \left(\frac{\partial u_j}{\partial \xi^s} \cdot \frac{\partial \xi^s}{\partial x_i} \right) \Big|_{(0)}; \\ \nabla_m \nabla_i u^0_j = & \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^m \partial x^i} \Big|_{(0)} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^n} \left(\frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \xi^s} \right) \frac{\partial \xi^n}{\partial x^m} \right) \Big|_{(0)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналіз чисельних дослідів [4,5] виявив, що розкладення функцій переміщення у ряди Маклорена (4) відносно локальних криволінійних ξ^i і прямолінійних x^i координат при однаковій кількості утримуваних членів ряду має однаковий порядок апроксимації. При цьому коефіцієнти ряду (5), як коваріантні похідні від вектора переміщень, які є похідними по прямолінійним координатам (у початку координат), взаємно однозначно визначаються як похідні по криволінійним координатам за формулою(6). Це дозволяє розглядати для кри-

волінійних координат СЕ переміщення безпосередньо як функції x^i і відповідно глобальних координат $z^{i'}$, що суттєво спрощує співвідношення, тобто при використанні метрики у центрі СЕ. При чисельному інтегруванні у локальній області $r_{(e)}$ всі співвідношення інтегрування утримуються у координатах ξ^i .

Використовуючи прямолінійні координати x^i , маємо трансформацію криволінійного шестигранника у вигляді косокутового паралелепіпеда (рис.2) і, як правило, при виводі матриць жорсткості для СЕ, місцеві вісі яких не співпадають з глобальними, звичайно використовують функції переміщень у глобальних координатах.

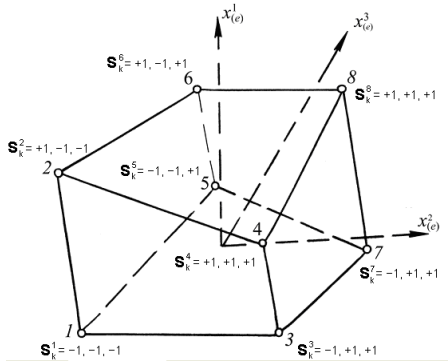


Рис. 2. Шестигранний ізопараметричний СЕ в локальних координатах x^1, x^2, x^3 .

У тривимірному просторі $r_{(e)}$ для ізопараметричного СЕ апроксимуючі функції координат і переміщень у глобальній системі координат можна навести при ідентифікації вузлів СЕ за допомогою умовних лагранжевих координат $S_i = \pm 1$ у вигляді:

$$\begin{aligned} z^{i'}(x_{(e)}^i) &= \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \sum_{S_3 \pm 1} \prod_{k=1}^3 \left(S_{(k)} x_{(e)}^{(k)} + \frac{1}{2} \right) z_{S_1 S_2 S_3}^i ; \\ u^{i'}(x_{(e)}^i) &= \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \sum_{S_3 \pm 1} \prod_{k=1}^3 \left(S_{(k)} x_{(e)}^{(k)} + \frac{1}{2} \right) u_{S_1 S_2 S_3}^{i'} , \end{aligned} \quad (7)$$

де $S_{(k)}$ - умовні лагранжеві координати, що дорівнюють +1 або -1 при $x_{(e)}^k$ більше або менше 0 відповідно; $x_{(e)}^k = \pm \frac{1}{2}$ - місцеві нормалізовані коор-

динати СЕ; $z'_{S_1S_2S_3} \equiv z'_n$ – вузлові координати СЕ у глобальному базисі;
 $u'_{S_1S_2S_3} \equiv u'_n$ – вузлові переміщення СЕ у глобальному базисі.

Формули для обчислення компонент розкладень деформацій у ряд Маклорена для прямокутного паралелепіпеда модифікованої МССЕ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \Big|_{(0)} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(0)} x^2 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^3 + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^2 x^3; \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \Big|_{(0)} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(0)} x^1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^3 + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^1 x^3; \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \Big|_{(0)} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^1 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^1 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^2 + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^1 x^2; \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \Big|_{(0)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^3} \right) x^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} x^3 x^3; \\
 \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1} \right) \Big|_{(0)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^1 \partial x^2} \right) x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} x^2 x^2; \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^2} \right) \Big|_{(0)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^1 \partial x^2} \right) x^1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} x^1 x^1.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Підкресленими членами розкладання функцій деформацій у ряд Маклорена запропонована модифікована схема МСЕ відрізняється від стандартної МССЕ [4].

Виходячи з представлень вектора переміщень $\vec{u}$ в області $r_{(e)}$ у вигляді ряду (5), а також з урахуванням повного кубічного поліному апроксимації переміщень [4], умов мінімуму доданку квадратів моментів деформацій допоміжного закону розподілу переміщень у області $r_{(e)}$ і перетворень косокутних місцевих координат полілінійного скінченного елемента у формі криволінійного шестигранника, беремо за основу структуру розкладень деформацій у вигляді (8). Таким чином число членів розкладень функцій деформацій, у тому числі скінченних, для СЕ у вигляді криволінійного шестигранника складає: для ε_{ij} , $i = j$ – чотири члени ряду; для ε_{ij} , $i \neq j$ – три члени ряду.

Запропонована методика одержання основних співвідношень МСЕ більш ефективна, якщо величини визначити у місцевій системі координат.

нат, а перетворення до глобальної системи координат виконати після отримання нелінійної матриці реакцій або матриці жорсткості.

Представляючи тензори функцій приростів скінченних деформацій і приростів напружень у тензорний ряд Маклорена в області $r_{(e)}$ з утриманням трьох членів ряду маємо:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(x_{(e)}) &= \mathfrak{F}_{(0)} + \vec{r}_{(e)} \cdot \nabla \mathfrak{F}_{(0)} + \frac{1}{2} \vec{r}_{(e)} \cdot \nabla \nabla \mathfrak{F}_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)}; \\ \mathfrak{E}(x_{(e)}) &= \mathfrak{E}_{(0)} + \vec{r}_{(e)} \cdot \nabla \mathfrak{E}_{(0)} + \frac{1}{2} \vec{r}_{(e)} \cdot \nabla \nabla \mathfrak{E}_{(0)} \cdot \vec{r}_{(e)}.\end{aligned}\quad (9)$$

Розглянемо варіацію енергії деформації для скінченного елемента області $r_{(e)}$ відносно довільної деформованої конфігурації $C_{(e)}^t$, зумовленої приростами деформацій Коші-Гріна γ_{ij} у довільно близькій конфігурації $C_{(e)}^{t+\Delta t}$ з урахуванням еволюції деформування суцільного середовища:

$$\delta U_{(r_{(e)})} = \int_{r_{(e)}} \sigma^{*ij} \delta \gamma_{ij} dU_{(e)}, \quad (10)$$

де $\sigma^{*ij} = \sigma^{1ij} + \sigma^{ij}$ – повний другий симетричний тензор напружень Піола-Кірхгофа, що визначається відносно невикривленої конфігурації $C_{(e)}^{t=0}$. Виконаємо інтегрування у криволінійному СЕ, коли переміщення віднесені до прямокутних косокутних координат, що співпадають з криволінійною місцевою системою координат у центрі СЕ. При цьому скористаємося одержаними виразами розкладань функції деформації і напружень у ряд Маклорена в області $r_{(e)}$. У відповідності з введеними приростами деформацій і напружень (9) інтегрування здійснюється у межах від $x^i = -1/2$ до $x^i = +1/2$ (рис.2). Після інтегрування маємо:

$$\begin{aligned}\delta U(r_{(e)}) &= \sqrt{G} \left(N^{*ij} \delta \xi_{ij}^* + \frac{1}{12} M_k^{*ij} \delta \varphi_{ij,k}^* \varpi_{(ij)}^{(kk)} + \right. \\ &+ \frac{1}{144} M_{ks}^{*ij} \delta_j^i \delta \psi_{ij,ks}^* \varpi_{(sijij)}^{(kksks)} + \frac{1}{12} (-1)^{i+j} N^{*ij} \delta \psi_{ij,ks}^* \varpi_{(jiij)}^{(iksk)} + \\ &+ \frac{1}{12} (-1)^{i+j} M_{ks}^{*ij} \delta \xi_{ij}^* \varpi_{(jiij)}^{(iksk)} + \left. \frac{1}{80} (-1)^{i+j} M_{ks}^{*ij} \delta_j^i \delta \psi_{ij,ks}^* \varpi_{(jiij)}^{(iksk)} \right).\end{aligned}\quad (11)$$

Підкресленими членами у (11) відрізняються вирази варіацій енергії деформацій СЕ для стандартної схеми МССЕ і запропонованої модифікованої. Підставивши у (11) варіації

$$\begin{aligned}\delta \xi_{ij}^* &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1}^* C_j^{k'} \Big|_{(0)} S_i u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} ; \\ \delta \varphi_{ij,k}^* &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1}^* (C_j^{k'} \Big|_{(0)} S_i S_k u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} \varpi_{(i)}^{(k)} + \frac{1}{2} C_{j,k}^{k'} S_i u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} \varpi_{(j)}^{(k)}); \\ \delta \psi_{ij,ks}^* &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} \left(C_j^{k'} \Big|_{(0)} S_i S_k S_s u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} \varpi_{(ij)}^{(ks)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} C_{j,k}^{k'} S_i S_s u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} \varpi_{(ij)}^{(ks)} + \frac{1}{2} C_{j,s}^{k'} S_i S_k \varpi_{(ij)}^{(ks)} + \frac{1}{4} C_{j,ks}^{k'} S_i \varpi_{(jjii)}^{(ksks)} \right) \times \begin{cases} \varpi_{(k)}^{(s)} \text{ при } \delta_j^i \\ \varpi_{(j)}^{(i)} \text{ при } (-1)^{i+j} \end{cases}\end{aligned}\quad (12)$$

остаточно отримуємо:

$$\delta U(r_{(e)}) = \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{P_3=\pm 1} R_{P_1 P_2 P_3}^{\prime} \delta u_{P_1 P_2 P_3}^{\prime} , \quad (13)$$

де $R_{P_1 P_2 P_3}^{\prime}$ — нелінійна матриця реакції об'ємного СЕ.

З використанням варіаційного рівняння першого принципу віртуальної роботи [5] і виразу (13) без урахування інерційних сил одержимо нелінійне варіаційне рівняння рівноваги через сумування по вузлах СЕ-моделі:

$$\sum_{G=1}^N \left[R_G^{\prime} \delta u_{(G)}^{\prime} - P_G^{\prime} \delta u_{(G)}^{\prime} - Q_{G(\alpha)}^{\prime} u_{(G\alpha)}^{\prime} - Q_{G(\beta)}^{\prime} u_{(G\beta)}^{\prime} \right] = 0, \quad G=1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

де N — число вузлів СЕ-моделі.

Із виразу (14) можна отримати рівняння рівноваги СЕ-моделі у довільний момент часу при умові рівності нулю коефіцієнтів при відповідних кожній з варіацій компонент вузлових переміщень:

$$R_G^{\prime} - P_G^{\prime} - Q_G^{\prime} = 0. \quad (15)$$

У запропонованій методиці дослідження ґрунтового півпростору на основі співвідношень нелінійної теорії пружності передбачається визначення другого критичного навантаження, при якому у ґрунті виникають суцільні області граничного напруженого стану. Для опису процесу роз-

витку зсувних деформацій використовується постулат стійкості Друкера-Прагера [7]:

$$\alpha I_1 + \sqrt{I_2} - K = 0; \alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}; K = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, \quad (16)$$

де $I_1 = I_1(\boldsymbol{\epsilon})$ - перший інваріант тензора напружень; $I_2 = I_2(\boldsymbol{\epsilon})$ - другий інваріант тензора напружень; φ - кут внутрішнього тертя у ґрунті; c - питоме зчеплення ґрунту.

Остаточно задача урахування пластичної течії в дискретній області півпростору в ітераційному процесі методу подовження за параметром збудження зводиться до корекції тензора пружностей [5]:

$$\boldsymbol{\epsilon}_4^{(e,p)} = \boldsymbol{\epsilon}_{21}^{(e)} - 36 c^2 \beta \boldsymbol{\mathbb{E}} \boldsymbol{\mathbb{E}}, \quad (17)$$

де $\beta = \left(h + 18 c I_1 (\boldsymbol{\mathbb{E}}^2) \right)^{-1}$; $h = \frac{c}{1 - c/E_0}$; E_0 — модуль деформації ґрунту;

$$\boldsymbol{\mathbb{E}} \equiv \text{dev} \boldsymbol{\epsilon}.$$

Розроблена математична модель дослідження пружного півпростору з використанням нелінійного пружно-пластичного деформування твердого тіла з урахуванням фізико-механічних характеристик ґрунту є розвитком існуючої теорії лінійно-деформованого півпростору для дослідження граничного стану ґрунтових основ при суцільному розвитку зсувних деформацій.

1. Цытович Н.А. Механика ґрунтов.— М.:ГИЛСЛ и СМ, 1963. — 635с.
2. Цытович Н.А., Тер-Мартirosян З.Г. Основы прикладной геомеханики в строительстве. — М.: Высшая школа, 1981. — 317с.
3. Гольдштейн М.Н. Механические свойства ґрунтов. — М.: Стройиздат, 1973.— 375с.
4. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и Альтенбаха.—Киев: Вища школа. Гол. вид. 1982.— 480с.
5. Баженов В.А. Цихановський В.К., Кислоокій В.М. Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. — Київ: КНУБА, 2000. — 386с.
6. Сахаров О.С. Тензорні ряди в моментній схемі методу скінченних елементів/ Опір матеріалів і теорія споруд, вип. 68.— Київ: КНУБА, 2000 С.122-129.
7. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. — М: Изд-во иностр. лит., 1963. — 312с.

Матеріал надійшов до редакції 04.10.04.